FELSŐBB MENNYISÉGTAN.

MÁSODIK RÉSZ.

EGÉSZLETI HÁNYLAT,

ALKALMAZÁSÁVAL EGYÜTT.

ÍRTA

PETZVAL OTTÓ

BÖLCSÉSZETI TUDOR, OKLEVELES MÉRNÖK, A MAGYAR KIR. EGYETEMNÉL A FELSŐBB MENNYISÉGTAN R. TANÁRA, ÉS A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA R. TAGJA.

KIADJA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

PEST,

NYOMATOTT EMICH GUSZTÁV MAGY. AKAD. NYOMDÁSZNÁL.

1868.

ELÖSZÓ.

Ezennel átadatik a tudományos közönségnek a felsőbb mennyiségtan második része, melynek egészleti hánylat a neve, s mely által az emberiség igen rövid idő alatt annyira fel lön világosítva, hogy a mostani világ viszonyait, a régibb világ viszonyaival a legelőnyösebben lehet összehasonlítni; mert ezen összehasonlításból világosan lehet látni, hogy az emberiség azon kiskoruságból, melyben a régibb időben volt és tartatott, mostanában már kikerült, és önállólag kezdett müködni, és hogy ezen müködésnek többé el nem hárítható ereje van, melynél fogva már most is lehet állítni, hogy nem igen sok idő múlva, az emberiség teljes önállósága bizonyosan el lesz érve.

Hogy pedig mind ezeket, egyedül csak az alaposan tanulmányozott természeti tudományoknak köszönhetjük, senki sem fogja kétségbe vonni; s így nem lehet forró és abban álló óhajtásunkat elég nagy nyomatékkal kifejeznünk, melynél fogva azt kivánjuk, hogy nemzetünk minél nagyobb része fiatal korában, ezen nevezetes tudományok üzéséhez fogjon; hiszen nem kivántatik épen az, hogy mindenkiből mély tudós legyen, s elég örvendetes jelenetnek fogjuk tartani, ha mindenki, ezen gyönyörü tudományok csak alapelveiben is jártas lesz; mert már az által is, különféle előitéletektől, és sok szomoru természetü tulajdonságoktól meg lesz szabaditva, mit ugyan előnynek lehet tekinteni; hozzá járul még az is, hogy ezen tudományok tanulmányozása, egyszersmind a leghatalmasabb eszköz, különféle téves nézetek elüzésére, s minthogy e nemes czélt egyedül csak a valós tudományok üzése által érhetjük el, fen kimondott óhajtásunk, nem épen rosz tanácsnak lesz tekinthető.

Itt nem csak czélszerünek hanem szükségesnek is látszik, felvilágositást adni azon rendszerről, mely szerint a jelen egész munka szerkesztve van, minthogy abból világosan lehetend látni, vajjon az előttünk fekvő munka alkalmas-e tanulásra, és mit és mennyit lehet belőle tanulni.

A mi az első kötetet illeti, az a külzeléki hánylatot alkalmazásával együtt, foglalja magában, s egy bevezetésben és négy fejezetben tárgyaltatott. A bevezetés a függvény fogalmának megállapitására szolgál, hol egyszersmind a függvénynek különféle nemeiről van szó, végre azon jelképek is felhozatnak, melyek által a függvények általánosan véve képviseltetnek.

Az első fejezetben azon függvények külzelési módja terjesztetik elő, melyek csak egy független változóval birnak, mely külzelési mód, mind az algebrai, mind a túllépő függvényekre kiterjed; s hogy ezen külzelési módok számos és oktató példákkal felvilágosítvák, alig megemlítendő.

A második fejezetben a függvények felsőbb külzelékei és lehozott függvényeiről van szó, mely alkalommal a kifejtetlen függvények külzelése, és az állandók kiküszöbölése is előterjesztetik. A lehozott felsőbb függvényekre következik a Taylor tantételének bebizonyítása és némely könnyebb esetekre alkalmazása. Ezek után a Mac Laurin nagy fontosságu tantétele hozatik le, és mindjárt ennek alkalmazása is előterjesztetik a függvények sorba fejtésére, mely alkalmazás, mint könnyű belátni, nagy érdekü; ez alkalommal a sorok összetartásáról is van szó.

Ez után következik a Moivre kétszaku tantételének a megállapitása, s egyszersmind alkalmazása is, a felsőbb foku tiszta egyenletek feloldására és némely háromszögtani sorok származtatására. Ugyanabban a fejezetben még a függvények határozatlan értékeinek, és a függvények legnagyobb és legkisebb értékeinek általános elmélete terjesztetik elő; mind a kettőt számos és czélszerü példákkal felvilágosítván. Ezekből látni lehet, hogy e fejezetnek nagy kiterjedésü tartalma van.

A harmadik fejezetben azon függvények külzelése tárgyaltatik, melyek több független változóval birnak; mely alkalommal a kifejtetlen és több változóval biró függvények külzeléséről és az egynemü függvények keletkezéséről is van szó. Továbbá azon nagy fontosságu tárgy terjesztetik elő, melyben a független változónak felcserélése adatik elő, s mely tárgy a kellő példákkal fel van világosítva ; s ennek utána a tetszésszerinti függvények kiküszöbölése is tárgyalás alá vétetett.

Mind ezeknek előrebocsátása után, következik a Talyor és Mac Laurin sorának származtatása, több változóval bíró függvényekre nézve ; s mindjárt ezen sorok alkalmazása is 1-ször azon függvények határozatlan értékeire , melyek több változóval bírnak, és 2-szor azon függvények legnagyobb és legkisebb értékeire, melyekben több független változó fordúl elő , mind a két elméletet a kellő példákkal felvilágosítván. Ugyane fejezetben a külzeléki egyenletek háromszögök számára is terjesztetnek elő ; s végre ezen fejezet a Lagrange tantételével fejeztetik be.

A negyedik fejezetben a külzeléki hánylatnak a mértanra alkalmazása terjesztetik elő, melyre nézve azonban czélszerünek látszott, az elemző mértan alapelveinek előrebocsátása, mi különben csak igen röviden vitetett véghez. Maga az említett alkalmazás, a következő tárgyakra terjesztetett ki : 1-ször) az érintők, alérintők, deréklők és alderéklők meghatározására, 2-szor) az egyszerü görbületi görbék görbületi sugarának kifejtésére, még pedig azon esetre is, ha semmi külzelék állandónak nem vétetik , végre sarkösszrendezőkre nézve is. 3-szor) tárgyalás alá vétetett az egyszerü görbék különféle rendü érintkezése, s ebből alkalmazás gyanánt, az érintkező kör sugara is lehozatott. 4-szer) vizsgálat alá vétetett, a kettős görbületü görbék különféle rendü érintkezése, s ennek alkalmazása a kettős görbületü görbék görbületi sugarának meghatározására. 5-ször , a kettős görbületü görbék érintő egyenesei és deréklő síkjaira. 6-szor, a görbe felületek érintő síkjai és deréklő egyeneseire. 7-szer, az egyszerü görbületü görbék lefejtettei és lefejtőire. 8-szor) a hengeres felületek egyenleteire, 9-szer a kúp alaku felületek egyenleteire, 10-szer) a forgási felületekre, 11-szer) a görbe felületek érintkezésére, s végre 12-szer) a görbe vonalok nevezetes pontjaira. Függelék gyanánt a másod rendü felületek egyenleteinek a megállapitása is tárgyalás alá vétetett.

A mi jelen munkának második kötetét illeti, az a felsőbb mennyiségtan második részét, azaz az egészleti hánylatot alkalmazásával együtt, foglalja magában. Ezen tudomány e következő rendszer szerint van szerkesztve : A kezdete ezen tudománynak egy bevezetésből áll, melyben az egészlet fogalma terjesztetik elő, a mint az okvetlen szükséges, ezen tudomány megértésére; a többi pedig hat fejezetben van előadva, mely fejezetek e következő tárgyakról szólnak :

Az első fejezetben az egy változóval bíró külzeléki függvények egészelése tárgyaltatik, még pedig mind az algebrai mind a túllépő függvényekre vonatkozva. Ezen fejezetnek a rendszere következőkből fog kitünni: 1-ör jő az alapegészletek kifejtése, kétszaku külzeléki függvényekre nézve. 2-szor. A háromszaku egészletek tárgyalása, és némely egészletek származtatása lehozás útján. 3-szor. Az okszerütlen külzeléki függvények egészelése. 4-szer. Az okszerü való tört függvények szétbontása részlet-törteire. 5-ször. Az egészelési módok szétbontás által. 6-szor. A részletes egészelés, és a lenyomási képletek származtatása. 7-szer. Az egészelés sorok által, hozzá csatolván az egészlet alatti külzelést, és az egészlet alatti egészelést.

Ezek után következik a túllépő függvények egészelése, még pedig: 1-ször) a logarithmusi függvények egészelése 2-szor) a kitevős függvények egészelése, és 3-szor) a háromszögtani és körméreti függvények egészelése, s avval be van fejezve az egy változóval bíró első külzelékek egészelése. Végre hozzá járul még a felsőbb külzelékek egészelése, és a határozott egészletek elmélete, mivel az első fejezet be van zárva.

A második fejezetnek tárgya, az egészleti hánylat alkalmazása a mértanra, mely alkalmazás e következő négy esetre terjesztetett elő : 1-ször) a görbe vonalok által bezárt sík felületek négyszögítésére, mind épszögü mind sarkösszrendezőkre vonatkozva, 2-szor) a görbe vonalok egyenesítésére, szintén mind épszögü mind sarkösszrendezők által, 3-szor a görbe vagy forgási felületek kisikítására, és 4-szer) a forgási testek köbözésére.

A harmadik fejezetben, több változóval bíró külzeléki függvények egészelése tárgyaltatik, de csak azon függvényekre nézve, melyek valamely, több változóval bíró függvénynek teljes külzelékei, számos példákkal felvilágosítva. Ez után azon határozott egészletek tárgyalása következik, melyekben két változó fordúl elő. Ugyane fejezetben, több változóval bíró kettős egészletek is terjesztetnek elő, s ezek kapcsolatában, a kettős határozott egészletekről is van szó.

A negyedik és egyszersmind a legbővebb tartalmu fejezetben, a külzeléki egyenletek egészelése vétetett tárgyalás alá, mely tantárgy azért tárgyaltatott oly bőven, minthogy ezen egyenletek egészelésénél a legnagyobb nehézségek fordúlnak elő. Hányféle egyenletek egészelése terjesztetett pedig elő e fejezetben, azt a tartalomból világosan lehet látni. Az egészelés ezen egyenleteknél, két és három változóval bíró külzeléki függvényekre terjesztetett ki, és ezen fejezet az együttes külzeléki egyenletek egészelésével fejeztetik be.

Toldalék gyanánt ezen fejezethez csatoltatott, az egészleti képletek gyűjteménye, milyennek egy teljes egészleti hánylatról szóló munkában nem szabad hiányzani.

Az ötödik fejezet azon nevezetes és külön álló tudományt foglalja magában, mely változtatási hánylat neve alatt ismeretes a tudományos világban, és egyedül csak arra szolgál, hogy bizonyos nemü maximumok és minimumok határoztassanak meg, mely nemre t. i. a közönséges külzelés nem alkalmazható. Ezen nagy fontosságu hánylat Euler tudós által alapíttatott meg, és csak később Lagrange, Gauss, Poisson is más tudósok által lőn tökéletesítve.

Végre a hatodik fejezetben némi alkalmazása adatik elő a felsőbb mennyiségtannak a menchanikára, hol azonban csak a mozgást illető tantárgyak vétettek tárgyalás alá oly módon, hogy először a mozgás alap-egyenletei hozatnak le, s ennek megtörténte után, ezen egyenletek alkalmazása terjesztetik elő, a moztanban előforduló legérdekesebb esetekre, melyek közül kétségtelenül a legnagyobb érdekkel bír azon eset, melyben a bolygók nap körüli mozgásáról van szó, mint hogy itt ezen mozgásnak általános és alapos elmélete fejtetik meg, melyből napi rendszerünk azon bámulatos sajátságai világosan láthatók, melyeknél fogva egyedül vagyunk képesek, ezen rendszernek alkotásáról és örökös állhatóságáról kellő fogalmat nyerni, mely fogalom elemi úton meg nem szerezhető, mi miatt oly kevés ember találtatik e világban, ki ezen nagyszerü fogalommal dicsekedhetnék.

Hogy végre azon előterjesztési módról is kellő fogalom nyeressék, melylyel a tantárgyak a jelen munkában elő vannak adva, elégséges lesz említést tenni azon nyilatkozatról, melyet ezen munkának egyik bírálója a magyar tudom. Akadémia elébe terjesztett ezen munkára nézve; szavai e következők: „Ha valaki nem volna képes a jelen munkából megtanulni a felsőbb mennyiségtant, az soha és semmiféle más könyvből nem lesz képes azt magáévá tenni“; miből tehát világosan következik, hogy az e munkában előforduló tantárgyak, a lehető legnagyobb világossággal és érthetőséggel elő vannak terjesztve, s így a tanuló előnye is kellő tekintetbe van véve.

Pesten Január hóban

a szerző.

BEVEZETÉS.

1.) (Az egészlet fogalma.) Az egészleti hánylat épen ellenkezője a külzeléki hánylatnak; tudjuk ugyanis, hogy a külzeléki hánylat czélja, a függvénynek végtelen kicsiny növeteinek avagy külzelékeinek meghatározásában áll; ellenben az egészleti hánylat mind azon műtételeket foglalja magában, melyeknek folytán, valamely függvénynek adott külzelékéből, magát a függvényt meg lehet határozni.

Ezen határozatnál fogva, minthogy a külzeléki hánylatból ismeretes előttünk, hogy $f(x)$-nek a külzeléke $f'(x)dx$ jelkép által kellőleg terjesztetik elő, $f(x)$ szükségképen $f'(x)dx$ külzelék egészletének lesz tekintendő. Valamint pedig valamely adott függvény külzelését, d-nek elébe-tétele által szoktuk kijelenteni, úgy valamely adott külzeléknek egészelését $\int$ jegy elébe-tétele által fogjuk jelenteni, minek következtében $\int f'(x)dx$ kifejezés, avagy $f'(x)dx$-nek az egészlete, azon függvényt jelenti, melynek külzelése által az adott külzelék ered, s így e következő kifejezés helyes volta világos lesz:

$$1)\qquad \int f'(x)dx = f(x).$$

Mivel azonban $f'(x)dx$ nem csak $f(x)$-nek, hanem $(f(x)+C)$-nek külzeléke is, hol C egy állandó mennyiséget jelent, mely mint tudjuk az adott függvény külzelésénél mindig elmarad: következik, hogy az előbbi 1) kifejezés az adott külzeléknek nem teljes egészlete, és ezzé csak azon esetre fog válni, ha még az úgynevezett tetszésszerinti C állandót hozzácsatoljuk; teljesen fog tehát állni:

$$2)\qquad \int f'(x)dx = f(x) + C,$$

s magától értetődik, hogy ezen állandó, semmiféle külzelék egészelésénél ki nem hagyandó.

Minthogy továbbá ismeretes előttünk, hogy az adott függvény állandó szorzója annak külzelékében is mint olyan fordúl elő, de a függvény külzelésére befolyása nincsen: következik, hogy ezen állandó szorzónak az egészelésre sem lesz befolyása, s így az adott külzeléknek csak változó része egészelendő; minek folytán e következő kifejezés lesz helyes:

$$\int af'(x)dx = a\int f'(x)dx,$$

azaz, az adott külzelék változó részének egészelése után, az állandó szorzót hozzácsatoljuk, miért is az, az egészelési jegy elébe szokott iratni.

Minthogy végre azt is tudjuk, hogy az összeg vagy különbség külzeléke, a külzelékek összegével vagy különbségével egyenlő: következik, hogy valamely összeg vagy különbség egészlete is, az egészletek összegével vagy különbségével lesz egyenlő; s így helyesek e következő egyenletek:

$$\int [f'(x)dx + \varphi'(x)dx] = \int f'(x)dx + \int \varphi'(x)dx, \text{ és}$$

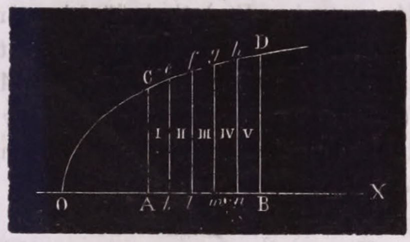
$$\int [f'(x)dx - \varphi'(x)dx] = \int f'(x)dx - \int \varphi'(x)dx,$$

2.) **(Minden egészlet külzelékek összegének tekintendő.)** Ennek megmutatására czélszerü lesz e következő nézetet előrebocsátni. Feltévén t. i., hogy (1-ső idom) OAC felület meghatározásáról volna szó, mely az OC görbe és két egyenes által be van zárva; akkor bízton állíthatni, hogy a kérdéses felület $OA = x$ metszék függvénye, ez tehát $F(x)$ jelkép által kellőleg terjesztetik elő; mivel pedig $F(x)$ függvény $f(x)dx$ külzelék egészletének tekinthető, állnia kell e következő egyenletnek:

$$1).\qquad \int f(x)dx = F(x) + C,$$

ez pedig határozatlan egészletnek szokott neveztetni mindaddig, míg x változónak határozott értéket nem tulajdonítunk. Ennek megértésére, vegyük föl, hogy $ACDB$ (1-ső idom) fe-

(1-ső idom.)



lület meghatározásáról van szó; akkor $OA = x = a$ metszék, ezen felületnek kezdetét határozandja meg, azaz, a kérdéses felület elenyészik, mihelyt x helyébe a tétetik; mely körülmény C állandónak meghatározására szolgál, áll t. i.:

$0 = F(a) + C$, honnan: $C = -F(a)$, s ennek folytán:

$$\int f(x)dx = F(x) - F(a),$$

miből láthatni, hogy az 1) alatti egészlet egyik oldaláról már meg van határozva. Ha pedig azt a másik oldaláról is meg akarnók határozni, akkor az előttünk álló egyenletben csak $OB = b$ teendő x helyébe, mi által $F(b) - F(a)$ fog nyeretni, s ezen mind két oldalról meghatározott egészlet a kérdéses felületet terjeszti elő, és e következő kifejezés által szokott adatni:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

hol b a nagyobbik, a pedig a kisebbik határnak neveztetik, mely határok között nyilván a kérdéses terület fekszik.

3). Ezeket előrebocsátván, fenebbi állításunk igaz voltát e következő módon lehet bebizonyítni. Azon feltét alatt t. i., hogy $f(x)dx$ kifejezés $F(x)$-nek külzeléke, ezen hánylat elvei szerint kell hogy álljon:

2.) $F(x + dx) - F(x) = f(x)dx$.

Ha már most az (1-ső idom)-ban előforduló $AB = b - a$ hézagot végtelen kicsiny Ak, Kl, lm, mn . . . . . részekre osztva képzeljük, minthogy $OA = a$: az említett végtelen kicsiny részek mindegyike da jelkép által kellőleg lesz képviselve; és az I, II, III, IV ..... alatti végtelen kicsiny területek, az OAC területnek egymásra következő végtelen kicsiny növeteinek tekinthetők, melyeknek meghatározásáról itt szó van. E végre szabad lesz, az OCD görbe vonal által bezárt területet általánosan véve $F(x)$ által előterjeszteni, minek következtében az OAC terület $F(a)$ által, az OKe terület pedig $F(a+da)$ által lesz képviselve, s így az $ACek$ terület $F(a+da)-F(a)$ által kellőleg fog adatni, mely kifejezés a fenebbi 2) alatti kifejezéssel összehasonlíttatván, e következő eredményre vezet:

$$F(a+da)-F(a)=f(a)da.$$

Hasonló módon a II terület meghatározására, az $Olf=F(a+2da)$ területből kivonandó lesz az $Oke=F(a+da)$ terület, minek folytán áll:

$$F(a+2da)-F(a+da)=\text{II},$$

ezt pedig ha megint összehasonlítjuk a 2) alatti általános egyenlettel, e következő eredményt fogjuk kapni:

$$F(a+2da)-F(a+da)=f(a+da)da.$$

Ha ezen okoskodást tovább folytatjuk, és felteszszük, hogy da külzelék az AB hézagban n-szer foglaltatik, (hol tehát n felette nagy szám): akkor az egyenletek e következő sorát fogjuk nyerni:

$$\begin{gathered}F(a+da)-F(a)=f(a)da\\ F(a+2da)-F(a+da)=f(a+da)da\\ F(a+3da)-F(a+2da)=f(a+2da)da\\ F(a+4da)-F(a+3da)=f(a+3da)da\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{ végre:}\\ F(a+nda)-F(a+(n-1)da)=f(a+(n-1)da)da,\end{gathered}$$

mely egyenletek összeadása által kapjuk:

$$F(b)-F(a)=f(a)da+f(a+da)da+f(a+2da)da+\dots\dots f(a+(n-1)da)da,$$

minthogy nyilván $(a+nda)=b$. Ezen egyenlet figyelmes megtekintéséből látjuk, hogy annak bal része nem egyéb, mint b és a határok között vett határozott egészlet; a jobb részében előforduló n tag pedig mind külzelék; az említett határozott egészlet tehát nem lehet egyéb, mint a kitűzött határok között létező külzelékek összvege; mi által tehát állitásunk igaz volta be van bizonyítva; magától értetődvén, hogy $F(x)$-nek b és a határok között folytonosnak kell lenni.

Minthogy $f(x)dx = d.F(x)$, következik, hogy:

$$F(x) = \int d.F(x)\text{-nek is állnia kell ;}$$

azaz, $F(x)$ nem változik, ha azt először külzeljük, s azután egészeljük. Ha pedig a $F(x) = \int f(x)dx$ egyenletet külzeljük, álland:

$$d.F(x) = d.\int f(x)dx, \quad \text{következőleg :}$$

$$f(x)dx = d.\int f(x)dx,$$

azaz, $f(x)dx$ függvény nem változik, ha azt először egészeljük x szerint, azután pedig külzeljük. Ez által, mint látjuk, az egészleti hánylat természete is teljesen meg van mutatva.

Azaz egy külzelék nem változik ha azt egészeljük s ennél nagy törlé... utána külzeljük.

ELSŐ FEJEZET.

EGY VÁLTOZÓVAL BÍRÓ KÜLZELÉKI FÜGGVÉNYEK EGÉSZELÉSE.

4.) **(Alapegészletek.)** Alapegészleteknek neveztetnek azok, melyek a függvények ismert külzelékeiből egyszerü megfordítás által nyeretnek. Ezen egészletek nagy fontossággal bírnak azért, mivel számtalan ismeretlen alaku egészletek csak az által határozhatók meg, hogy ezen ismert egészletek alakjára visszahozatnak. Így a külzeléki hánylatból tudjuk, hogy :

$$d.\frac{x^{m+1}}{m+1}=x^m.dx,$$

ebből tehát egyszerü megfordítás által kapjuk :

$$1).\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C;$$

mivel pedig $x^m dx$ nem egyéb, mint hatvány külzeléke, a jelen kifejezésből e következő hatvány egészelési szabálya olvasható : a függvény kitevője egygyel nagyobbítassék, és a nagyobbított kitevővel és a változó külzelékével osztás vitessék véghez. Hogy az 1) alatti kifejezés m-nek minden lehető értékére nézve áll, már abból következtethető, hogy a hatvány ismert külzelési szabálya minden esetre áll, akár tevőleges az m kitevő akár nemleges, akár egész, akár törtszám. Egyetlen egy esetet itt mégis ki kell vennünk, mely akkor áll elő, ha $m=-1$, ez esetben t. i. a fenebbi kifejezés átmegy $\frac{x^{-1+1}}{-1+1}=\frac{1}{0}$-ra, ez pedig állandó mennyiség levén, külzelésből nem származ hatik. A fen kimondott egészelési szabály szerint, helyesek e következő egészletek :

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C, \int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C,$$

$$\int ax^2dx=a\int x^2dx=\frac{ax^3}{3}+C$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C,$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{x}+C, \text{ s. í. t.}$$

Hasonlóképen ismeretes előttünk a külzeléki hánylatból :

$$d.logx=\frac{dx}{x}, \text{ következőleg :}$$

$$2.)\quad \int\frac{dx}{x}=logx+C,$$

mely egyenlet, mint látjuk, csak a természetes logarithmusokra nézve áll, más esetben azt még az illető modulussal kellene szorozni. Továbbá tudjuk, hogy :

$$d.a^x=a^xdxloga, \text{ következőleg :}$$

$$3.)\quad \int a^xdxloga=loga\int a^xdx=a^x+C, \text{ miből :}$$

$$4.)\quad \int a^xdx=\frac{a^x}{loga}+C,$$

és ha e iratik a helyébe, hol e a természetes logarithmusok alapszáma, tehát $loge=1$, álland :

$$5.)\quad \int e^xdx=e^x+C.$$

Ha pedig az egészelendő külzelék $e^{nx}dx$ lenne, akkor írván $nx=z$, lesz $dx=\frac{dz}{n}$, s ennek folytán :

$$6).\quad \int e^{nx}dx=\frac{1}{n}\int e^zdz=\frac{e^z}{n}+C=\frac{e^{nx}}{n}+C.$$

Továbbá ismeretes előttünk a külzeléki hánylatból, hogy :

$$d.sinx=dxcosx, \quad d.cosx=-dxsinx$$

$$d.tgx=\frac{dx}{cos^2x}, \quad d.cottx=-\frac{dx}{sin^2x}, \text{ s. í. t.}$$

ebből e következő egészletek erednek :

$$7.)\quad \int dxcosx=sinx+C, \quad \int dxsinx=-cosx+C,$$

8.) $\int\frac{dx}{cos^2x}=tgx+C,\qquad \int\frac{dx}{sin^2x}=-cottx+C,$ s. i. t.

Ha pedig az adott külzelék $dxcosnx$, vagy $dxsinnx$ volna, akkor $nx=z$ tétetvén, lesz $dx=\frac{dz}{n}$, s így álland :

9.) $\int dxcosnx=\frac{1}{n}\int dzcosz=\frac{sinz}{n}=\frac{sinnx}{n}+C,$ és

10.) $\int dxsinnx=-\frac{1}{n}\int dzsinz=-\frac{cosz}{n}=-\frac{cosnx}{n}+C.$

A külzeléki hánylatból még ismeretesek e következő kifejezések :

$$d.arc.sinx=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad d.arc.cosx=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d.arc.tgx=\frac{dx}{1+x^2}, \ldots \text{ s. i. t.}$$

ezekből tehát e következő egészletek származnak :

11.) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc.sinx+C,$

12.) $\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc.cosx+C,$

13.) $\int\frac{dx}{1+x^2}=arc.tgx+C \ldots$ s. i. t.

Ha a 11) és 13) alatti kifejezéseket összehasonlítjuk e következő egészleti kifejezésekkel :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}},\quad \text{és}\quad \int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}:$$

akkor ezen kifejezések alakjából már látható, hogy elsejének egészlete $arc.sin$, másikának egészlete pedig $arc.tg$ lesz , csak a hozzá tartozó függvény nem ismeretes, minek nyerése végett, ezen egészletek elsejét így is írhatni :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{b}\int\frac{\frac{bdx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}},$$ hol $\frac{bx}{a}=z$ tétetvén, lesz :

$\frac{bdx}{a}=dz$, s ezeknek helyettesítése adandja :

$$\frac{1}{b}\int\frac{\frac{bdx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}}=\frac{1}{b}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{b}\ arc.sinz,$$

és z helyébe értékét visszahelyezvén, lesz :

$$14.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{b}arc.sin\frac{bx}{a}+C,$$

mely egészlet, mint látjuk, általánosabb a 11) alatti egészletnél, mert ez is benne foglaltatik, minthogy $a=b=1$ tétetvén lesz :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc.sinx+C, \text{ mint előbb.}$$

Ezen általános egészletből még e következő egészletek is nyeretnek :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}arcsin\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+C, \text{ továbbá :}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc.sin\frac{x}{a}+C\ .\ .\ .\ .\ . \text{ s így t.}$$

A második egészletet illetőleg, azt még így is lehet írni :

$$\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}\int\frac{\frac{bdx}{a}}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}, \text{ hol } \frac{bx}{a}=z \text{ tétetvén, lesz :}$$

$\frac{bdx}{a}=dz$, következőleg :

$$\frac{1}{ab}\int\frac{\frac{bdx}{a}}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}=\frac{1}{ab}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{ab}arc.tgz,$$

és z helyébe értékét visszahelyezvén, lesz :

$$15.)\quad \int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}arc.tg.\frac{bx}{a}+C,$$

mely egészlet megint általánosabb a 13) alatti egészletnél, mert ebből származtathatók e következő egészletek is : összehasonlítás útján csak a^2 helyébe a; b^2 a b

$$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}arc.tg\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arc.tg\frac{x}{a}+C,\ \text{s. i. t.}$$

Az alapegészletekhez tartoznak e következő kifejezések is:

$$\int\frac{dx}{a+bx},\ \text{és}\ \int\frac{dx}{a-bx},$$

melyeket a 2) alatti alakra lehet visszavezetni, még pedig e következő helyettesítés által:

$a+bx=z$; tehát $dx=\frac{dz}{b}$, és $a-bx=u$, tehát $dx=-\frac{du}{b}$

miknek helyettesítése által kapjuk:

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{b}logz,\ \text{és}$$

$$\int\frac{dx}{a-bx}=-\frac{1}{b}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{b}logu,$$

itt pedig z és u helyébe az eredeti értékeket visszahelyezvén, lesz:

$$16.)\quad \int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}log(a+bx)+C,\ \text{és}$$

$$17.)\quad \int\frac{dx}{a-bx}=-\frac{1}{b}log(a-bx)+C.$$

Ezek meglevén, már semmi nehézséggel nem járand, e következő fontos alapegészletnek a meghatározása:

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2},$$

melynek egészelése az által elérhető, hogy az $a^2-b^2x^2$ nevezőt, két valós $(a-bx)$ és $(a+bx)$ szorzóra lehet bontani; minek folytán dx-nek együtthatóját még így is lehet írni:

$$\frac{1}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{(a+bx)(a-bx)},$$

mely törtet oly két részlet-törtre lehet bontani, melyek egyikének nevezője $(a+bx)$, másikának nevezője pedig $(a-bx)$ lesz; mi végre e következő egyenlítés szolgál:

$$\frac{1}{(a+bx)(a-bx)}=\frac{A}{a+bx}+\frac{B}{a-bx},$$

hol A és B határozatlan, de állandó együtthatók, melyeknek meghatározás ára áll:

$$-2\beta\int\frac{dz}{4\gamma^2z^2+4\alpha\gamma-\beta^2}=2\beta\int\frac{dz}{\beta^2-4\alpha\gamma-4\gamma^2z^2},$$

melynek egészlete, a 18) alatti minta szerint ez :

$$2\beta\int\frac{dz}{\beta^2-4\alpha\gamma-4\gamma^2z^2}=\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}log\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+2\gamma z}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-2\gamma z};$$

azon esetre tehát, ha $\beta^2>4\alpha\gamma$, a kérdéses egészlet leend :

$$8.)\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1}{2\gamma}log(\alpha+\beta x+\gamma x^2)+\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}$$

$$log\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+2\gamma x+\beta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-2\gamma x-\beta}+C.$$

Ha pedig végre még azon eset is tekintetbe vétetik, ha $4\alpha\gamma=\beta^2$, tehát $\beta=2\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma}$, akkor az adott egészlet így álland :

$$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\int\frac{xdx}{\alpha+2x\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma}+\gamma x^2}=\int\frac{xdx}{(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})^2},$$

melyek egészlete helyettesítés által nyeretik, és e következő :

$$\int\frac{xdx}{(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})^2}=\frac{1}{\gamma}log(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})+\frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})}+C.$$

Következik most a második egészletnek meghatározása, azaz :

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}};$$

akkor, ha itt is az előbbi esetnek megfelelő helyettesítés vitetik véghez, ezen egészlet e következő kettőre menend át :

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=2\sqrt{\gamma}\int\frac{zdz}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}}-$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dz}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}},$$

mely két egészlet megint ismeretes alakkal bír, még pedig az első helyettesítés által egészeltetvén, nyerni fogjuk :

$$2\sqrt{\gamma}\int\frac{zdz}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}}=\frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}}\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2},$$

a második egészletre pedig a 4-ik szám 19) alatti mintát alkalmazván lesz :

$$\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dz}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}}=\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}}log(2\gamma z+\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}),$$

és z helyett értékét visszahelyezve, lesz:

$$19.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}=\frac{1}{b}log(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})+C,$$

mely egészlet szinte általános, mivel e következő esetek is benne foglaltatnak:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=log(x+\sqrt{1+x^2})+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}log(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=log(x+\sqrt{a^2+x^2})+C\ldots\ldots\ldots \text{s. í. t.}$$

Még egy, igen gyakran előfordúló egészelési szabályt lehet származtatni az által, ha az 1) alatti egészletben $(a+bx^n)$ iratik x helyébe, minek folytán $nbx.^{n-1}dx$ leend irandó dx helyett, mi által e következő egészletet kapjuk:

$$\int x^{n-1}dx(a+bx^n)^m=\frac{(a+bx^n)^{m+1}}{nb(m+1)}+C,$$

mely egészlet nyilván az által is nyerhető, ha $a+bx^n=z$, tehát $x^{n-1}dx=\frac{dz}{nb}$ tétetik, mi által ezen egészlet átmegy erre:

$$\int\frac{z^m dz}{nb}=\frac{1}{nb}\int z^m dz=\frac{z^{m+1}}{nb(m+1)},$$

hol z-nek értékét visszahelyezvén, a fenebbi egészletet nyerjük. Ebből e következő egészelési szabályt lehet származtatni: Valahányszor az egészelendő kifejezés külzelékének együtthatója vagy osztója olyan, hogy annak külzeléke az adott külzeléki szorzóval ugyanaz, akkor az adott kifejezés mindig helyettesítés által egészelhető. Felvilágításul e következő példákat hozzuk elő:

(1-ső Példa.) Legyen adva $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$;

mivel itt a gyök alatti $(a+bx)$ mennyiségnek külzeléke $=bdx$, ez tehát az adott kifejezés számlálójában előfordúló külzelékkel ugyanaz, egészletének nyerése végett teendő: $a+bx=z$, lesz $dx=\frac{dz}{b}$, s így az adott egészletből lesz:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{b}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{b}\int z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{2\sqrt{z}}{b},$$

és z helyébe az eredeti értékeket visszahelyezvén, kapjuk:

$$20.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+C.$$

(2-ik Példa.) Meghatározandó e következő egészlet:

$$\int\frac{xdx}{a^2+b^2x^2};$$

itt is látjuk, hogy $a^2+b^2x^2=z$ tétetvén, lesz $xdx=\frac{dz}{2b^2}$, s ennek folytán:

$$\int\frac{xdx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{2b^2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2b^2}log z,$$

és z helyébe értékét visszatévén, lesz:

$$21.)\quad \int\frac{xdx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{2b^2}log(a^2+b^2x^2)+C.$$

(3-ik Példa.) Meghatározandó legyen: $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$;

akkor itt is tévén: $a^2+b^2x^2=z$, lesz $xdx=\frac{dz}{2b^2}$, következőleg:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}=\frac{1}{2b^2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{b^2}\sqrt{z},$$

és z helyett értékét visszahelyezvén, lesz:

$$22.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}=\frac{1}{b^2}\sqrt{a^2+b^2x^2}+C.$$

(4-ik Példa.) Legyen adva: $\int x^{n-1}dx\sqrt{a+bx^n}$,

akkor itt is teendő: $a+bx^n=z$, s lesz $x^{n-1}dx=\frac{dz}{nb}$, következőleg:

$$\int x^{n-1}dx\sqrt{a+bx^n}=\frac{1}{nb}\int dz\sqrt{z}=\frac{2}{3nb}.z^{\frac{3}{2}},$$

és z helyett értékét visszahelyezvén, lesz:

$$23.)\quad \int x^{n-1}dx\sqrt{a+bx^n}=\frac{2}{3nb}(a+bx^n)\sqrt{a+bx^n}+C,$$

mely kifejezésben ha $n=1$, nyeretni fog:

$$\int dx\sqrt{a+bx}=\frac{2}{3b}(a+bx)\sqrt{a+bx}+C\ldots\ldots \text{s. í. t.}$$

Könnyü egészelésök miatt, még e következő négy esetet hozzuk elő :

$$\int\frac{x^n dx}{a+bx},\quad \int\frac{x^n dx}{a+bx^2},\quad \int\frac{dx}{x^n(a+bx)},\quad \text{és}\quad \int\frac{dx}{x^n(a+bx^2)},$$

mely kifejezésekben felteszszük, hogy n egész tevőleges szám; akkor itt azonnal látjuk, hogy dx-nek együtthatói az első két egészletben, x-nek nem való tört függvényei, minek folytán szabad lesz azokat egyszerü osztás által egyes tagokra bontani; s így álland :

$$\frac{x^n}{a+bx}=\frac{x^{n-1}}{b}-\frac{ax^{n-2}}{b^2}+\frac{a^2x^{n-3}}{b^3}-\frac{a^3x^{n-4}}{b^4}+\ldots\ldots\frac{a^{n-1}}{b^n(a+bx)},$$

mely egyenlet mindkét részét dx-el szorozván és egészelvén, lesz :

$$\int\frac{x^n dx}{a+bx}=\frac{x^n}{nb}-\frac{ax^{n-1}}{(n-1)b^2}+\frac{a^2x^{n-2}}{(n-2)b^3}-\frac{a^3x^{n-3}}{(n-3)b^4}+\ldots\ldots$$

$$\frac{a^{n-1}}{b^{n+1}}log(a+bx).$$

Hasonlóképen áll szintén :

$$\frac{x^n}{a+bx^2}=\frac{x^{n-2}}{b}-\frac{ax^{n-4}}{b^2}+\frac{a^2x^{n-6}}{b^3}-\frac{a^3x^{n-8}}{b^4}+\ldots\ldots$$

mely osztásnál két eset fordúlhat elő, a mint t. i. n vagy páros, vagy páratlan szám; az első esetben x nélkül lesz az osztás maradéka, a második esetben azonban az osztás maradékában x is fordúl elő; s így e következő alaku vég egészletekre jutunk :

az első esetben : $c\int\frac{dx}{a+bx^2}$,

a második esetben : $c\int\frac{xdx}{a+bx^2}$,

mely egészletek, mint látjuk, már az előbbiekből ismeretesek előttünk. Így eljárván, e következő két egészletnek eredete világos lesz :

$$\int\frac{x^6dx}{a+bx^2}=\frac{x^5}{5b}-\frac{ax^3}{3b^2}+\frac{a^2x}{b^3}-\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}arc.tg.\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+C,\quad \text{és}$$

$$\int\frac{x^5dx}{a+bx^2}=\frac{x^4}{4b}-\frac{ax^2}{2b^2}+\frac{a^2}{2b^3}log(a+bx^2)+C.$$

Az utolsó két esetnek egészelését pedig úgy lehet véghez vinni, ha $x=\frac{1}{u}$ tehát $dx=-\frac{du}{u^2}$ tétetik, ennek folytán lesz:

$$\int\frac{dx}{x^n(a+bx)}=-\int\frac{u^{n-1}du}{au+b}, \quad \text{és}$$

$$\int\frac{dx}{x^n(a+bx^2)}=-\int\frac{u^n du}{au^2+b},$$

mely alakok, mint látjuk, az előbbiekkel ugyanazok, egészelésök is tehát már elvégzettnek tekintendő. Jó lesz mindazonáltal ezen eseteket megvizsgálni, ha $n=1$, s áll:

$$\int\frac{dx}{x(a+bx)}=-\int\frac{du}{au+b}=-\frac{1}{a}log(au+b),$$

és u helyébe értékét visszahelyezvén, lesz:

$$\int\frac{dx}{x(a+bx)}=-\frac{1}{a}log\frac{a+bx}{x}+C.$$

Hasonló módon lesz szintén:

$$\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}=-\int\frac{udu}{au^2+b}=-\frac{1}{a}log(au^2+b),$$

és u helyett értékét visszatéve, lesz:

$$\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}=-\frac{1}{a}log\frac{a+bx^2}{x^2}=\frac{1}{a}log\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}+C,$$

s így ezen alakok is meghatározvák.

5.) **(Háromszaku egészletek kifejtése.)** Az eddig előrebocsátott egészletek mind kétszaku egészletek voltak, mivel a külzelék együtthatója, akár mint szorzó, akár mint osztó fordúlt elő, mindig csak két tagból állt. Ezen kétszaku egészletek igen kényelmesen használhatók a háromszaku egészletek kifejtésére; ugyanis ha a 15) és 19) alatti képletekben $x+c^2$ iratik x helyébe, azután pedig rövidség okáért tétetik:

$$a^2+b^2c^4=\alpha,\quad 2b^2c^2=\beta \quad \text{és} \quad b^2=\gamma, \quad \text{miből:}$$

$$b=\sqrt{\gamma},\quad c^2=\frac{\beta}{2\gamma}, \quad \text{és} \quad a=\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\sqrt{\gamma}},$$

akkor ezeknek helyettesítése, e következő két egészletet adja:

x hel x+c² irandó
$c^2 = \frac{\beta}{2\gamma}$.

$$1).\ \int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\cdot arc.tg.\frac{2\gamma x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}+C,\quad \text{és}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}log\frac{2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{2\sqrt{\gamma}},$$

mely utolsó egészlet azonban még így is irható :

$$2.)\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}log(2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})+C,$$

mivel az állandó mennyiséget úgy is hozzá kell tenni. Ezen egészletek elseje azonban csak azon esetre áll, ha $4\alpha\gamma>\beta^2$, valamint ezen egészletek másodika csak akkor áll, ha γ tevőleges, mert ellenkező esetben mind a kettő képzetessé válik, tehát nem használható.

Hogy tehát ezen kifejezések egészlete azon esetre is meghatároztassék, ha $\beta^2>4\alpha\gamma$, és ha γ nemleges : a 14) és 18) alatti mintákban $x-c^2$ teendő x helyébe, azután pedig a 14) alatti egyenletbe rövidség okáért tenni kell :

$$a^2-b^2c^4=\alpha,\quad 2b^2c^2=\beta\quad \text{és}\quad b^2=\gamma,$$

következőleg :

$$b=\sqrt{\gamma},\quad c^2=\frac{\beta}{2\gamma}\quad \text{és}\quad a=\frac{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}{2\sqrt{\gamma}},$$

miknek helyettesítése adja :

$$3.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}arc.sin\frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}+C,$$

mely egészlet már azon esetre áll, ha γ nemleges. A 18) alatti mintába pedig tétessék :

$$b^2=-\gamma,\quad 2b^2c^2=\beta\quad \text{és}\quad a^2-b^2c^4=\alpha,\quad \text{lesz :}$$

$$b=\sqrt{-\gamma},\quad c^2=-\frac{\beta}{2\gamma},\ \text{és}\ a=\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\sqrt{\gamma}}$$

minek helyettesítése által kapjuk :

$$\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{2\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{-\gamma}\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}log\frac{\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\sqrt{-\gamma}}+\left(x+\frac{\beta}{2\gamma}\right)\sqrt{-\gamma}}{\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\sqrt{-\gamma}}-\left(x+\frac{\beta}{2\gamma}\right)\sqrt{-\gamma}},$$

miből könnyü módon nyeretik :

$$4.)\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}log\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-2\gamma x-\beta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+2\gamma x+\beta}+C,$$

mely egészlet, mint látjuk, azon esetre áll, ha $\beta^2>4\alpha\gamma$.

Hátra van még azon esetek tárgyalása, ha $4\alpha\gamma=\beta^2$ és $\gamma=0$; mivel az első esetben $\beta=2\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma}$, az illető egészlet még így is írható :

$$\int\frac{dx}{\alpha+2x\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma}+\gamma x^2}=\int\frac{dx}{(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})^2},$$

mely kifejezést mint tudjuk, helyettesítés által lehet egészelni, tévén t. i. $\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma}=z$, lesz $dx=\frac{dz}{\sqrt{\gamma}}$, s ennek folytán

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})^2}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dz}{z^2}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int z^{-2}dz=\frac{-1}{z\sqrt{\gamma}}, \text{ avagy :}$$

$$5.)\int\frac{dx}{(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})^2}=-\frac{1}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})}+C.$$

Ha pedig az illető egészletben $\gamma=0$ tétetik, nyeretni fog :

$$6.)\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}}=\frac{2}{\beta}\sqrt{\alpha+\beta x}+C.$$

mint az az előbbiekből már ismeretes előttünk :

6.) **(Egészelés helyettesítés által.)** Már az előbbiekben volt alkalmunk látni, hogy minden helyettesítés egy új változónak bevezetésében áll, mi által az adott ismeretlen alaku egészlet, ismert alakra hozatik vissza, s így könnyen egészelhető. Ezen eset fordúl elő e következő háromszaku egészletekben is :

$$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}, \quad \text{és} \quad \int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

mind a kettőt csak úgy lehet egészelni, ha az x-el ellátott tagot a nevezőből eltüntetjük, mi végre e következő helyettesítés szolgál :

$x=z-\frac{\beta}{2\gamma}$, melynek oka az egyenletek elméletéből ismeretes; ennek folytán kapjuk :

$$\gamma x^2=\gamma z^2-\beta z+\frac{\beta^2}{4\gamma}, \quad \beta x=\beta z-\frac{\beta^2}{2\gamma}, \quad \text{és} \quad \alpha=\alpha,$$

mely egyenletek összeadása által nyeretik:

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2=\frac{1}{4\gamma}(4\gamma^2z^2+4\alpha\gamma-\beta^2),$$

minek folytán a fenebbi egészletek elseje ebbe menend át:

$$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\int\frac{4\gamma\left(z-\frac{\beta}{2\gamma}\right)dz}{4\gamma^2z^2+4\alpha\gamma-\beta^2}\text{-re},$$

mely e következő két egészletre oszlik:

$$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=4\gamma\int\frac{zdz}{4\gamma^2z^2+4\alpha\gamma-\beta^2}-2\beta\int\frac{dz}{4\gamma^2z^2+4\alpha\gamma-\beta^2},$$

mely két egészlet nyilván előttünk már ismeretes alakkal bír, ugyanis $4\gamma^2=b^2$ és $4\alpha\gamma-\beta^2=a^2$ tévén, álland:

$$4\gamma\int\frac{zdz}{a^2+b^2z^2}-2\beta\int\frac{dz}{a^2+b^2z^2},$$

ezek elsejére a 4-ik szám 21) alatti, másikára pedig ugyanazon szám 15) alatti képletet alkalmazván, nyeretni fog:

$$4\gamma\int\frac{zdz}{a^2+b^2z^2}=\frac{1}{2\gamma}log(a^2+b^2z^2),\quad \text{és}$$

$$2\beta\int\frac{dz}{a^2+b^2z^2}=\frac{2\beta}{ab}arc.tg\frac{bz}{a},$$

s így az adott egészlet, z-ben kifejezve, e következő leend:

$$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1}{2\gamma}log(4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2)-$$
$$\frac{\beta}{\gamma\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}arctg\frac{2\gamma z}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}},$$

ha pedig x-ben kifejezett érték tétetik z helyébe, lesz:

7.) $$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1}{2\gamma}log(\alpha+\beta x+\gamma x^2)-$$
$$\frac{\beta}{\gamma\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}arctg\frac{2\gamma x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}+C,$$

mely egészletnek első megtekintéséből azonban látjuk, hogy ez csak azon esetre áll, ha $4\alpha\gamma>\beta^2$, ellenkező esetben ennek utolsó tagja képzetessé válik; hogy tehát ezen ellenkező eset is kellőleg tárgyaltassék, azon egészletet, melyből az említett utolsó tag nyeretett, még így is kellend írni:

$$-2\beta\int\frac{dz}{4\gamma^2z^2+4\alpha\gamma-\beta^2}=2\beta\int\frac{dz}{\beta^2-4\alpha\gamma-4\gamma^2z^2},$$

melynek egészlete, a 18) alatti minta szerint ez :

$$2\beta\int\frac{dz}{\beta^2-4\alpha\gamma-4\gamma^2z^2}=\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}log\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+2\gamma z}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-2\gamma z};$$

azon esetre tehát, ha $\beta^2>4\alpha\gamma$, a kérdéses egészlet leend :

$$8.)\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1}{2\gamma}log(\alpha+\beta x+\gamma x^2)+\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}$$

$$log\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+2\gamma x+\beta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-2\gamma x-\beta}+C.$$

Ha pedig végre még azon eset is tekintetbe vétetik, ha $4\alpha\gamma=\beta^2$, tehát $\beta=2\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma}$, akkor az adott egészlet így álland :

$$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\int\frac{xdx}{\alpha+2x\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma}+\gamma x^2}=\int\frac{xdx}{(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})^2},$$

melyek egészlete helyettesítés által nyeretik, és e következő :

$$\int\frac{xdx}{(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})^2}=\frac{1}{\gamma}log(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})+\frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})}+C.$$

Következik most a második egészletnek meghatározása, azaz :

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}};$$

akkor, ha itt is az előbbi esetnek megfelelő helyettesítés vitetik véghez, ezen egészlet e következő kettőre menend át :

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=2\sqrt{\gamma}\int\frac{zdz}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}}-$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dz}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}},$$

mely két egészlet megint ismeretes alakkal bír, még pedig az első helyettesítés által egészeltetvén, nyerni fogjuk :

$$2\sqrt{\gamma}\int\frac{zdz}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}}=\frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}}\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2},$$

a második egészletre pedig a 4-ik szám 19) alatti mintát alkalmazván lesz :

$$\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dz}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}}=\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}}log(2\gamma z+\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2z^2}),$$

mikben ha x-ben kifejezett érték tétetik z helyébe, nyeretni fog:

$$9.)\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}}$$

$$log(2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})+C.$$

Látjuk azonban, hogy ezen egészlet csak azon esetre használható, ha γ tevőleges szám, ellenkező esetben a második tag képzetessé válik; hogy tehát ezen esetre nézve is a megfelelő egészlet felállíttassék, vegyük tárgyalás alá e következő egészletet:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}},$$

melynek meghatározására tétessék:

$$x=z+\frac{\beta}{2\gamma},\quad \text{leend}\quad \alpha+\beta x+\gamma x^2=\frac{1}{4\gamma}(4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2z^2),$$

miknek helyettesítése által kapjuk:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}=2\sqrt{\gamma}\int\frac{zdz}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2z^2}}+$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dz}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2z^2}};$$

s mivel mind a kettő ismert alaku egészlet, állni fog:

$$2\sqrt{\gamma}\int\frac{zdz}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2z^2}}=-\frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}}\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2z^2},\ \text{és}$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dz}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2z^2}}=\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}}arc.sin\frac{2\gamma z}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}},$$

mely értékek ha összeadatnak, egyszersmind pedig x-ben kifejezett érték tétetik z helyébe, nyeretni fog:

$$10.)\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}=-\frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}+$$

$$\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}}arcsin\frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}+C.$$

Hogy pedig az itten előfordúló *arc.sin*, *arc.tg*-re változtassék át, czélszerü lesz e következő képletnek alkalmazása:

$$arc.sin u=arc.tg\frac{u}{\sqrt{1-u^2}},\quad \text{hol } u=\frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}} \text{ tétetvén, lesz:}$$

11.) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}=-\frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}+\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}}$$
$$arc.tg.\frac{2\gamma x-\beta}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}+C,$$
mely egészlet a kérdéses esetnek megfelel.

Ha végre $\gamma=0$, akkor egészletünk e következőbe megy át:
$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x}},$$
melynek egészelése végett tétessék: $\alpha+\beta x=u^2$, lesz $x=\frac{u^2-\alpha}{\beta}$ tehát $dx=\frac{2udu}{\beta}$, s ezeknek helyettesítése adandja:

12.) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x}}=\frac{2}{3\beta^2}(\beta x-2\alpha)\sqrt{\alpha+\beta x}+C.$$

7.) **(Némely egészletek meghatározása, lehozás útján.)** Ha a 4-ik szám 15) és 18) alatti képleteit összeadjuk és egymásból kivonjuk, akkor a kellő műtételek végbevitele után, e következő két egészletet fogjuk nyerni:

1.) $$\int\frac{dx}{a^4-b^4x^4}=\frac{1}{2a^3b}\left[log\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{a-bx}}+arctg\frac{bx}{a}\right]+C.$$

2.) $$\int\frac{x^2dx}{a^4-b^4x^4}=\frac{1}{2ab^3}\left[log\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{a-bx}}-arctg\frac{bx}{a}\right]+C.$$

Ha az 5-ik szám 2), 3) és 6) alatti egyenleteiben $\left(-\frac{1}{x}\right)$ tétetik x helyébe, mely esetben $\frac{dx}{x^2}$ lesz teendő dx helyébe, az után pedig az α, β és γ mennyiségek rendszerint γ, $-\beta$ és α-val felcseréltetnek: akkor kevés rövidítések megtörténtével, nyeretni fog e következő három új egészlet:

3.) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{-\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}arcsin\frac{\beta x-2\alpha}{x\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}+C.$$

4.) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}log\frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-2\alpha-\beta x}{x},+C,$$ és

$$5.)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{\beta x+\gamma x^2}} = -\frac{2}{\beta}\frac{\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}{x}+C.$$

Továbbá az előttünk álló 3) és 4) alatti képletekben $(1+x)$-t irván x helyébe, az után a 3) képletben $(-\alpha'+\beta'-\gamma')$-t α helyébe, $(\beta'-2\gamma')$-t β helyébe, és γ'-et γ helyébe, a 4) képletben pedig $(\alpha'-\beta'+\gamma')$ α helyébe tétetvén, nyeretni fog e következő két egészlet:

$$6.)\quad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{v}} arc.sin \frac{A-Cx}{(1+x)\sqrt{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}}+C,$$

a hol rövidség okáért tétetett:
$-\alpha'+\beta'-\gamma'=v,\quad 2\alpha'-\beta'=A,$ és $2\gamma'-\beta'=C$, továbbá:

$$7.)\quad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{-v}} log \frac{A-Cx-2\sqrt{-v}\sqrt{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2}}{1+x}+C.$$

A 6) alatti egészlet még úgy is elö állítható, hogy *arc.sin* helyébe *arc.tg* hozatik be, még pedig e képlet szerint:

$$arc.sin u = arc.tg. \frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

hol ha $u=\dfrac{A-Cx}{(1+x)\sqrt{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}}$ tétetik, nyeretni fog:

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{A-Cx}{2\sqrt{v}\sqrt{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2}},$$

minek helyettesítése által kapjuk:

$$8.)\quad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{v}} arc.tg \frac{A-Cx}{2\sqrt{v}\sqrt{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2}}+C.$$

Ezen eljárást folytatván, a 7) és 8) alatti képletekben $\dfrac{bx}{a}$ tétessék x helyébe, lesz dx annyi mint $\dfrac{bdx}{a}$; azután pedig

$\frac{\alpha}{a^2}$ α' helyébe, $\frac{\beta}{ab}$ β' helyébe, és $\frac{\gamma}{b^2}$ γ' helyébe tétetvén, nyeretni fog :

$$9.)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{v}} arc.tg. \frac{A-Cx}{2\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} + C. \text{ és}$$
$$10.)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{-v}} log \frac{A-Cx-2\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{a+bx},$$

hol rövidség okáért tétetett :

$$2\alpha b-\beta a=A,\quad 2\gamma a-\beta b=C,\quad \text{és}\quad -\alpha b^2+\beta ab-\gamma a^2=v;$$

ezen képletek egyike tehát akkor alkalmazható, ha v tevőleges, másika pedig akkor, ha v nemleges.

Ha az utolsó két egészletben $\beta=0$ tétetik, mely esetben lesz : $A=2\alpha b$, $C=2\gamma a$, és $v=-\alpha b^2-\gamma a^2$, mit $-v$-nek nevezvén, e következő két új egészlet jövend létre :

$$11.)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{-v}} arc.tg. \frac{\alpha b-\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} + C, \quad \text{és}$$
$$12.)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{v}} log \frac{\alpha b-\gamma ax-\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{a+bx} + C;$$

e képletekben pedig $-x$-et írván x helyébe, tehát $-dx$-et dx helyébe, nyeretni fog :

$$13.)\quad \int \frac{dx}{(a-bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = -$$
$$\frac{1}{\sqrt{-v}} arc.tg. \frac{\alpha b+\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} + C, \quad \text{és}$$
$$14.)\quad \int \frac{dx}{(a-bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = -$$
$$\frac{1}{\sqrt{v}} log \frac{\alpha b+\gamma ax-\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{a-bx} + C.$$

Továbbá a 11) és 13) alatti képleteket összeadván, lesz :

$$\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{-v}}\left[arc.tg.\frac{\alpha b-\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}-arc.tg.\frac{\alpha b+\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}\right];$$

mely kifejezésnek rövidítésére jó leend, az itt előfordúló *arc. tg*-sek különbségét egybe-vonni, mi végre tétessék :

$$arctgm=\varphi,\ arctgn=\psi,\ \text{lesz}\ arctgm-arctgn=\varphi-\psi;$$

mivel pedig áll :

$$tg(\varphi-\psi)=\frac{tg\varphi-tg\psi}{1+tg\varphi tg\psi}=\frac{m-n}{1+mn},\ \text{következőleg :}$$

$$arc.tgm-arc.tgn=arc.tg.\frac{m-n}{1+mn},$$

itt pedig :

$$\frac{\alpha b-\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=m,\ \text{és :}\ \frac{\alpha b+\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=n$$

tétetvén, nyeretni fog :

$$arc.tg\frac{\alpha b-\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}-arc.tg.\frac{\alpha b+\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$arc.tg.\frac{2ax\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{\alpha a^2+(\alpha b^2+2\gamma a^2)x^2},$$

s ennek folytán lesz :

$$15.)\quad\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{-v}}arc.tg.\frac{2ax\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{\alpha a^2+(\alpha b^2+2\gamma a^2)x^2}+C.$$

Ezen *arc.tg.* azonban még tovább is rövidíthető; tudván t. i. azt, hogy :

$$tg2m=\frac{2tgm}{1-tg^2m},\quad \text{lesz :}\quad 2m=arc.tg\frac{2tgm}{1-tg^2m},$$

s tévén $tgm=u$, tehát $m=arc.tgu$, lesz még :

$$2arc.tgu=arc.tg\frac{2u}{1-u^2},$$

hol $u=\dfrac{x\sqrt{-v}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}$ tétetvén, nyeretni fog :

$$\frac{2u}{1-u^2}=\frac{2ax\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{\alpha a^2+(\alpha b^2+2\gamma a^2)x^2},$$

s ennek folytán állni fog szinte :

$$16.)\quad \int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{a\sqrt{-v}}arc.tg.\frac{x\sqrt{-v}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

Ha most a 12 és 14) alatti képleteket összeadjuk, lesz :

$$17.)\quad \int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{v}}log\frac{(\alpha b-\gamma ax-\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2})(a-bx)}{(\alpha b+\gamma ax-\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2})(a+bx)}+C;$$

ebben az egyenletben pedig $-b$-t tévén b helyébe, és az igy nyert egyenletet a 17) egyenlethez adván, nyeretni fog:

$$18.)\quad \int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{4a\sqrt{v}}log\frac{\alpha a^2+Bx^2+2ax\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{\alpha a^2+Bx^2-2ax\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C,$$

hol $B=\alpha b^2-2\gamma a^2$. Ezen utolsó egészlet még rövidebb alakban előállítható, ha észreveszszük, hogy áll :

$$\alpha a^2+Bx^2+2ax\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}=(x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2})^2, \text{ és}$$

$$\alpha a^2+Bx^2-2ax\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}=(x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2})^2$$

mert ennek helyettesitése e következő kifejezésre vezet :

$$19.)\quad \int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{v}}log\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

Ha a 16) alatti képletben először α, azután pedig γ nemlegesnek vétetik, e következő két képlet fog nyeretni :

$$20.)\quad \int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{a\sqrt{v'}}arctg\frac{x\sqrt{v'}}{a-\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C, \text{ és}$$

$$21.)\quad \int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{a\sqrt{-v'}}\,arctg\frac{x\sqrt{-v'}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C,$$

hol $v'=\alpha b^2-\gamma a^2$, és $-v$-nek előbbi értékéből az által ered, hogy α nemlegesnek vétetik; ha pedig γ nemlegessé válik, akkor $\gamma a^2-\alpha b^2=-v'$ fog nyeretni.

Hasonló módon pedig a 19) alatti képletben először α azután γ nemlegesnek vétetvén, e következő két képlet eredend:

$$22.)\quad \int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{-v'}}\,log\frac{x\sqrt{-v'}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-v'}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C, \text{ és}$$

$$23.)\quad \int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{v'}}\,log\frac{x\sqrt{v'}+a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}{x\sqrt{v'}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.$$

Ha a 16), 20) és 21), azután pedig a 19), 22) és 23) alatti képletekben $b\sqrt{-1}$ tétetik b helyébe, akkor e következő hat új egészletre fogunk jutni:

$$24)\quad \int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{v'}}\,arc.tg\frac{x\sqrt{v'}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

$$25)\quad \int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{v}}\,arc.tg\frac{x\sqrt{v}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.$$

$$26)\quad \int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{-v}}\,arc.tg\frac{x\sqrt{-v}}{a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

$$27)\quad \int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{-v'}}\,log\frac{x\sqrt{-v'}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-v'}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.$$

$$28)\quad \int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{-v}}\,log\frac{x\sqrt{-v}+a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}{x\sqrt{-v}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.$$

$$29)\quad \int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{v}}\,log\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

A 19) és 24) alatti egyenletek összeadása és kivonása által, e következő két új egészletet fogjuk kapni:

$$30)\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{v}}log\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+$$

$$\frac{1}{2a^3\sqrt{v'}}arc.tg\frac{x\sqrt{v'}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

$$31)\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{v}}log\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}-$$

$$\frac{1}{2ab^2\sqrt{v'}}arc.tg\frac{x\sqrt{v'}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

Továbbá, a 23) és 25) alatti képletek összeadása és kivonása által nyeretni fog e következő két egészlet:

$$32)\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{v'}}log\frac{x\sqrt{v'}+a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}{x\sqrt{v'}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+$$

$$\frac{1}{2a^3\sqrt{v}}arc.tg\frac{x\sqrt{v}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C,$$

$$33)\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{v'}}log\frac{x\sqrt{v'}+a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}{x\sqrt{v'}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}-$$

$$\frac{1}{2ab^2\sqrt{v}}arc.tg\frac{x\sqrt{v}}{a\sqrt{a-\gamma x^2}}+C.$$

Végre a 20) és 26) alatti képletek összeadása és kivonása által kapjuk:

$$34)\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{v}}log\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+$$

$$\frac{1}{2a^3\sqrt{v'}}arc.tg\frac{x\sqrt{v'}}{a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

$$35)\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{v}}log\frac{x\sqrt{v}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+$$

$$\frac{1}{2ab^2\sqrt{v'}}arc.tg\frac{x\sqrt{v'}}{a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

Mind a hat most lehozott képlet azonban csak azon esetre használható, ha v' tevőleges mennyiség, azaz ha $\alpha b^2>\gamma a^2$. Az ellenkező esetben, ha t. i. $\gamma a^2>\alpha b^2$, v' mennyiség tehát nemleges, akkor az ezen esetnek megfelelö képletek e következö módon nyerhetők :

A 19) és 27) alatti képletek adassanak össze és vonassanak ki egymásból, akkor e következö két egyenletet fogjuk kapni :

$$36)\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{v}}log\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+$$

$$\frac{1}{4a^3\sqrt{-v'}}log\frac{x\sqrt{-v'}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-v'}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C,$$

$$37)\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{v}}log\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+$$

$$\frac{1}{4ab^2\sqrt{-v'}}log\frac{x\sqrt{-v'}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-v'}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

A 21) és 25) alatti képletek összeadása és kivonása által pedig, e következő egészletek nyeretnek :

$$38)\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{2a^3\sqrt{-v'}}arctg\frac{x\sqrt{-v'}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+$$

$$\frac{1}{2a^3\sqrt{v}}arctg\frac{x\sqrt{v}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.$$

$$39)\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{2ab^2\sqrt{-v'}}arctg\frac{x\sqrt{-v'}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}-$$

$$\frac{1}{2ab^2\sqrt{v}}arctg\frac{x\sqrt{v}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.$$

Végre a 22) és 29) alatti egyenletek összeadása és kivonása e következő egyenleteket adja :

$$40)\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=$$

$$\frac{1}{4a^3\sqrt{-v'}}log\frac{x\sqrt{-v'}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-v'}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+$$

$$\frac{1}{4a^3\sqrt{v}}log\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C.$$

$$41) \int \frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}} =$$

$$\frac{1}{4ab^2\sqrt{-v'}} log \frac{x\sqrt{-v'}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-v'}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}} +$$

$$\frac{1}{4ab^2\sqrt{v}} log \frac{x\sqrt{v}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}} + C.$$

OKSZERÜTLEN FÜGGVÉNYEK EGÉSZELÉSE.

8.) Már az előbbiekben megemlítetett, hogy okszerütlen külzeléki függvények alatt azokat kell érteni, melyekben el nem tüntethető gyökmennyiség fordúl elő. Csak kevés okszerütlen függvény létezik, melyeknek egészlete zárt alakban meghatározható, mivel nem minden adott okszerütlen függvény nyeretett külzelés által. Már e következő egészletet megtekintvén :

$$\int \frac{Xdx}{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^3)^{\frac{1}{2}}},$$

látjuk, hogy ennek egészelése nem csekély nehézségekkel jár, ámbár benne csak a második gyök fordúl elő, X alatt x-nek valamely függvényét értvén. Itt tehát csak a legkönnyebb eseteket fogjuk tárgyalni, melyek vagy okszerüvé tétetnek; vagy ismert alakokra visszahozatnak. E következő esetek tárgyalásából az itten követendő eljárás világos lesz :

(1-ső eset.) Meghatározandó legyen e következő egészlet :

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}, \text{ akkor itt teendő :}$$

$\sqrt{a+bx}=z$ avagy $a+bx=z^2$, következőleg :

$$dx=\frac{2zdz}{b}, \text{ és } x=\frac{z^2-a}{b},$$

minek helyettesítése adja :

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b^3}\int (z^2-a)^2dz = \frac{2}{b^3}\int z^4dz - \frac{4a}{b^3}\int z^2dz + \frac{2a^2}{b^3}\int dz$$

$$= \frac{2z^5}{5b^3} - \frac{4az^3}{3b^3} + \frac{2a^2z}{b^3},$$

x-nek függvényében tehát leend:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{5b^3}(a+bx)^{\frac{5}{2}}-\frac{4a}{3b^3}(a+bx)^{\frac{3}{2}}+\frac{2a^2}{b^3}(a+bx)^{\frac{1}{2}}+C;$$

ez esetben tehát látjuk, hogy a fen tett helyettesítés által, az adott egészletből az okszerütlenség eltüntetett.

(2-ik eset.) Adva legyen: $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$,

akkor ugyanazon helyettesítést használván, mint az előbbi esetben, ezen egészlet e következőbe megy át:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=2\int\frac{dz}{z^2-a},$$

mely már ismert alak, mert ha dz-nek szorzóját igy irjuk: $\frac{1}{(z+\sqrt{a})(z-\sqrt{a})}$, és azt részlet-törtekre bontjuk, vagy ha ik, reá a 18) alatti képletet alkalmazzuk, lesz:

$$2\int\frac{dz}{z^2-a}=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{z-\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}}$$

és x-nek függvényében:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C.$$

Hasonló módon járván el e következő hasonló egészlettel is:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}},$$

e következő okszerü egészlet fog nyeretni:

$$2\int\frac{dz}{(z^2-a)^2},$$

melynek egészelését később fogjuk látni.

(3-ik eset.) Ha ezen már tárgyalt egészlet adatnék:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

akkor az okszerüvé tétetik, e következő helyettesítés által: $\sqrt{a+bx^2}=z-x\sqrt{b}$, minek folytán nyeretik:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}log(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})+C.$$

(4-ik eset.) Meghatározandó legyen e következő egészlet:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

akkor itt, az okszerütlenség eltüntetése végett, e következő helyettesítés használandó:

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=t-x\sqrt{c},\text{ s lesz :}$$

$$a+bx+cx^2=t^2-2tx\sqrt{c}+cx^2,\text{ miből :}$$

$$x=\frac{t^2-a}{b+2t\sqrt{c}},\text{ következőleg :}$$

$$dx=\frac{2dt(t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c})}{(b+2t\sqrt{c})^2},\text{ továbbá :}$$

$$t=x\sqrt{c}+\sqrt{a+bx+cx^2},\text{ végre :}$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c}}{b+2t\sqrt{c}};$$

mind ezeknek helyettesítése pedig adja:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\int\frac{2dt}{b+2t\sqrt{c}},$$

mely egészlet már ismeretes előttünk, áll ugyanis:

$$\int\frac{2dt}{b+2t\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{c}}log(b+2t\sqrt{c}),$$

és t helyett x-ben kifejezett értéket tévén, lesz:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}log(b+2cx+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C,$$

mint ez fen már meg volt találva.

Kissé másképp kell eljárni, ha e következő egészletnek meghatározásáról volna szó:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}},$$

ez esetben t. i. teendő:

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=xt-\sqrt{a},\text{ tehát :}$$

$$b-cx=xt^2-2t\sqrt{a},\text{ miből :}$$

$$x=\frac{b+2t\sqrt{a}}{t^2+c},\text{ és }dx=\frac{2dt(c\sqrt{a}-bt-t^2\sqrt{a})}{(t^2+c)^2},\text{ továbbá :}$$

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=-\frac{c\sqrt{a}-bt-t^2\sqrt{a}}{t^2+c},\text{ végre :}$$

$$t=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+bx-cx^2}}{x},$$

mind ezeknek helyettesítése pedig adja :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=-2\int\frac{dt}{t^2+c}=-\frac{2}{\sqrt{c}}arctg\frac{t}{\sqrt{c}},$$

és t helyébe értékét viszahelyezve, lesz :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=-\frac{2}{\sqrt{c}}arctg\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+bx-cx^2}}{x\sqrt{c}}+C.$$

(5 ik eset.) Adva van e következő egészlet :

$$\int dx\sqrt[n]{\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}},$$

melyet okszerüvé lehet tenni e következő helyettesítés által :

$$\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}=t^n,\ \text{lesz :}\ \ x=\frac{\alpha t^n-a}{b-\beta t^n},\ \text{tehát :}$$

$$dx=\frac{xt^{n-1}dt(\alpha b-a\beta)}{(b-\beta t^n)^2},$$

minek helyettesítése által kapjuk :

$$\int dx\sqrt[n]{\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}}=n(\alpha b-a\beta)\int\frac{t^n.dt}{(b-\beta t^n)^2},$$

mely alak, minthogy már okszerü, könnyen egészelhető. Ha például $n=2$ tétetik, lesz :

$$\int dx\sqrt{\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}}=2(\alpha b-a\beta)\int\frac{t^2.dt}{(b-\beta t^2)^2},$$

melynek egészelését később fogjuk látni.

(6-ík eset.) Meghatározandó e következő egészlet :

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{r}},$$

hol $\frac{p}{r}$ való törtnek tekintendő. Ezen egészlet több de nem minden esetben okszerüvé tehető, mely esetek megvizsgálására tétessék :

$$a+bx^n=z^r,\ \text{lesz :}\ \ x=\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\ \text{következőleg :}$$

$$dx=\frac{r}{nb}z^{r-1}dz\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1},\ \text{miknek helyettesttése adja :}$$

$$\alpha.)\quad \int x^{m-1}.dx(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}=\frac{r}{nb}\int z^{p+r-1}dz\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}},$$

mely kifejezés figyelmes megtekintéséből látjuk, hogy az okszerüvé válik azon esetre, ha $\frac{m}{n}$ egész szám. Még egy eset van azonban, melyben az adott egészlet okszerüvé tehető, ugyanis ezen egészletet még így is szabad írni :

$$\int dx.x^{m+\frac{nr-1}{p}}(b+ax^{-n})^{\frac{p}{r}},$$

ezen egészlet pedig, az épen előrebocsátott eset szerint, okszerüvé válik akkor, ha $\frac{m+\frac{nr}{p}}{n}=\frac{m}{n}+\frac{p}{r}$ egész szám. Legyen adva például :

$$\int x^3dx\sqrt{a^2-x^2},$$

akkor ezt a fenebbi α) egyenlettel összehasonlítván, áll : $m-1=3$. tehát $m=4$, $a=a^2$, $b=-1$, $n=2$, $p=1$ és $r=2$ következőleg :

$$\int x^3dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a^2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

(7-ik eset.) Adva legyen e következő okszerütlen egészlet :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

akkor ez ugyan nem tehető okszerüvé, de ismert alakra hozható ; ezt t. i. még így is szabad irni :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}},$$

hol $a-x=u$ tétetvén, leend : $dx=-du$, következőleg :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}=-\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=arc.cos\frac{u}{a},$$

és x-nek függvényében :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=arc.cos\frac{a-x}{a}+C.$$

(8-ik eset.) Meghatározandó e következő egészlet :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}},$$

akkor ezt még így is szabad írni : $\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha x}}$, ha t. i. $\frac{b}{c}=\alpha$, s ennek folytán álland szinte :

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha x}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha x+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{4}}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}}},$$

itt pedig $x+\frac{\alpha}{2}=u$ tétetvén, lesz $dx=du$, következőleg:

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha x}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-\frac{\alpha^2}{4}}}=$$ a 19 Képlet

$$\frac{1}{\sqrt{c}}log\left(u+\sqrt{u^2-\frac{\alpha^2}{4}}\right),$$

x-nek függvényében tehát :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}log(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{bx+cx^2})+C,$$

mely alkalommal $-\frac{1}{\sqrt{c}}log2c$ mint állandó mennyiség kihagyatott.

(9-ik eset.) Határoztassék meg e következő egészlet :

$$\int\frac{dx}{(c+dx)\sqrt{a+bx}},$$

az okszerütlenség eltüntetése végett czélszerü leend tenni :

$$a+bx=u^2,\ \text{lesz}\ x=\frac{u^2-a}{b}\quad\text{és}\quad dx=\frac{2udu}{b},\ \text{tehát :}$$

$$\int\frac{dx}{(c+dx)\sqrt{a+bx}}=2\int\frac{du}{\alpha+u^2},$$

hol $\alpha=bc-ad$, s mivel ennek egészlete $=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}arc.tg.\frac{u}{\sqrt{\alpha}}$, lesz :

$$\int\frac{dx}{(c+dx)\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{\sqrt{bc-ad}}arc.tg\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{bc-ad}}+C,$$

mely egészlet azonban csak azon esetre áll, ha $bc>ad$, ellenkező esetben az képzetessé válik. Hogy tehát ezen esetre nézve is a kérdéses egészlet állítassék elő, a fennebbi kifejezés még így is írható :

$$\int\frac{dx}{(c+dx)\sqrt{a+bx)}}=-2\int\frac{du}{\alpha'-u^2},$$

hol $\alpha'=ad-bc$, ennek egészlete pedig e következő :

$$-2\int\frac{du}{\alpha'-u^2}=-\frac{1}{\sqrt{\alpha'}}log\frac{\sqrt{\alpha'}+u}{\sqrt{\alpha'}-u},$$

x-nek függgvényében tehát :

$$\int\frac{dx}{(c+dx)\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{ad-bc}}log\frac{\sqrt{ad-bc}-\sqrt{a+bx}}{\sqrt{ad-bc}+\sqrt{a+bx}}+C.$$

OKSZERÜ VALÓ TÖRT FÜGGVÉNYEK SZÉTBONTÁSA RÉSZLET-TÖRTEIKRE.

9.) **(Általános észrevétel.)** Nem gyéren fordúl elő olyféle külzeléki függvények egészelése, melyekben a változó külzelékének együtthatója egy okszerü való tört függvény, mely alatt olyat kell érteni, melyben a változó legnagyobb kitevője a számlálóban minden esetre kisebb, ugyanazon változó legnagyobb kitevőjénél a nevezőben. Ilyféle egészletek általános alakja tehát ez :

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\frac{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots+lx+m}{Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Lx+M}.dx,$$

hol tehát $m>n$ és x-nek kitevői mind egész számok. Ha e kifejezésben $m=2$, tehát n egységnél nem nagyobb: akkor a nevezőben előforduló sokszak, másod foku függvénynek nevezetik, milyenek egészelését már az előbbiekben láttuk. Itt tehát csak azon esetekről lesz szó, ha a nevezőben előforduló sokszak magasb foku függvényt állít elő; ez esetben pedig az egészelés másképen nem vihető véghez, mint csak úgy, ha az említett nevező, mint magasb foku függvény, egyszerü szorzóira bontatik szét, mely szorzók mindegyikében tehát, a változó csak az első hatványon fordúl elő, mert ennek megtörténte után, lehetséges lesz, az így nyert tört függvényt annyi részlet-törtekre bontani, a hány egyszerü szorzó fordúl elő a nevezőben, mi által, mint könnyü belátni, az adott függvény egészelése már lehetségessé vált. Itt azonban okvetlen szükséges, hogy valósak legyenek mind azon egyszerü szorzók, melyekre a nevező szétbontatott; mert képzetes szorzók, minthogy képzetes egészletre is vezetnek, nem használhatók, és ha olyanok fordúlnának elő, akkor tudjuk, hogy azok csak páronként fordúlhatnak elő, és hogy a szorzók ily képzetes párjának szorzata, mindig egy valós másod foku szorzat. Ez esetben tehát az adott tört függvény, oly részlet-törtekre leend bontandó, melyeknek nevezői, másod foku függvények. Itt tehát legelőször az első eset leend megvizsgálandó, minek lényege e következő:

10.) A szétbontandó függvény legyen $=\frac{F(x)}{f(x)}$, hol tehát $f(x)$ magasb foku mint $F(x)$, minthogy ellenkező esetben egyszerü osztás által lehetséges volna, az egészeket az adott függvénytől elválasztani, és a maradék nyilván egy okszerü való tört függvény lenne, melynek szétbontása előveendő. Vegyük föl továbbá, hogy $f(x)$ nevező az $(x-a)$ alaku egyszerü szorzót m-szer foglalja magában, a többi nem egyenlő szorzók szorzata pedig $f'(x)$ által jelöltessék ki; akkor nyilván állnia kell e következő egyenletnek:

$$f(x)=(x-a)^m . f'(x).$$

Ha már most A alatt egy állandó számot értünk, helyesnek kellend lenni e következő kifejezésnek:

$$1.)\quad \frac{F(x)}{(x-a)^m . f'(x)}=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{F(x)-Af'(x)}{(x-a)^m f'(x)},$$

miről meg lehet győződni, ha a jobb oldalon levő két tagot közös nevezőre hozzuk. Ha már most azt akarnók, hogy ezen egyenlet jobb része második tagjának nevezőjében $(x-a)$ szorzó csak az $(m-1)$-ik hatványon fordúljon elő, akkor a $F(x)-Af'(x)$ számlálónak $(x-a)$-val maradék nélkül oszthatónak kell lenni, azaz, ha benne $x=a$ tétetik, $F(a)-Af'(a)$-nak elenyészőnek kellend lenni, mi állván, nyeretik:

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)};$$

miből látjuk, hogy A-nak állandó számnak kell lenni, még pedig véges számnak, mivel $f'(a)$ nem lehet elenyésző. Ha tehát $F'(x)$ azon hányados, mely ered, ha $F(x) - Af'(x)$ függvényt $(x-a)$-val elosztjuk, állni fog:

$$F(x) - Af'(x) = (x-a)F'(x),$$

s ennek folytán helyes lesz még e következő egyenlet is:

$$2.)\quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{F'(x)}{(x-a)^{m-1}f'(x)};$$

miből tehát látjuk, hogy ha $f(x)=0$ egyenlet m-szeres $x=a$ gyökkel bír, úgy hogy $f(x)=(x-a)^m f'(x)$, akkor az adott tört $\frac{F(x)}{f(x)}$ függvény mindig azon alaku két törtre bontható, milyent a 2) alatti egyenletben találtunk, melyben A állandónak értéke $\frac{F(a)}{f'(a)}$ által adatik.

Ugyanazon tétel nyilván az okszerü $\frac{F'(x)}{(x-a)^{m-1}f'(x)}$ törtre is leend alkalmazható, s így ez szintén e következő két törtre bontható:

$$\frac{A'}{(x-a)^{m-1}} + \frac{F''(x)}{(x-a)^{m-2}f'(x)},$$

hol $F''(x)$ megint egy egész okszerü függvény, A' pedig egy állandó, melynek értéke, mint előbb, $\frac{F'(a)}{f'(a)}$ által van adva.

Ezen okoskodást folytatván, könnyü belátni, hogy

$$\frac{F''(x)}{(x-a)^{m-2}f'(x)}$$

függvény megint e következő alaku két részre bontható:

$$\frac{A''}{(x-a)^{m-2}} + \frac{F'''(x)}{(x-a)^{m-3}f'(x)} \;\ldots\ldots \text{s. i. t.}$$

Ha tehát ezen értékeket egymásba helyettesítjük, e következő általános szétbontási egyenlet fog nyeretni:

$$2.)\ \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^m f'(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A'}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A''}{(x-a)^{m-2}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{A^{m-1}}{x-a} + \frac{F^m(x)}{f'(x)}.$$

hol tehát A, A', A'' ..... A^{m-1} mind állandó mennyiségek, $F^{m}(x)$ pedig x-nek egész okszerü függvénye. Azon esetre, ha $f'(x)$ állandó szám volna, akkor $F^{m}(x)$ egész okszerü függvény leend, s így $\frac{F(x)}{f(x)}$ tört, bizonyos számu részlet-törtekre és egy egész függvényre lenne bontható, mi annak a jele, hogy az adott tört nem való tört függvény.

Feltévén továbbá, hogy az adott tört függvénynek nevezője még az $(x-b)$ szorzót is n-szer foglalja magában, azaz, hogy $f(x)=0$ egyenletben az $x=b$ gyök n-szer fordúl elő, akkor nyilván állnia kell:

$$f'(x)=(x-b)^{n}f''(x),$$

hol tehát $f''(x)$ az $(x-b)$ szorzót többé nem foglalja magában. Ez által a fenebbi $\frac{F^{m}(x)}{f'(x)}$ tört, e következő alakot ölti:

$$\frac{F^{m}(x)}{f'(x)}=\frac{F^{m}(x)}{(x-b)^{n}f''(x)}=\frac{B}{(x-b)^{n}}+\frac{B'}{(x-b)^{n-1}}+\frac{B''}{(x-b)^{n-2}}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{B^{n-1}}{x-b}+\frac{F^{n}(x)}{f''(x)},$$

s ennek folytán az eredetileg adott függvényre nézve állnia kell:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{m}}+\frac{A'}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{m-2}}+\ldots\ldots+\frac{A^{m-1}}{x-a}$$
$$+\frac{B}{(x-b)^{n}}+\frac{B'}{(x-b)^{n-1}}+\frac{B''}{(x-b)^{n-2}}+\ldots\ldots+\frac{B^{n-1}}{x-b}+\frac{F^{n}(x)}{f''(x)},$$

hol B, B', B'' ..... B^{n-1} szinte állandó mennyiségek. Ha tehát általánosan véve azt teszszük föl, hogy:

$$f(x)=(x-a)^{m}.(x-b)^{n}\ldots\ldots(x-c)^{p},$$

akkor a szétbontás egyenlete így álland:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{m}}+\frac{A'}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{m-2}}+\ldots\ldots\frac{A^{m-1}}{(x-a)}$$
$$+\frac{B}{(x-b)^{n}}+\frac{B'}{(x-b)^{n-1}}+\frac{B''}{(x-b)^{n-2}}+\ldots\ldots\frac{B^{n-1}}{x-b}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{C}{(x-c)^{p}}+\frac{C'}{(x-c)^{p-1}}+\frac{C''}{(x-c)^{p-2}}+\ldots\ldots\frac{C^{p-1}}{x-c}$$

11.) Vizsgáljuk meg most, a fenebbi 2) egyenletben előforduló A, A', A'' ..... A^{m-1} állandó mennyiségek miként meghatározandók. E végre czélszerü lesz feltenni, hogy $f(x)=0$ egyenletnek csupa különböző gyökei vannak, úgy hogy álljon:

$$f(x)=(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots,$$

ez által az előbbi szám 1) alatti egyenlet ebbe megy át:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{F(x)-A\varphi(x)}{(x-a)\varphi(x)},$$

hol $\varphi(x)$ tétetett $f'(x)$ helyébe. Itt tehát az előbbiek szerint lesz:

$$F(a)-A\varphi(a)=0, \quad \text{honnan} \quad A=\frac{F(a)}{\varphi(a)};$$

mely kifejezésben nyilván $\varphi(a)=(a-a_1)(a-a_2)\ldots$ Azonban $\varphi(a)$-nak ezen értéke még más könnyebb módon is meghatározható; mert ha $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ egyenletet külzeljük, lesz:

$$f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x),$$

hol $x=a$ tétetvén, lesz: $f'(a)=\varphi(a)$, következőleg $A=\dfrac{F(a)}{f'(a)}$;

ha tehát áll:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a_1}+\frac{A''}{x-a_2}+\ldots\ldots\ldots$$

akkor ezen részlet-törtek számlálói az által határoztatnak meg, hogy $\dfrac{F(x)}{f'(x)}$ hányadosban (hol $f'(x)$ a nevezőnek első külzeléki hányadosa) x helyébe azon gyök tétetik, mely a meghatározandó állandónak nevezőjében fordul elő. Felvilágosításul szolgáljanak e következő példák:

(1-ső Példa.) A szétbontandó függvény legyen $=\dfrac{1}{x^2-1}$, lesz $F(x)=1$, és $f(x)=x^2-1$, következőleg $f'(x)=2x$, s mivel áll, $x^2-1=(x+1)(x-1)$, tehát: $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$; lesz:

$\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{A'}{x-1}$; az előbbiek szerint tehát kapjuk:

$$A=\frac{F(-1)}{f'(-1)}=-\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad A'=\frac{F(1)}{f'(1)}=\frac{1}{2}, \text{ következőleg:}$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

(2-ik Példa.) Adva legyen e következő függvény;

$$\frac{x^2+1}{x^3-7x-6},$$

lesz $F(x)=x^2+1$, és $f(x)=x^3-7x-6$, tehát $f'(x)=3x^2-7$; s mivel az $x^3-7x-6=0$ egyenlet gyökei: $x=-1$, $x=-2$, $x=3$, honnan az $(x+1)$, $(x+2)$ és $(x-3)$ egyszerü szorzók következnek, álland még:

$$\frac{x^2+1}{x^3-7x-6}=\frac{A}{x+1}+\frac{A'}{x+2}+\frac{A''}{x-3},$$

az első számlálónak értéke tehát lesz:

$\frac{F(-1)}{f'(-1)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$, a második számláló lesz:

$\frac{F(-2)}{f'(-2)}=\frac{5}{5}=1$, végre a harmadik számláló lesz:

$\frac{F(3)}{f'(3)}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, szétbontott függvényünk tehát lesz:

$$\frac{x^2+1}{x^3-7x-6}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

(3-ik Példa.) A szétbontandó függvény legyen:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^4-4x^3-43x^2+58x+240},$$

akkor: $f(x)=x^4-4x^3-43x^2+58x+240=0$ tétetvén, ezen egyenlet gyökei leendnek: $x=-2$, $x=3$, $x=-5$, és $x=8$, következőleg az adott nevező egyszerü szorzói: $(x+2)$, $(x-3)$, $(x+5)$ és $(x-8)$, s így álland:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^4-4x^3-43x^2+58x+240}=\frac{A}{x+2}+\frac{A'}{x-3}+\frac{A''}{x+5}+\frac{A'''}{x-8};$$

mivel pedig $F(x)=3x^2-2x+1$, és $f'(x)=4x^3-12x^2-86x+58$, lesz:

$$A=\frac{F(-2)}{f'(-2)}=\frac{17}{150},\ A'=\frac{F(3)}{f'(3)}=-\frac{11}{100},\ A''=\frac{F(-5)}{f'(-5)}=-\frac{43}{156},\ A'''=\frac{F(8)}{f'(8)}=\frac{177}{640};$$

s így mind a négy számláló meg levén határozva, áll:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^4-4x^3-43x^2+58x+240}=\frac{17}{150(x+2)}-\frac{11}{100(x-3)}-\frac{43}{156(x+5)}+\frac{177}{640(x-8)}.$$

(4-ik Példa.) Adatik e következő függvény:

$$\frac{x^2}{x^3-9x^2-x+105};$$

akkor, $x^3-9x^2-x+105=0$ tétetvén, nyeretni fog:

$$x=5\,,\ x=-3 \text{ és } x=7\,,$$

a nevezőnek egyszerü szorzói tehát lesznek:

$$(x-5)\,,\ (x+3) \text{ és } (x-7)\,, \text{ s így áll:}$$

$$\frac{x^2}{x^3-9x^2-x+105}=\frac{A}{x-5}+\frac{A'}{x+3}+\frac{A''}{x-7};$$

mivel pedig:

$$F(x)=x^2 \text{ és } f'(x)=3x^2-18x-1\,,$$

nyeretni fog:

$$A=\frac{F(5)}{f'(5)}=-\frac{25}{16},\quad A'=\frac{F(-3)}{f'(-3)}=\frac{9}{80} \text{ és } A''=\frac{F(7)}{f'(7)}=\frac{49}{20},$$

s így a szétbontási eredmény e következő leend:

$$\frac{x^2}{x^3-9x^2-x+105}=\frac{9}{80(x+3)}+\frac{49}{20(x-7)}-\frac{25}{16(x-5)}.$$

Itt nem lesz felesleges megmutatni, hogy ezen együtthatók meghatározására külzelés épen nem szükséges, hanem hogy azok más módon is megtalálhatók. Ugyanis, a 2-ik példát vevén elő, áll:

$$\frac{x^2+1}{x^3-7x-6}=\frac{A}{x+1}+\frac{A'}{x+2}+\frac{A''}{x-3},$$

akkor a bal rész nevezőjét eltüntetvén, lesz;

$$x^2+1=A(x+2)(x-3)+A'(x+1)(x-3)+A''(x+1)(x+2),$$

ez pedig irányzónak (directrix) neveztetik, melyből mind a három együttható könnyü módon következtethető; ugyanis, A-nak meghatározására tétessék nevezője $x+1=0$, lesz $x=-1$, mely érték az irányzóba tétetvén, lesz:

$$2=-4A,\quad \text{miből:}\quad A=-\frac{1}{2}.$$

Hasonlóképen A'-nek meghatározására, tétessék $x+2=0$, tehát $x=-2$, mely érték az irányzóba tétetvén, lesz: $5=5A'$, miből $A'=1$.

Végre A''-nek meghatározása végett, tétessék $x-3=0$, tehát $x=3$, akkor ezen értéket az irányzóba helyezvén, lesz: $10=20A''$, miből $A''=\frac{1}{2}$, s ezek a fen megtalált értékekkel ugyanazok.

12.) Vegyük föl már most, hogy a szétbontandó $\frac{F(x)}{f(x)}$ függvény nevezője, midőn $f(x)=0$ tétetik, nem csak egyenlő, hanem egyenetlen gyököket is foglal magában, úgy hogy az $(x-a)$ szorzó benne m-szer foglaltassék, a többi egyenetlen szorzók szorzata pedig $\varphi(x)$ által legyen képviselve; akkor állnia kell:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{A'}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{m-2}}+\ldots\ldots+$$
$$\frac{A^{m-1}}{x-a}+\frac{L(x)}{\varphi(x)},$$

hol $L(x)$ egy egész okszerü függvény, ebből nyeretik:

$$F(x)=A\varphi(x)+A'(x-a)\varphi(x)+A''(x-a)^2\varphi(x)+\ldots\ldots+$$
$$A^{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x)+(x-a)^m.L(x),$$

s ez, mint látjuk, a fen már megemlített irányzó, melyben A-nak meghatározására $x=a$ tétetvén, nyeretni fog:

$$F(a)=A.\varphi(a), \text{ miből } A=\frac{F(a)}{\varphi(a)}.$$

Továbbá A'-nek meghatározására, a fenebbi irányzó külzeltessék, és első külzeléki hányadosában tétessék $x=a$, lesz:

$$F'(a)=A\varphi'(a)+A'\varphi(a),$$

mely egyenlet nyilván A'-nek meghatározására szolgál. Hogy A''-et is meg lehessen találni, az irányzónak első külzeléki hányadosa újra külzeltessék, és ennek így nyert második külzeléki hányadosában megint $x=a$ tétessék, mi által azon egyenlet fog nyeretni, melyből A'' együttható meghatározható, azaz:

$$F''(a)=A\varphi''(a)+2A'\varphi'(a)+2A''.\varphi(a),$$

melyben, mint látjuk, csak A'' ismeretlen; s i. t. Ennek felvilágosítására e következő példák szolgálhatnak:

(1-ső Példa.) A szétbontandó függvény legyen:

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}.$$

A fent megalapított törvény szerint tehát áll:

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1},$$

miből e következő irányzót kapjuk:

$$3x^2-7x+6=A+A'(x-1)+A''(x-1)^2,$$

hol A-nak meghatározására $x=1$ teendő, s nyeretni fog: $A=2$. Ez meglevén, az irányzónak első külzeléki hányadosa vétessék, s lesz:

$$6x-7=A'+2A''(x-1),$$

hol megint $x=1$ tétetvén, lesz: $A'=-1$; végre A''-nek megtalálására, az irányzó második külzeléki hányadosa veendő, s áll:

$$6=2A'', \text{ miből } A''=3; \text{ s így áll:}$$

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}.$$

Hogy ezen esetre is, a fen előhozott külzelés nélküli eljárás alkalmazható, így lehet megmutatni: Miután t. i. $x=1$ tétetvén, a fenebbi irányzóból $A=2$ nyeretett, tétessék ezen érték az irányzóba, lesz:

$$3x^2-7x+4=A'(x-1)+A''(x-1)^2,$$

ezen egyenletnek mindkét része pedig $(x-1)$-el maradék nélkül elosztható, minek megtörténtével áll:

$$3x-4=A'+A''(x-1),$$

melyben újra $x=1$ tétetvén, nyeretni fog: $A'=-1$, mely értéket az előttünk álló egyenletbe írván, lesz:

$$3(x-1)=A''(x-1), \text{ miből: } A''=3, \text{ mint előbb.}$$

(2 dik Példa.) Adva van e következő függvény:

$$\frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1};$$

itt mindenek előtt a nevező $=0$ tétetvén, lesz:

$$x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0,$$

hol könnyü meggyőződhetni, hogy ezen egyenletnek háromszoros gyöke $=+1$, és kétszeres gyöke $=-1$, s így a nevezőnek egyszerü szorzói $(x-1)^3$ és $(x+1)^2$; az egyenlítés tehát e következő lesz:

$$\frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}=$$

$$\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{A''}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1},$$

miből e következő irányzót kapjuk:

$$5-3x+6x^2+5x^3-x^4=A(x+1)^2+A'(x+1)^2(x-1)+$$
$$A''(x-1)^2(x+1)^2+B(x-1)^3+B'(x-1)^3(x+1),$$

miből, hogy A, A' és A''-nek értékei meghatároztassanak, írjuk rövidség okáért:

$B(x-1)^3+B'(x-1)^3(x+1)=L(x)$, áll még:

$$5-3x+6x^2+5x^3-x^4=A(x+1)^2+A'(x+1)^2(x-1)+$$
$$A''(x-1)^2(x+1)^2+L(x),$$

ez egyenletben pedig $x=1$ tétetvén, jobb részének minden tagja elenyészik, kivévén az elsőt, s ennek folytán áll:

$$12=4A, \text{ miből } A=3.$$

A'-nek meghatározására, az irányzó első külzeléki hányadosa lesz:

$$-3+12x+15x^2-4x^3=2A(x+1)+2A'(x+1)(x-1)+$$
$$2A''(x+1)(x-1)^2+A'(x+1)^2+2A''(x+1)^2(x-1)+L'(x),$$

ide pedig $x=1$ tétetvén, lesz:

$$20=4A+4A', \text{ miből } A'=2.$$

A''-nek meghatározására, az irányzónak második külzeléki hányadosa lesz:

$$12+30x-12x^2=2A+4A'(x+1)+2A''(x-1)^2+$$
$$2A'(x-1)+8A''(x-1)(x+1)+2A''(x+1)^2+L''(x),$$

hol újra $x=1$ tétetvén, nyeretni fog:

$$30=2A+8A'+8A'', \text{ miből } A''=1.$$

Továbbá, B és B' együtthatók meghatározására, tétessék:

$A(x+1)^2+A'(x+1)^2(x-1)+A''(x+1)^2(x-1)^2=M(x)$, áll:

$5-3x+6x^2+5x^3-x^4=B(x-1)^3+B'(x-1)^3(x+1)+M(x)$,

mely irányzóba $x=-1$ tétetvén, lesz:

$$8=-8B: \text{ miből } B=-1.$$

B'-nek meghatározására, az irányzónak első külzeléki hányadosa ez:

$$-3+12x+15x^2-4x^3=3B(x-1)^2+8B'(x-1)^2(x+1)+$$
$$B'(x-1)^3+M'(x),$$

hol megint $x=-1$ tétetvén, nyeretni fog:

$4=12B-8B'$, miből: $B'=-2$, következőleg:

$$\frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}=\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+$$
$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}.$$

13.) **(A szétbontás más esete.)** Az előrebocsátott szétbontásoknál az adott függvények nevezői mind olyanok voltak, melyeket valós egyszerü szorzókra lehetett bontani, s mivel a kijövő részlet-törteknek szintén okszerü való törteknek kell lenni, azért a számlálók mind állandó, tehát x-től független számok voltak. De azonnal megváltozik a dolog, mihelyt az adott és szétbontandó függvény nevezőjében képzetes szorzók is fordúlnak elő; ez esetben t. i. (képzetes részlet-törteket nem lehetvén használni) úgy kell történnie a szétbontásnak, hogy az adott törtnek nevezőjét, annyi való másod foku szorzókra bontjuk, a hány képzetes szorzók kapcsolt párjai foglaltatnak benne, a netalán benne előforduló valós egyszerü szorzókat külön elválasztván. Itt egyébiránt könnyen felfogható az is, hogy ha az adott okszerü törtet oly részlet-törtekre bontjuk, melyeknek nevezőiben x változó a második hatványon fordúl elő, a nevezők tehát háromszakuak, akkor ezeknek számlálóiban x-el ellátott tag is lehet, mivel az által a tört valósága nem háboríttatik meg; ezen számlálók tehát mindig $(A+Bx)$ alakban fordúlnak elő. E következő példákból az eljárás világos lesz:

(1-ső Példa.) A szétbontandó függvény legyen: $\frac{1}{x^3-a^3}$, akkor $x^3-a^3=0$ tétetvén, látjuk, hogy ezen egyenletnek $x=a$ érték megfelel, ezen harmadfoku szorzatnak egy valós szorzója tehát $(x-a)$ lesz, melylyel ha (x^3-a^3) szorzat elosztatik, e következő másodfoku szorzó fog nyeretni:

$$x^2+ax+a^2,$$

melyben a többi két első foku szorzó foglaltatik; de mivel ezen két szorzó nyilván képzetes, azért ezen másodfoku szorzónál meg kell maradnunk, és a szétbontás e következőképen lesz elintézendő:

$$\frac{1}{x^3-a^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B+Cx}{x^2+ax+a^2},$$

miből e következő irányzó egyenletet nyerjük:

$$1=A(x^2+ax+a^2)+(B+Cx)(x-a),$$

melyből a határozatlan együtthatók értékeit legkönnyebben nyerjük az által, ha ezen egyenletet 0-ra hozzuk, és a határozatlan együtthatók szabályát alkalmazzuk, ennek folytán álland:

$$0=-1+Aa^2-Ba+Aax+Bx-Cax+Ax^2+Cx^2,$$

mely egyenlet állván, külön külön is kell, hogy álljon:

$$0=-1+Aa^2-Ba,\quad Aa+B-Ca=0,\ \text{és}\ A+C=0,$$
mely három egyenletből következik:
$$A=\frac{1}{3a^2},\quad B=-\frac{2}{3a},\quad \text{és}\quad C=-\frac{1}{3a^2},$$
a kivánt szétbontásnak tehát meg leend felelve ezen egyenlet által:
$$\frac{1}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a^2(x-a)}-\frac{2}{3a(x^2+ax+a^2)}-\frac{x}{3a^2(x^2+ax+a^2)}.$$

(2-ik Példa.) Adva van e következő függvény: $\frac{1}{x^4-a^4}$, akkor $x^4-a^4=(x^2+a^2)(x^2-a^2)$ levén, az egyenlítés így álland:
$$\frac{1}{x^4-a^4}=\frac{A+Bx}{x^2-a^2}+\frac{C+Dx}{x^2+a^2},\ \text{honnan:}$$
$$1=(A+Bx)(x^2+a^2)+(C+Dx)(x^2-a^2);$$
A és B-nek meghatározására tétessék $x^2-a^2=0$, tehát $x^2=a^2$ és $x=\pm a$, lesz:

$1=2Aa^2\pm 2Ba^3$, mely egyenlet e következő kettőt adja:

$1=2Aa^2+3Ba^3$, és $1=2Aa^2-2Ba^3$, miből kapjuk:
$$A=\frac{1}{2a^2}\ \text{és}\ B=0.$$
Hasonló módon C és D-nek meghatározására, tétessék: $x^2+a^2=0$, tehát $x^2=-a^2$, és $x=\pm a\sqrt{-1}$, mit az irányzóba tévén, lesz:
$$1=-2a^2C\mp 2a^3D\sqrt{-1},\ \text{külön-külön tehát áll:}$$
$$1=-2a^2C\ \text{és:}\ \mp 2a^3D\sqrt{-1}=0,\ \text{honnan}\ C=-\frac{1}{2a^2}\ \text{és}$$
$$D=0,$$
a szétbontásnak eredménye tehát leend:
$$\frac{1}{x^4-a^4}=\frac{1}{2a^2(x^2-a^2)}-\frac{1}{2a^2(x^2+a^2)}.$$

(3-dik Példa.) Szétbontandó legyen: $\frac{x}{x^3-a^3}$, akkor áll:
$$\frac{x}{x^3-a^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B+Cx}{x^2+ax+a^2},\ \text{honnan:}$$
$$x=A(x^2+ax+a^2)+(B+Cx)(x-a),$$
miből a határozatlan együtthatók szabálya szerint nyeretik:

$$A=\frac{1}{3a},\quad B=\frac{1}{3},\ \text{és}\ C=-\frac{1}{3a},\ \text{következőleg}$$

$$\frac{x}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a(x-a)}+\frac{1}{3(x^2+ax+a^2)}-\frac{x}{3a(x^2+ax+a^2)}.$$

Hasonló módon vitetik véghez e következő függvénynek szétbontása :

$$\frac{x}{x^4-a^4}=\frac{A+Bx}{x^2-a^2}+\frac{C+Dx}{x^2+a^2},\ \text{miből}$$

$$x=(A+Bx)(x^2+a^2)+(C+Dx)(x^2-a^2),\ \text{miből:}$$

$$A=0,\quad B=\frac{1}{2a^2},\quad C=0,\ \text{és}\ D=-\frac{1}{2a^2},\ \text{s így lesz :}$$

$$\frac{x}{x^4-a^4}=\frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}-\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}.$$

Szintúgy járván el nyeretni fog szinte :

$$\frac{x^2}{x^4-a^4}=\frac{1}{2(x^2-a^2)}+\frac{1}{2(x^2+a^2)}.$$

Általánosan véve tehát, ha a szétbontandó függvény nevezője (x^n-a^n) alakban fordúlna elő, akkor mindig két esetet kell megkülönböztetnünk; n t. i. vagy páros, vagy páratlan szám lesz; az utóbbi esetben $x^n-a^n=0$ egyenletnek egy valós még pedig $x=a$ gyöke, tehát az (x^n-a^n) szorzatnak egy valós ($x-a$) szorzója leend, melylyel az adott n-dik foku szorzat maradék nélkül elosztható. Mivel pedig az $x^n-a^n=0$ egyenlet gyökei mind e következő általános képletben foglaltatnak :

$$x=a.cos\frac{2m\pi}{n}+a\sqrt{-1}sin\frac{2m\pi}{n},$$

ha ez az adott egyenlet egy gyökének vétetik, ugyanazon egyenletben még e következö alaku második gyöknek kellend előfordúlnia :

$$x=a.cos\frac{2m\pi}{n}-a\sqrt{-1}sin\frac{2m\pi}{n},$$

minthogy a képzetes gyökök mindig csak páronkint fordúlnak elő, és egy ilyféle kapcsolt párnak mindig azon tulajdonsága van, hogy összegük valós, szorzatuk is valós ; ha pedig ezen két gyökből szorzók képeztetnek, és ezen szorzók egymással szoroztatnak, nyeretni fog azon másod foku valós szorzatnak általános jelképe, milyenekre az adott nevező bontható, ez pedig e következő:

$$x^2-2ax.cos\frac{2m\pi}{n}+a^2\,;$$

így például $x^3-a^3=0$ esetre, a hozzá tartozó másod foku szorzat nyeretik, ha $m=1$ vagy $m=2$ és $n=3$ tétetik, mind két esetben kapjuk (x^2+ax+a^2), mint ez már fent előfordúlt.

14.) Vegyük föl már most, hogy a szétbontandó függvény nevezője (x^n+a^n) alakban fordúl elő; akkor $x^n+a^n=0$ tétetvén, az n kitevő itt is lehet páros vagy páratlan szám, az első esetben az adott egyenlet gyökei mind képzetesek lesznek, ez esetben tehát az x^n+a^n szorzat csak másod foku valós szorzókra lesz bontható. A második esetben pedig az x^n+a^n szorzatnak egy valós, még pedig $(x+a)$ szorzója lesz, a többi egyszerü szorzók mind képzetesek levén, szükség leend, hogy ezekből csupa másod foku valós szorzók képeztessenek. Ezen szorzók általános alakjának meghatározására tudjuk, hogy az $x^n+a^n=0$ egyenlet gyökei e következő képletből származtathatók:

$$x=a.cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+a\sqrt{-1}sin\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

ez pedig ha az adott egyenlet gyökének vétetik, benne szükségképen még e következő alaku gyök is fordúl elő:

$$x=a.cos\frac{(2m+1)\pi}{n}-a\sqrt{-1}sin\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

mely két kapcsolt képzetes gyökből szorzókat csinálván, és ezen szorzókat egymással szorozván, e következő másod foku szorzat fog nyeretni:

$$x^2-2ax.cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+a^2,$$

milyenek bizonyos számára az adott felsőbb foku függvény bontható. E következő példákból látni fogjuk az eljárást:

(1-ső Példa.) Az adott függvény legyen: $\frac{1}{x^3+a^3}$, akkor $x^3+a^3=(a+x)(x^2-ax+a^2)$ levén, álland:

$$\frac{1}{x^3+a^3}=\frac{A}{x+a}+\frac{B+Cx}{x^2-ax+a^2},\ \text{honnan}$$

$$1=A(x^2-ax+a^2)+(B+Cx)(x+a),$$

miből az ismert módon nyerjük : $A=\frac{1}{3a^2}$, $B=\frac{2}{3a}$, és

$C=-\frac{1}{3a^2}$, következőleg

$$\frac{1}{x^3+a^3}=\frac{1}{3a^2(x^2+a)}+\frac{2}{3a(x^2-ax+a^2)}-\frac{x}{3a^2(x^2-ax+a^2)}.$$

(2-ik Példa.) A szétbontandó függvény $=\frac{1}{x^4+a^4}$;

akkor tudjuk, hogy $x^4+a^4=0$ egyenletnek csupa képzetes gyökei vannak, az (x^4+a^4) szorzat tehát csak e következö két másod foku valós szorzókra lesz bontható : t. i. $(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)$ és $(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)$, s ennek folytán kell hogy álljon :

$$\frac{1}{x^4+a^4}=\frac{(A+Bx)}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}+\frac{C+Dx}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2},\text{ miből}$$

$$1=(A+Bx)(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)+(C+Dx)(x^2-ax\sqrt{2}+a^2),$$

A és B-nek meghatározására tétessék $x^2-ax\sqrt{2}+a^2=0$, lesz:

$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\pm\frac{a}{2}\sqrt{-2}$, mely érték az irányzóba tétetvén, lesz :

$\frac{1}{2a^2}=A+\frac{Ba}{\sqrt{2}}\pm\frac{2Ba\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\pm A\sqrt{-1}-\frac{Ba}{\sqrt{2}}$, tehát külön-külön :

$$\frac{1}{2a^2}=A \quad\text{és}\quad \frac{2Ba}{\sqrt{2}}+A=0,\quad\text{miből}\quad B=-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}.$$

Hasonló módon C és D-nek meghatározására tétessék :

$$x^2+ax\sqrt{2}+a^2=0,\quad\text{leend}\quad x=-\frac{a}{\sqrt{2}}\pm\frac{a}{2}\sqrt{-2},$$

minek helyettesítése az irányzóba ezt adja :

$\frac{1}{2a^2}=C-\frac{Da}{\sqrt{2}}+\frac{Da}{\sqrt{2}}\pm\frac{2Da\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\mp C\sqrt{-1}$, külön-külön tehát:

$$C=\frac{1}{2a^2},\quad\text{és}\quad D=\frac{1}{2a^3\sqrt{2}},$$

s így a szétbontott függvény lesz :

$$\frac{1}{x^4+a^4}=\frac{1}{2a^2(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)}-$$

$$\frac{x}{2a^3\sqrt{2}(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)}+\frac{1}{2a^2(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)}+$$

$$\frac{x}{2a^3\sqrt{2}(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)}.$$

(3-ik Példa.) Az adott függvény legyen : $\frac{x^2}{x^4+a^4}$, itt hasonló módon járván el, áll :

$$\frac{x^2}{x^4+a^4}=\frac{A+Bx}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}+$$

$$\frac{C+Dx}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}, \text{ miből :}$$

$$x^2=(A+Bx)(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)+(C+Dx)(x^2-ax\sqrt{2}+a^2),$$

miből nyerjük : $A=0$, $B=\frac{1}{2a\sqrt{2}}$, $C=0$, és

$D=-\frac{1}{2a\sqrt{2}}$, következőleg :

$$\frac{x^2}{x^4+a^4}=\frac{x}{2a\sqrt{2}(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)}-\frac{x}{2a\sqrt{2}(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)}.$$

15.) Ha az adott és szétbontandó függvény nevezője ugyanazon egy másod foku szorzót többször foglalna magában: akkor, mint már az előbbiekben megmutattuk, a szétbontás e következő módon lesz intézendő : Legyen adva t. i. e következő függvény :

$\frac{x^3}{(x^2+1)^3}$, akkor az egyenlítés ez lesz :

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{A+Bx}{(x^2+1)^3}+\frac{C+Dx}{(x^2+1)^2}+\frac{E+Fx}{x^2+1},$$

miből e következő irányzót kapjuk :

$$x^3=A+Bx+(C+Dx)(x^2+1)+(E+Fx)(x^2+1)^2.$$

Hogy A és B-nek értékét megtaláljuk, $x^2+1=0$ teendő, s lesz :

$x^2=-1$, tehát $x=\pm\sqrt{-1}$, minek helyettesítése adja :

$$\mp\sqrt{-1}=A\pm B\sqrt{-1}, \text{ miből } A=0 \text{ és } B=-1,$$

mely értékek az irányzóba tétetvén, e következő új irányzót nyerjük:

$$x=C+Dx+(E+Fx)(x^2+1),$$

hol megint $x=\pm\sqrt{-1}$ tétetvén, lesz: $C=0$ és $D=1$, ezen értékek pedig megint az utolsó egyenletbe tétetvén, lesz: $(E+Fx)(x^2+1)=0$ avagy: $E+Fx=0$, miből ha $x=\pm\sqrt{-1}$, nyeretik: $E=0$ és $F=0$, s így a szétbontás eredménye lesz:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{x}{(x^2+1)^3}.$$

Legyen még adva e következő függvény:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x+2)};$$

akkor az egyenlítésnek így kell állnia:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x+2)}=\frac{A+Bx}{(x^2+1)^2}+\frac{C+Dx}{x^2+1}+\frac{E}{x+2},$$

miből e következő irányzót kapjuk:

$$x^3=(A+Bx)(x+2)+(C+Dx)(x^2+1)(x+2)+E(x^2+1)^2.$$

A és B-nek meghatározására tétessék: $x^2+1=0$, lesz: $x=\pm\sqrt{-1}$, mely értéket az irányzóba tévén, lesz:

$$\mp\sqrt{-1}=(A\pm B\sqrt{-1})(2\pm\sqrt{-1}),\ \text{miből: } A=-\frac{1}{5}\ \text{és}$$

$B=-\frac{2}{5}$, mely értékeket az irányzóba tévén nyerjük:

$$x^3+\frac{2x^2}{5}+x+\frac{2}{5}=(C+Dx)(x^2+1)(x+2)+E(x^2+1)^2;$$

mivel pedig ezen egyenlet mind két része (x^2+1)-el elosztható maradék nélkül, áll szintén:

$$x+\frac{2}{5}=(C+Dx)(x+2)+E(x^2+1),$$

hol megint $x=\pm\sqrt{-1}$ tétetvén, nyerjük: $C=\frac{9}{25}$, és $D=\frac{8}{25}$, mely értékek az utolsó egyenletbe tétetvén, E-nek értéke lesz $=-8$, s így a szétbontás eredménye lesz ez:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x+2)}=\frac{-1-2x}{5(x^2+1)^2}+\frac{9+8x}{25(x^2+1)}-\frac{8}{x+2}.$$

Szétbontandó legyen még e következő tört függvény:

$$\frac{x^3}{(x^2+2x+4)^2};$$

akkor az egyenlítés így lesz intézendő :

$$\frac{x^3}{(x^2+2x+4)^2}=\frac{A+Bx}{(x^2+2x+4)^2}+\frac{C+Dx}{x^2+2x+4}, \text{ miből :}$$

$$x^3=A+Bx+(C+Dx)(x^2+2x+4),$$

mely irányzóból A és B-nek értékét úgy fogjuk nyerni, ha $x^2+2x+4=0$ tétetik, s lesz : $x=-1\pm\sqrt{-3}$, következőleg $x^3=8$, mit az irányzóba tevén, lesz : $8=A-B\pm B\sqrt{-3}$, miből $A=8$ és $B=0$, mely értékeket az irányzóba helyettesítvén áll : $x-2=C+Dx$, mely egyenletben az x fenebbi értékét tévén, nyerjük : $\pm\sqrt{-3}-3=C-D\pm\sqrt{-3}$, miből : $D=1$ és $C=-2$, s ennek folytán a szétbontás eredménye lesz :

$$\frac{x^3}{(x^2+2x+4)^2}=\frac{8}{(x^2+2x+4)^2}+\frac{x-2}{x^2+2x+4}.$$

Adva legyen még e következő tört függvény :

$$\frac{x^4-x^3+5x^2-2x+3}{(x^2-x+1)^2(x^2+1)};$$

akkor az egyenlítés így teendő fel :

$$\frac{x^4-x^3+5x^2-2x+3}{(x^2-x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A+Bx}{(x^2-x+1)^2}+\frac{C+Dx}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{E+Fx}{x^2+1},$$

miből e következő irányzót kapjuk :

$$x^4-x^3+5x^2-2x+3=(A+Bx)(x^2+1)+(C+Dx)(x^2-x+1)(x^2+1)+(E+Fx)(x^2-x+1)^2,$$

A és B-nek meghatározására tétessék : $x^2-x+1=0$, lesz : $x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$, mely érték az irányzóba tétetvén, nyerjük : $A=1$ és $B=1$, ezen értékek pedig újra az irányzóba helyeztetvén, kapjuk :

$$x^4-2x^3+4x^2-3x+2=(C+Dx)(x^2-x+1)(x^2+1)+(E+Fx)(x^2-x+1)^2,$$

mely egyenlet mind két része (x^2-x+1)-el maradék nélkül elosztható, ezen osztás végbe vitele után kapjuk :

$$x^2-x+2=(C+Dx)(x^2+1)+(E+Fx)(x^2-x+1),$$

hol ha x helyébe megint a fenebbi érték tétetik, nyerjük :

$C=-1$ és $D=1$. Végre $x^2+1=0$ tétetvén, lesz $x^2=-1$ és $x=\pm\sqrt{-1}$, minek helyettesítése az utolsó egyenletbe adja: $E=1$ és $F=1$, s így állni fog:

$$\frac{x^4-x^3+5x^2-2x+3}{(x^2-x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1+x}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1-x}{x^2-x+1}+\frac{1+x}{x^2+1}.$$

EGÉSZELÉS SZÉTBONTÁS ÚTJÁN.

16). Az okszerü és való tört külzeléki függvények leghatalmasabb egészelési módja, azoknak szétbontásában áll; mivel pedig az előbbiekben minden lehető szétbontási esetet már megmutattunk, a reá alapított egészelési mód is már könnyü lesz, melyet e következő egészelési esetekből fogunk látni.

(1-ső eset.) Meghatározandó legyen e következő egészlet:

$$\int\frac{(x^2+1)dx}{x^3-7x+6};$$

erre nézve az előbbiekben találtuk:

$$\frac{x^2+1}{x^3-7x+6}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)},$$

mely egyenlet mindkét részét dx-el szorozván és egészelvén, lesz:

$$\int\frac{(x^2+1)dx}{x^3-7x+6}=\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=log(x+2)+\frac{1}{2}log(x-3)-\frac{1}{2}log(x+1),\text{ avagy:}$$

$$\int\frac{(x^2+1)dx}{x^3-7x+6}=log(x+2)\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}+C.$$

(2-dik eset.) Egészelendő legyen e következő függvény

$$\int\frac{(3x^2-2x+1)dx}{x^4-4x^3-43x^2+58x+240};$$

erre nézve az előbbiekben találtuk:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^4-4x^3-43x^2+58x+240}=\frac{17}{150(x+2)}-\frac{11}{100(x-3)}$$

$$-\frac{43}{156(x+5)}+\frac{177}{640(x-8)},$$

mit is dx-el szorozván és egészelvén, lesz :

$$\int\frac{(3x^2-2x+1)dx}{x^4-4x^3-43x^2+58x+240}=\frac{17}{150}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{11}{100}\int\frac{dx}{x-3}-$$

$$\frac{43}{156}\int\frac{dx}{x+5}+\frac{177}{640}\int\frac{dx}{x-8}=\frac{17}{150}log(x+2)-\frac{11}{100}log(x-3)-$$

$$\frac{43}{156}log(x+5)+\frac{177}{640}log(x-8)+C,$$

mely kifejezést rövidebb alakban nem lehet írni.

(3-dik eset.) Határoztassék meg e következő egészlet :

$$\int\frac{x^2dx}{x^3-9x^2-x+105};$$

erre nézve az előbbiekben már meghatároztatott, hogy :

$$\frac{x^2}{x^3-9x^2-x+105}=\frac{9}{80(x+3)}+\frac{49}{20(x-7)}-\frac{25}{16(x-5)},$$

következőleg :

$$\int\frac{x^2dx}{x^3-9x^2-x+105}=\frac{9}{80}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{49}{20}\int\frac{dx}{x-7}-\frac{25}{16}\int\frac{dx}{x-5},$$

s így :

$$=\frac{9}{80}log(x+3)+\frac{49}{20}log(x-7)-\frac{25}{16}log(x-5),$$

a hol közös nevezőt csinálván, legrövidebben áll :

$$\int\frac{x^2dx}{x^3-9x^2-x+105}=log\sqrt[80]{\frac{(x+3)^9.(x-7)^{196}}{(x-5)^{125}}}.$$

(4-dik eset.) Adva van e következő függvény :

$$\int\frac{(3x^2-7x+6)dx}{(x-1)^3};$$

erre nézve az előbbiekből ismeretes előttünk, hogy áll :

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1},\ \text{következőleg:}$$

$$\int\frac{(3x^2-7x+6)dx}{(x-1)^3}=2\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{x-1};$$

itt azonnal látjuk, hogy az utolsó egészlet logarithmus, a többi kettő pedig helyettesítés által tárgyaltatván, nyerjük :

$$\int\frac{(3x^2-7x+6)dx}{(x-1)^3}=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+3log(x-1).$$

(5-dik eset.) Meghatározandó legyen ezen egészlet :

$$\int\frac{(5-3x+6x^2-5x^3-x^4)dx}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1};$$

akkor errenézve e következő szétbontás már ismeretes előttünk:

$$\frac{5-3x+6x^2-5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}=\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+$$
$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1},$$

minek dx általi szorzása és ezutáni egészelése adja :

$$\int\frac{(5-3x+6x^2-5x^3-x^4)dx}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}$$
$$+log\frac{x-1}{(x+1)^2}.$$

17.) Következik most azon okszerü függvények egészelése, melyeknek nevezői csak másodfoku, azaz háromszaku szorzókra bonthatók, hogy t. i. a képzetes alak elmellőztessék. Ezen egészleteket is e következő esetekben fogjuk tárgyalni :

(1-ső eset.) Meghatározandó legyen ezen egészlet :

$$\int\frac{dx}{x^3-a^3};$$

akkor tudjuk, hogy áll :

$$\frac{1}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a^2(x-a)}-\frac{2}{3a(x^2+ax+a^2)}-\frac{x}{3a^2(x^2+ax+a^2)},$$

mit dx-el szorozván és azután egészelvén, lesz :

$$\int\frac{dx}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a^2}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{2}{3a}\int\frac{dx}{x^2+ax+a^2}-\frac{1}{3a^2}\int\frac{xdx}{x^2+ax+a^2},$$

mely egészletek mind ismeretesek, mert az elsőre nézve áll :

$$\frac{1}{3a^2}\int\frac{dx}{x-a}=\frac{1}{3a^2}log(x-a),$$

a másodikra nézve, az 5-ik szám 1) alatti képletet használván, áll :

$$\frac{2}{3a}\int\frac{dx}{x^2+ax+a^2}=\frac{4}{3a^2\sqrt{3}}arctg\frac{2x+a}{a\sqrt{3}},$$

a harmadikra nézve, a 6-ik szám 7) alatti képlet alkalmazandó, s áll :

$$\frac{1}{3a^2}\int\frac{xdx}{x^2+ax+a^2}=\frac{1}{3a^2}log\sqrt{x^2+ax+a^2}-\frac{1}{3a^2\sqrt{3}}arctg.\frac{2x+a}{a\sqrt{3}},$$

mind ezeket pedig összeszedvén, nyerjük :

$$1.)\quad \int\frac{dx}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a^2}\Big[log\frac{x-a}{\sqrt{x^2+ax+a^2}}$$

$$-\sqrt{3}arc.tg.\frac{2x+a}{a\sqrt{3}}\Big]+C.$$

(2-ik eset.) Egészelendő legyen e következő kifejezés :

$$\int\frac{xdx}{x^3-a^3};$$

akkor tudjuk, hogy áll :

$$\frac{x}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a(x-a)}+\frac{1}{3(x^2+ax+a^2)}-\frac{x}{3a(x^2+ax+a^2)},$$

ha ezen egyenletet dx-el szorozzuk, és az egyes tagok egészelésénél az előbbi esetben megemlítet képleteket alkalmazzuk, nyerjük :

$$2.)\quad \int\frac{xdx}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a}\Big[log\frac{x-a}{\sqrt{x^2+ax+a^2}}+$$

$$\sqrt{3}arc.tg.\frac{2x+a}{a\sqrt{3}}\Big]+C.$$

Ha pedig a következő még ide tartozó egészlet kerestetnék :

$$\int\frac{x^2dx}{x^3-a^3},$$

akkor helyettesités által könnyen e következő eredményre jutunk :

$$3.)\quad \int\frac{x^2dx}{x^3-a^3}=\frac{1}{3}log(x^3-a^3)+C.$$

(3-ik eset.) Vegyük elő e következő egészletnek meghatározását :

$$\int\frac{dx}{x^4-a^4};$$

akkor ennek megtalálására a 7-ik szám 1) alatti képlet használandó, melyben $b=1$ tétetvén nyerjük :

$$4.)\quad \int\frac{dx}{x^4-a^4}=\frac{1}{2a^3}\Big[log\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}-arc.tg.\frac{x}{a}\Big]+C.$$

Ide tartozik még két eset, melyek elseje ez :

$\int\frac{xdx}{x^4-a^4}$, melynek egészelésére tétessék $x^2=z$, lesz :

$xdx=\frac{dz}{2}$, s ennek helyettesitése e következő egészletre fog vezetni ;

$$5). \quad \int\frac{xdx}{x^4-a^4}=\frac{1}{4a^2}log\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}+C.$$

A mi pedig a második esetet illeti, ez nyilván e következő :

$\int\frac{x^2dx}{x^4-a^4}$; ez mint látjuk a 7-dik szám 2) alatti egészlettel ugyanaz, csak $b=-1$-nek veendő, s nyerjük :

$$6). \quad \int\frac{x^2dx}{x^4-a^4}=\frac{1}{2a}\left[log\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}+arc.tg\frac{x}{a}\right]+C.$$

Végre még e következő egészlet is könnyen meghatározható :

$\int\frac{x^3dx}{x^4-a^4}$, hol $x^4-a^4=z$ tétetvén, lesz $x^3dx=\frac{dz}{4}$, tehát :

$$7). \quad \int\frac{x^3dx}{x^4-a^4}=\frac{1}{4}log(x^4-a^4)+C.$$

(4-ik eset.) Ezen esethez tartozik legelőször ezen egészlet:

$\int\frac{dx}{x^3+a^3}$, melyre nézve áll :

$$\frac{1}{x^3+a^3}=\frac{1}{3a^2(x+a)}+\frac{2}{3a(x^2-ax+a^2)}-\frac{x}{3a^2(x^2-ax+a^2)},$$

s ennek folytán áll szintén :

$$\int\frac{dx}{x^3+a^3}=\frac{1}{3a^2}\int\frac{dx}{x+a}+\frac{2}{3a}\int\frac{dx}{x^2-ax+a^2}$$
$$-\frac{1}{3a^2}\int\frac{xdx}{x^2-ax+a^2}$$

és a fen említett képleteket használván, lesz :

$$8). \quad \int\frac{dx}{x^3+a^3}=\frac{1}{3a^2}\left[log\frac{x+a}{\sqrt{x^2-ax+a^2}}+\sqrt{3}.arctg.\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right]+C.$$

(5-dik eset.) Meghatározandó legyen e következő egészlet :

$\int\frac{dx}{x^4+a^4}$; erre nézve a 14-dik szám 2-dik példája szerint kell hogy álljon :

$$\int\frac{dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}+$$

$$\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}.$$

Ha e négy egészletre az 5) és 6) szám alatt előfordúló képletek alkalmaztatnak, nyerjük:

$$\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}=\frac{1}{a^3\sqrt{2}}.arctg.\frac{2x-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}=\frac{1}{a^3\sqrt{2}}arctg.\frac{2x+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}=\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}log(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)-$$

$$\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}arc.tg\frac{2x+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}=-\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}log(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)$$

$$-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}arc.tg\frac{2x-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}},$$

miket összeszedvén, kapjuk:

$$\int\frac{dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}log\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}+$$

$$\frac{2}{4a^3\sqrt{2}}\left[arc.tg\frac{2x+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}+arctg.\frac{2x-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}\right].$$

Ennek rövidítésére jó lesz az utolsó tagban előfordúló két *arc.tg*-t egybevonni, mi végre teendő:

$$arc.tg\frac{2x+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=\varphi,\ \text{és}\ arctg.\frac{2x-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=\varphi',\ \text{s lesz:}$$

$$\frac{2x+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=tg\varphi,\ \text{és}\ \frac{2x-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=tg\varphi',$$

mivel pedig a háromszögtan elvei szerint áll:

$$tg(\varphi+\varphi')=\frac{tg\varphi+tg\varphi'}{1-tg\varphi tg\varphi'},\ \text{tehát}\ \varphi+\varphi'=arctg.\frac{tg\varphi+tg\varphi'}{1-tg\varphi tg\varphi'},$$

$tg\varphi$ és $tg\varphi'$ helyébe az illető értékeket tévén, lesz:

$$arctg\frac{2x+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}+arctg\frac{2x-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=arc.tg.\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2},$$

minek helyettesítése adja:

$$9.)\int\frac{dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\left[log\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}+\right.$$

$$\left.2.arctg.\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\right]+C.$$

(6-dik eset.) Legyen meghatározandó : $\int\frac{x^2dx}{x^4+a^4}$;

akkor, az ismert szétbontás által nyerjük :

$$\frac{x^2}{x^4+a^4}=\frac{x}{2a\sqrt{2}(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)}-\frac{x}{2a\sqrt{2}(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)},$$

s ennek folytán áll szintén :

$$\int\frac{x^2dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{2a\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}-\frac{1}{2a\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2};$$

mivel pedig az illető képletek alkalmazása által kapjuk :

$$\frac{1}{2a\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}=\frac{1}{4a\sqrt{2}}\,log(x^2-ax\sqrt{2}+a)+$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{2}}arctg\frac{2x-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}},\quad \text{és}$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}=\frac{1}{4a\sqrt{2}}\,log(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{2}}\,arctg.\frac{2x+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}},$$

akkor ezek helyettesitése, és az *arc.tg.*-sek összehúzása által, lesz :

$$10.)\int\frac{x^2dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{4a\sqrt{2}}\left[log\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}+\right.$$

$$\left.2.arctg.\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\right]+C.$$

Könnyebb módon találjuk meg e következő egészletet :

$\int\frac{xdx}{x^4+a^4}$, hol $x^2=z$, tehát $xdx=\frac{dz}{2}$ tétetvén, lesz :

$$11.)\int\frac{xdx}{x^4+a^4}=\frac{1}{2a^2}\,arc.tg\frac{x^2}{a^2}+C.$$

Végre még ezen egészlet is könnyen meghatározható :

$\int\frac{x^3dx}{x^4+a^4}$, melyben $x^4+a^4=z$ tétetvén, lesz : $x^3dx=\frac{dz}{4}$, s ennek helyettesítése által kapjuk :

$$12.)\quad \int\frac{x^3dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{4}log(x^4+a^4)+C.$$

(7-dik eset.) Vegyük elő e következő kifejezésnek egészelését :

$$\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)^2(x+2)},$$ erre nézve, a 15 ik szám alatt találtuk :

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x+2)}=\frac{9+8x}{25(x^2+1)}-\frac{1+2x}{5(x^2+1)^2}-\frac{8}{x+2},$$

miket dx-el szorozván és egészelvén, e következő egyes egészleteket fogjuk kapni :

$$8\int\frac{dx}{x+2}=8\ log(x+2),\quad \frac{8}{25}\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{8}{50}log(x^2+1),$$

$$\frac{2}{5}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{2}{10(x^2+1)},\quad \text{és}$$

$$\frac{9}{25}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{9}{25}arctgx\ ;$$

a mi pedig a még hátra levő $\frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ egészletet illeti, ennek egészelése a nevező kitevőjének lenyomásától függ, mit később fogunk előterjeszteni.

18.) Nagy érdekkel bírnak még e következő egészletek, melyek szinte csak szétbontás útján meghatározhatók :

1-ör.) Meghatározandó :

$$\int\frac{dx}{x(c+nx)\sqrt{a+bx}};$$

itt mindenekelőtt az $\frac{1}{x(c+nx)}$ tört szorzó részlet-törteire lesz bontandó, tévén :

$$\frac{1}{x(c+nx)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{c+nx},\ \text{miből :}$$

$$1=A(c+nx)+Bx,\ \text{következőleg :}$$

$A=\frac{1}{c}$ és $B=-\frac{n}{c}$, mely értékek folytán nyerjük :

$$\frac{1}{x(c+nx)}=\frac{1}{cx}-\frac{n}{c(c+nx)},$$

ez meglevén, az adott egészlet nyilván így lesz írható :

$$\int\frac{dx}{x(c+nx)\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}-\frac{n}{c}\int\frac{dx}{(c+xn)\sqrt{a+bx}},$$

mely két egészlet értéke már a 8-dik szám alatt megtaláltatott.

2-szor.) Adva legyen :

$$\int\frac{dx}{x^2(c+nx)\sqrt{a+bx}};$$

akkor ennek meghatározására e következő szétbontás használható :

$$\frac{1}{x^2(c+nx)}=\frac{A+Bx}{x^2}+\frac{C}{c+nx},\text{ honnan :}$$

$$1=(A+Bx)(c+nx)+Cx^2,\text{ s ennek folytán :}$$

$$A=\frac{1}{c},\ B=-\frac{n}{c^2}\quad\text{és}\quad D=\frac{n^2}{c^2},\text{ miknek helyettesítése adja :}$$

$$\frac{1}{x^2(c+nx)}=\frac{1}{cx^2}-\frac{n}{c^2x}+\frac{n^2}{c^2(c+nx)};$$

az adott egészlet tehát e következő háromba megy át :

$$\int\frac{dx}{x^2(c+nx)\sqrt{a+bx}}=$$

$$\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}-\frac{n}{c^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}+\frac{n^2}{c^2}\int\frac{dx}{(c+nx)\sqrt{a+bx}},$$

miknek figyelmes megtekintéséből látjuk, hogy ezen egészleteknek csak elseje ismeretlen, ezt pedig ismert alakra ekkép lehet visszahozni: tétessék $x=\frac{1}{u}$ lesz $dx=-\frac{du}{u^2}$, minek helyettesítése adja :

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\int\frac{udu}{\sqrt{au^2+bu}},$$

melyet miként találhatni meg, később fogjuk látni :

(3-szor.) Vegyük elő még e következő egészletet :

$$\int\frac{dx}{x^3(c+nx)\sqrt{a+bx}};$$

akkor a szétbontás itt ekkép lesz véghezviendő :

$$\frac{1}{x^3(c+nx)}=\frac{A+Bx+Cx^2}{x^3}+\frac{D}{c+nx},\text{ miből :}$$

$$1=(A+Bx+Cx^2)(c+nx)+Dx^3,$$

mely egyenlet segítségével könnyü módon találjuk föl ezt :

$A=\frac{1}{c}$, $B=-\frac{n}{c^2}$, $C=\frac{n^2}{c^3}$, és $D=-\frac{n^3}{c^3}$, következőleg :

$$\frac{1}{x^3(c+nx)}=\frac{1}{cx^3}-\frac{n}{c^2x^2}+\frac{n^2}{c^3x}-\frac{n^3}{c^3(c+nx)},$$

s ennek folytán az adott egészlet így áll :

$$\int\frac{dx}{x^3(c+nx)\sqrt{a+bx}}=$$

$$\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx}}-\frac{n}{c^2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}+\frac{n^2}{c^3}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}-$$

$$\frac{n^3}{c^3}\int\frac{dx}{(c+nx)\sqrt{a+bx}},$$

mely egészletek figyelmes megtekintéséből azonnal látható azon szabály, mely szerint az ilyen alaku egészletek haladnak; általánosan tehát állnia kell :

$$\int\frac{dx}{x^m(c+nx)\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+bx}}-\frac{n}{c^2}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{a+bx}}+$$

$$\frac{n^2}{c^3}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+bx}}-\frac{n^3}{c^4}\int\frac{dx}{x^{m-3}\sqrt{a+bx}}+\ldots\ldots.$$

$$\mp\frac{n^m}{c^m}\int\frac{dx}{(c+nx)\sqrt{a+bx}},$$

mely egészletek mind könnyen meghatározhatók, mint később látni fogjuk.

Hasonló módon járván el, e következő szétbontás is könnyen belátható lesz :

$$\int\frac{dx}{x^m(a+bx)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^m\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}-$$

$$\frac{b}{a^2}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\frac{b^2}{a^3}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+$$

$$\frac{b^3}{a^4}\int\frac{dx}{x^{m-3}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\ldots\ldots\pm\frac{b^{m-1}}{a^m}\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\mp$$

$$\frac{b^m}{a^m}\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Ugyanaz okból pedig áll szintén :

$$\int\frac{dx}{x^m(a+bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^m\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}-$$

$$\frac{b}{a^2}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+\frac{b^2}{a^3}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+\ldots\ldots$$
$$\pm\frac{b^{m-1}}{a^m}\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}\mp\frac{b^m}{a^m}\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}.$$

RÉSZLETES EGÉSZELÉS, ÉS AZ ÚGYNEVEZETT LENYOMÁSI KÉPLETEK SZÁRMAZTATÁSA.

19.) Minden módszerek között, melyek mind az okszerü mind az okszerütlen egészletek meghatározására szolgálnak, az úgynevezett részletes egészelési módszer minden esetre a legtermékenyebb; ez pedig tanítja, miként kell az adott ismeretlen egészletet bizonyos számu részekre bontani úgy, hogy ismételt szétbontás által végre ismert alaku egészletre jutunk, s így a kivánt egészelés kellőleg és könnyü módon vitetik véghez. Ezen részletes egészelésnek alapja e következőkben áll : t. i. A külzeléki hánylatból ismeretes előttünk, hogy ha u és v két változó, melyek mindegyike megint x-nek függvénye lehet, akkor áll :

$$d.(u.v)=udv+vdu\,,\quad \text{következőleg :}$$
$$uv=\int udv+\int vdu\,,\quad \text{miből kapjuk :}$$
$$\text{I)}\quad \int udv=uv-\int vdu\,,$$

mely nevezetes kifejezésben két egészletet látunk, ez tehát nyilván azt mondja, hogy ha ezen egészletek egyike ismeretes volna, másika is szükségképen ismeretessé válik. Ennek felvilágosítására, vegyük elő e következő példát :

$$y=\int\frac{2x^2dx}{(a^2+x^2)^2}\,,$$

ezen teljes ismeretlen egészlet hasonlíttassék össze az $\int udv$ kifejezéssel, s tétessék $u=x$, és $dv=\frac{2xdx}{(a^2+x^2)^2}$, lesz $du=dx$, és az ismert mód szerint : $v=-\frac{1}{a^2+x^2}$; mind ezeket pedig az I) alatti általános képletben helyettesítvén, lesz :

$$\int\frac{2x^2dx}{(a^2+x^2)^2}=-\frac{x}{a^2+x^2}+\int\frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$=-\frac{x}{a^2+x^2}+\frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a}+C;$$

ezen nevezetes szétbontás által tehát, az adott ismeretlen egészlet már meg van határozva.

20.) **(A lenyomási képletek származtatása.)** Az I) alatti általános mintának alkalmazása végett, vegyük elő e következő általános egészleti alaknak tárgyalását :

$$\delta).\quad \int x^m dx(a+bx^n)^p\,;$$

akkor, ennek egészelése, mint könnyü belátni, különféle körülményektől függ, azaz némelykor m, némelykor pedig p kitevőnek a lenyomásától. Ha az első eset fordulna elő, akkor az előttünk álló egészletet még így is szabad lesz írni :

$$\int x^{m-n+1}dx.x^{n-1}.(a+bx^n)^p,$$

ezt pedig az I) alatti mintának $\int udv$ tagjával összehasonlítván, tétessék : $u=x^{m-n+1}$ tehát $du=(m-n+1)x^{m-n}dx$, és $dv=x^{n-1}dx(a+bx^n)^p$, lesz : $v=\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$,

és ha mind ezeket az I) alatti képletben helyettesítjük, áll :

$$\text{k)}\quad \int x^m dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}-$$

$$\frac{(m-n+1)}{nb(p+1)}\int x^{m-n}dx(a+bx^n)^{p+1}\,;$$

mely kifejezésben látjuk, hogy m kitevő n-el kisebbíttetett, de egyúttal p kitevő egygyel nagyobbíttatott; mely körülmény sok egészletnél előfordúl. E következő egészlet meghatározásánál

$$\int x^2dx(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

látjuk, hogy ha azt δ) kifejezéssel hasonlítjuk össze, akkor áll :

$$m=2\,,\ n=2\,,\ a=1\,,\ b=-1\ \text{ és }\ p=-\frac{3}{2},$$

ha pedig mind ezeket az előbbi k) mintába helyettesítjük, lesz :

$$\int x^2dx(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-arcsinx,$$

s így az adott egészlet teljesen meg van határozva.

Mivel továbbá sokszor azon eset is áll elő, hogy az adott kifejezésnek az egészelése egyedül csak az m kitevőnek a lenyomásától függ, p kitevő azonban változatlan megmaradván : akkor egy e végre szolgáló mintát a k) alatti mintából az által fogunk kapni, hogy

$$(a+bx^n)^{p+1}=(a+bx^n)^p(a+bx^n)$$

tétetik, azután a kellő szorzás véghez vitetik, s kevés rövidítés után nyerjük :

$$\text{II)}\int x^m dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m+1)b}-$$
$$\frac{(m-n+1)a}{(np+m+1)b}\int x^{m-n}dx(a+bx^n)^p,$$

e mintában pedig csak m kitevő n-el kisebbítetik, a többi mind ugyanaz maradván. Ez igen hatalmas lenyomási képlet, minthogy általa számtalan egészlet meghatározható, minek megmutatására, vegyük elő e következő példákat :

(1-ső Példa.) Meghatározandó ezen egészlet :

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

akkor itt is azonnal látjuk, hogy ennek egészelése csak a számlálóban előjövő x kitevőjének lenyomásától függ, ha tehát azt a II) alatti mintának bal részével összehasonlítjuk, áll : $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=a^2$ és $b=-1$, miknek helyettesítése adja :

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^2\sqrt{a^2-x^2}}{3}+\frac{2a^2}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

mely utolsó egészlet már ismeretes előttünk, minthogy az, mint tudjuk, helyettesítés által egészeltetik. Ezen egészletre fogunk pedig mindig jutni, valahányszor x-nek kitevője páratlan szám, mert ha az 3-nál nagyobb lenne, akkor az általános II) képletet csak többször egymás után kell alkalmazni.

(2-dik Példa.) Legyen adva :

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

hol tehát x-nek kitevője páros szám; akkor ezt is a fen említett általános mintának bal részével hasonlítván össze, lesz:

$$m=4,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2},\ a=a^2 \text{ és } b=-1,$$

miknek helyettesítéséből ered:

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^3\sqrt{a^2-x^2}}{4}+\frac{3a^2}{4}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

mely utolsó egészletre as általános képletet újra alkalmazván, lesz $m=2$, a többi megmaradván, s így lesz:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

mely érték helyettesítése által kapjuk:

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^3\sqrt{a^2-x^2}}{4}-\frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{2.4}+\frac{3a^4}{2.4}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

s ezen kifejezésnek utolsó egészlete, mely végegészletnek is neveztetik, már ismeretes előttünk. Általánosan véve tehát áll:

$$\int \frac{x^mdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}a^2\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

hol $a=1$ tétetvén, és a kijövő végegészletre mindig újra alkalmazván az általános mintát, páratlan kitevőre nézve kapjuk:

$$\int \frac{x^mdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\Big[x^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}x^{m-3}+$$
$$\frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5}+\ldots..+\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots..2.1}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots...3.1}\Big].$$

Ha pedig m páros szám, akkor nyerjük:

$$\alpha).\int \frac{x^mdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\Big[x^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}x^{m-3}+$$
$$\frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5}+\ldots.+\frac{(m-1)(m-3)\ldots...3}{(m-2)(m-4)\ldots...2}\Big]+$$
$$\frac{(m-1)(m-3)\ldots...3}{m(m-2)(m-4)\ldots..2}.arcsinx.$$

21.) Nem gyéren azon eset is előáll, hogy az előbbi szám δ) alatti kifejezésének egészelése, a kéttagu szorzó p kitevőjének lenyomásától függ, hogy tehát ezen esetre nézve is egy általános lenyomási képletet nyerjünk, a fen említett kifejezést még így is szabad lesz előterjeszteni:

$$\beta). \int x^m dx\,(a+bx^n)^p = a\int x^m dx(a+bx^n)^{p-1} + b\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1},$$

mely egyenletnek első megtekintéséből már látjuk, hogy jobb részének első tagja, esetünknek teljesen megfelel, csak a második tag lenne tehát kiküszöbölendő; mi végre czélszerü lesz, az előbbi szám II) alatti mintájában $(m+n)$-et írni m helyett, és $(p-1)$-et írni p helyett, minek megtörténte után nyerni fogjuk:

$$\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{(np+m+1)b} - \frac{(m+1)a}{(np+m+1)b}\int x^m dx(a+bx^n)^{p-1},$$

mely értéket az előbbi β) egyenletbe tévén, lesz:

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \left(a - \frac{(m+1)a}{np+m+1}\right)\int x^m dx(a+bx^n)^{p-1},$$

miből könnyü módon nyerjük:

$$\text{III)} \int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{npa}{np+m+1}\int x^m dx(a+bx^n)^{p-1},$$

s ez a keresett lenyomási képlet, melynek segítségével, mint látjuk, p kitevő egygyel kisebbithető, a többi mind ugyanaz maradván. Nincs tehát egyéb hátra, mint ezen képletnek használatát egy pár példával felvilágositni.

(1-ső Példa.) Meghatározandó e következő egészlet:

$$\int dx(1-x^2)^{\frac{3}{2}};$$

akkor ezt az előttünk álló III) alatti általános mintával öszszehasonlítván, áll:

$$m=0\,,\ n=2\,,\ a=1\,,\ b=-1 \text{ és } p=\frac{3}{2},$$

miknek helyettesítése által kapjuk :

$$\int dx(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{3}{4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}};$$

mivel pedig a nyert végegészlet még mindig ismeretlen, jó lesz reá az általános képletet még egyszer alkalmazni, mely esetben $p=\frac{1}{2}$ lesz, a többi megmaradván, s így lesz :

$$\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

s ennek helyettesítése által nyerjük :

$$\int dx(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2.4}+\frac{3}{2.4}\,arcsin x,$$

mi által tehát az adott egészlet teljesen meg van határozva.

(2-ik Példa.) Meghatározandó : $\int x^3dx\sqrt{a^2+x^2}$, melyet a III) alatti mintával összehasonlítván, lesz : $m=3$, $n=2$, $a=a^2$, $b=1$ és $p=\frac{1}{2}$, miknek helyettesítése adja :

$$\int x^3dx\sqrt{a^2+x^2}=\frac{x^4\sqrt{a^2+x^2}}{5}+\frac{a^2}{5}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

mely utolsó egészletet, mint látjuk, az előbbi szám II) alatti mintája segítségével teljesen meg lehet határozni.

(3-ik Példa.) Adva van : $\int dx\sqrt{a+bx}$, akkor a kellő összehasonlításból következik : $m=0$, $n=1$, $a=a$, $b=b$, és $p=\frac{1}{2}$, miknek helyettesítése adja :

$$\int dx\sqrt{a+bx}=\frac{2x\sqrt{a+bx}}{3}+\frac{a}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$$

$$=\frac{2x\sqrt{a+bx}}{3}+\frac{2a}{3b}\sqrt{a+bx},$$

mind ezekből pedig már könnyü belátni, hogy a kérdéses általános képlet miként alkalmazandó.

22). Következik a harmadik eset tárgyalása, mely akkor áll elő, ha az említett δ) alatti kifejezésben x^m szorzó fordúl elő a nevezőben, és az adott kifejezésnek egészelése m

kitevőnek lenyomásától függ. Egy e végre szolgáló általános képlet nyerhető az által, ha a II) alatti általános mintába $(-m+n)$ iratik m helyett, mi által kevés összehúzások megtörténte után nyerjük:

$$\text{IV.)} \quad \int \frac{dx(a+bx^n)^p}{x^m} =$$

$$-\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-1)x^{m-1}} + \frac{(np+n-m+1)b}{(m-1)a} \int \frac{dx(a+bx^n)^p}{x^{m-n}},$$

s ez a kivánt lenyomási képlet, melynek alkalmazását e következő példákból fogjuk látni:

(1-ső Példa.) Meghatározandó legyen:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2+x^2}};$$

akkor ezt összehasonlítván az előttünk álló általános képlettel, áll: $m=3$, $n=2$, $a=a^2$, $b=1$ és $p=-\frac{1}{2}$, míknek helyettesítése adja:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}};$$

mivel azonban, a most megtalált végegészletre képletünk többé nem alkalmazható, minthogy $m=1$ miatt $m-1=0$ lesz; ezen képletnek mind két tagja tehát végtelenné válik, mi is annak a jele, hogy ezen végegészlet, képletünk által többé nem tárgyalható, hanem, hogy azt más úton kell keresni, mely út e következő:

Tétessék: $\sqrt{a^2+x^2}=a+xz$, lesz $x^2=2azx+x^2z^2$, tehát: $x=\frac{2az}{1-z^2}$ és $dx=\frac{2adz(1+z^2)}{(1-z^2)^2}$, továbbá $\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a(1+z^2)}{1-z^2}$,

végre: $z=\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}$, s mind ezeknek helyettesítése adja:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} log \frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x} + C,$$

mi által tehát $\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2+x^2}}$ alaku egészletek azon esetre meghatározvák, ha m páratlan szám. Hogy tehát a második eset is tekintetbe vétessék, vegyük fel tárgyalandónak e következő egészletet :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2+x^2}};$$

akkor lesz : $m=2$, $n=2$, $a=a^2$, $b=1$, és $p=-\frac{1}{2}$, képletünk alkalmazása által tehát nyerni fogjuk :

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x};$$

miből már látjuk, hogy ezen egészlet, ha m páros szám, képletünk által teljesen meg van határozva, mivel ha m nagyobb lenne kettőnél, akkor az általános képletet csak többször kell alkalmazni.

(2-ik Példa.) Tárgyalandó legyen :

$$\int \frac{dx\sqrt{a+bx^2}}{x^2};$$

akkor áll : $m=2$, $n=2$, $a=a$, $b=b$, és $p=\frac{1}{2}$, s ezeknek helyettesítése adja :

$$\int \frac{dx\sqrt{a+bx^2}}{x^2} = -\frac{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{ax} + \frac{2b}{a}\int dx\sqrt{a+bx^2},$$

mely végegészlet a III) alatti képlet szerint tárgyalandó.

23.) Végre még azon eset tárgyalása van hátra, melyben az általános δ) kifejezésnek kéttagu szorzója mint osztó fordúl elő, az adott külzeléknek egészelése pedig p kitevőnek lenyomásától függ. Egy e végre szolgáló általános képletet fogunk kapni, ha a III) alatti mintába $(-p+1)$ iratik p helyébe, mely esetben kevés összevonások után nyerjük :

$$\text{V.)} \quad \int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^{m+1}}{na(p-1)(a+bx^n)^{p-1}}$$
$$- \frac{m+n-np+1}{na(p-1)} \int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{p-1}},$$

ez pedig a kivánt lenyomási képlet, melynek segítségével p kitevő a nevezőben egygyel nyomatik alább ; használatát e következő példákból fogjuk látni :

(1-ső Példa.) Meghatározandó :

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

mely kifejezést az előttünk álló általános képlettel összehasonlítván, áll : $m=0$, $n=2$, $a=a^2$, $b=-1$ és $p=\frac{5}{2}$, következőleg :

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x}{3a^2(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3a^2}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mely végegészletre képletünket újra alkalmazván, lesz : $p=\frac{3}{2}$, a többi mind megmaradván ; s így nyerni fogjuk :

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}},$$

mely eredményből nyilván láthatni, hogy képletünk által az $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}$ alaku egészletek teljesen meghatározvák.

(2-ik Példa.) A 17-ik szám 7) alatti példájában szétbontás útján $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ egészletre jutottunk, mely, mint látjuk, szinte csak lenyomás által meghatározható ; ha ezt az V) alatti mintával hasonlítjuk össze, áll : $m=0$, $n=2$, $a=1$, $b=1$, $p=2$, s így nyerjük :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} arctg x + C.$$

Egy igen fontos lenyomási képletet fogunk kapni, ha az V) alatti általános képletben $m=0$ és $n=2$ tétetik, p kitevőt r-el felcserélvén; ez esetben ered :

$$\text{VI.)} \quad \int \frac{dx}{(a+bx^2)^r} = \frac{x}{2a(r-1)(a+bx^2)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2a(r-1)}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{r-1}},$$

mely képlet, mint később látni fogjuk, sok esetben jó sikerrel alkalmazható.

24.) **(Más lenyomási képletek.)** Már az előbbiekből ismeretes előttünk, hogy $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ miként határoztatik meg; ebből pedig azonnal látjuk, hogy $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ kifejezésnek egészelése egyedül csak m kitevőnek a lenyomásától függ; egy e végre szolgáló általános képletet pedig $(x^{m-1}.\sqrt{2ax-x^2})$ kifejezésnek a külzelése által fogunk nyerni; ha tehát ezen külzelés az ismert szabályok szerint vitetik véghez, az összevonás megtörténte után nyerjük:

$$d.(x^{m-1}.\sqrt{2ax-x^2}) = \frac{a(2m-1)x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}} - \frac{mx^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

minek folytán áll szintén:

$$x^{m-1}.\sqrt{2ax-x^2} = a(2m-1)\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}} - m\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

mivel pedig az utolsó tag esetünknek teljesen megfelel, ha azt ezen egyenletből kikeressük, lesz:

$$\text{VII.)} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m}$$

$$+\frac{a(2m-1)}{m}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

mely képlet segítségével m kitevő mindig egységgel nyomatik alább; mivel tehát ezen kitevő O-ig lenyomható, az ilyen alaku egészletek ezen képlet által teljesen meghatározvák.

Vegyük fel például e következő esetet:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

akkor $m=1$ miatt, nyerjük:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= -\sqrt{2ax-x^2} + a.arc.cos\frac{a-x}{a}.$$

Egy új eset áll elő akkor, ha a most tárgyalt egészletnek x^m szorzója a nevezőben fordúl elő, mely esetben az egészelés szintén az m kitevőnek a lenyomásától függ. Egy e végre szükséges lenyomási képlet az által nyeretik, ha a VII) alatti mintába $(1-m)$ iratik m helyett, s a kellő műtételek végbevitele után lesz:

$$\text{VIII)} \int \frac{dx}{x^m \sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a(2m-1)x^{m-1}} + \text{vagyis } x^{m-1}$$

$$\frac{m-1}{a(2m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}},$$

mely képlet segítségével az ily alaku egészletek szintén teljesen meghatározhatók, mit abból lehet látni, hogy ezen képlet azon végesetre is alkalmazható, melyben $m=1$, áll ugyanis:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}.$$

A 8-dik szám 8-dik esetében $\int \frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}}$ találtatott, ha ezen egészlethez még x^m szorzó is járúl, akkor ez a következőbe megy át:

$$\int \frac{x^m.dx}{\sqrt{bx+cx^2}},$$

melynek egészelése nyilván csak az m kitevő lenyomásától függ. Egy e végre szolgáló mintát pedig

$$(x^{m-1}.\sqrt{bx+cx^2})$$

kifejezésnek a külzelése által nyerünk, áll tehát:

$$d.(x^{m-1}\sqrt{bx+cx^2}) = \frac{(2m-1)bx^{m-1}dx}{2\sqrt{bx+cx^2}} + \frac{mcx^m dx}{\sqrt{bx+cx^2}},$$

miből egészelés által kapjuk:

$$x^{m-1}.\sqrt{bx+cx^2} = \frac{(2m-1)b}{2}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{bx+cx^2}} + mc\int \frac{x^m dx}{\sqrt{bx+cx^2}},$$

mely egyenletből az utolsó tagot kikeresvén, lesz:

$$\text{IX).} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{bx+cx^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{bx+cx^2}}{mc} - \frac{(2m-1)b}{2mc}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{bx+cx^2}},$$

ez pedig a kivánt lenyomási képlet, mely azon esetre is alkalmazható, ha $m=1$, áll ugyanis:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{bx+cx^2}}{c} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}},$$

mely utolsó egészlet már ismeretes előttünk. lásd 33. lap: (8-dik eset)

Ha pedig az x^m szorzó a nevezőben fordúlna elő, akkor egy e végre szolgáló lenyomási képlet fog nyeretni, ha a IX) alatti mintába $(1-m)$ iratik m helyett, s így nyerjük:

$$\text{X).} \int \frac{dx}{x^m \sqrt{bx+cx^2}} = -\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{(2m-1)b.x^m}$$

$$-\frac{2c(m-1)}{(2m-1)b}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{bx+cx^2}},$$

mely általános képlet még azon végesetre is alkalmazható, ha $m=1$, áll ugyanis:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{bx+cx^2}} = -\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{bx},$$

az adott egészlet tehát teljesen meg van határozva.

Ha még a II) alatti mintát az $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx^2}}$ egészletre alkalmazzuk, lesz:

$$\text{XI.)} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{a+bx^2}}{mb} - \frac{(m-1)a}{mb}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

e képletben pedig $(2-m)$-et írván m helyett, nyerjük:

$$\text{XII.)} \int \frac{dx}{x^m \sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{a(m-1)x^{m-1}}$$

$$-\frac{(m-2)b}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+bx^2}},$$

mely képletek szinte némely esetekben jó sikerrel használhatók.

25.) **(Háromszaku egészletek lenyomási képletei.)** Már az előbbiekben, nevezetesen pedig az 5)-ik és 6)-ik szám alatt, többféle háromszaku egészletek értékeit megalapítottuk; itt tehát csak oly egészletekről lesz szó, melyeket ezen ismert egészletekre lehet visszavezetni. Egy ilyféle egészlet e következő:

$$\text{A)} \quad \int \frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^r},$$

melynek egészelése nyilván r kitevőnek a lenyomásától függ, melyet ha 1-ig vagy $\frac{1}{2}$ ig lenyomni képesek lennénk, ez már az ismert alakra lesz hozva, s így teljesen egészelhető. Egy e végre szolgáló lenyomási képletet pedig az által fogunk kapni, ha a 23-ik szám VI) alatti mintájába $(c+x)$ iratik x helyébe, azután pedig rövidség okáért tététik:

$a+bc^2=\alpha$, $2bc=\beta$, és $b=\gamma$, akkor a kellő elrendezések után e következő lenyomási képletet nyerjük :

$$\text{B)}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^r}=\frac{2\gamma x+\beta}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-1)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{r-1}}+$$
$$\frac{(2r-3)2\gamma}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-1)}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{r-1}},$$

mely minta segítségével képesek vagyunk az r kitevőt 1-ig vagy $\frac{1}{2}$-ig lenyomni, mint e következő két esetből fogjuk látni :

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}=\frac{2\gamma x+\beta}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}+$$
$$\frac{2\gamma}{4\alpha\gamma-\beta^2}\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2},$$

mely utolsó egészlet már ismeretes előttünk. Továbbá áll szintén :

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\gamma x+2\beta}{(4\alpha\gamma-\beta^2)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

s így az ily alaku egészletek is teljesen meghatározvák.

Vegyük elő továbbá e következő egészletnek a tárgyalását :

$$C)\quad\int\frac{x\,dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^r},$$

akkor, hogy erre nézve is egy lenyomási képletet lehessen megalapítni, az előbbiekből már ismeretes előttünk, hogy áll : ugyanis csak $\int\frac{x\,dx}{(a+bx^2)^r}$ ben $a+bx^2=z$ helyett, akkor $x\,dx=\frac{dz}{2b}$ ezeket helyett téve nyerjük (α)-t

$$(\alpha)\quad\int\frac{x\,dx}{(a+bx^2)^r}=-\frac{1}{2b(r-1)(a+bx^2)^{r-1}},$$

ez egyenletben pedig $(x+c)$-t tévén x helyébe, azután $a+bc^2=\alpha$, $2bc=\beta$ és $b=\gamma$ irván, nyerjük :

$$\frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^r}+$$
$$\int\frac{x\,dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^r}=-\frac{1}{2\gamma(r-1)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{r-1}},$$

itt pedig az első egészlet helyébe az előbbi B) alatti értéket téve, lesz :

$$\text{D)}\int\frac{x\,dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^r}=-\frac{2\alpha+\beta x}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-1)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{r-1}}$$

$$-\frac{(2r-3)\beta}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-1)}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{r-1}},$$

mely utolsó egészlet megint ismeretes előttünk. Ezen képlet szinte alkalmazható azon esetre, ha az r kitevő $\frac{n}{2}$ alakban fordúl elő, n alatt páratlan egész számot értvén.

Legyen továbbá meghatározandó e következő háromszaku egészlet:

$$\text{E)}\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

akkor itt is azonnal látjuk, hogy ennek egészelése egyedül csak m kitevőnek a lenyomásától függ. Egy e végre szolgáló mintát az által fogunk kapni, ha $(x^{m-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})$ szorzatot külzeljük, minek megtörténte és rendbe hozása után nyeretni fog:

$$d.(x^{m-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})=\frac{m\gamma x^m dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+$$
$$\frac{(2m-1)\beta x^{m-1}dx}{2\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\frac{(m-1)\alpha x^{m-2}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

mely kifejezésnek mind két részét egészelvén, és a jobb résznek első tagját kikeresvén, e következő eredményre jutunk:

$$\text{F)}\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{x^{m-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{m\gamma}$$
$$-\frac{(2m-1)\beta}{2m\gamma}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}-\frac{(m-1)\alpha}{m\gamma}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^2}},$$

mely képlet segítségével már m kitevőnek a lenyomása kieszközölhető; így ha például $m=2$ lenne, álland:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{2\gamma}$$
$$-\frac{3\beta}{4\gamma}\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}-\frac{\alpha}{2\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

mely utolsó két egészlet már ismeretes előttünk.

Még hátra van egy lenyomási képlet azon esetre, ha x^m szorzó a nevezőben fordúl elő, milyen képletet az által fogunk nyerni, hogy az F) alatti mintába $(2-m)$ tétetik m helyett, ennek és a kellő mütételek végbevitele után eredend:

$$\text{G)}\quad \int\frac{dx}{x^m\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=-\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{\alpha(m-1)x^{m-1}}$$
$$-\frac{(2m-3)\beta}{(m-1)2\alpha}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$
$$-\frac{(m-2)\gamma}{(m-1)\alpha}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

mely már a kivánt lenyomási képlet, melyben ha $m=2$ tétetik, lesz:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=-\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{\alpha x}-\frac{\beta}{2\alpha}\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

mely utolsó egészlet már ismeretes előttünk.

Vegyük föl továbbá e következő egészletnek a meghatározását:

$$\text{H)}\quad \int x^m dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2},$$

erre nézve egy lenyomási képletet: $x^{m-1}(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{3}{2}}$ kifejezésnek külzelése által fogunk kapni, és ha rövidség okáért: $\alpha+\beta x+\gamma x^2=X$ tétetik, külzelés végbe vitele után nyeretni fog:

$$d.(x^{m-1}X^{\frac{3}{2}})=(m+2)\gamma x^m dx\sqrt{X}+\frac{(2m+1)\beta}{2}x^{m-1}dx\sqrt{X}+$$
$$(m-1)\alpha x^{m-2}dx\sqrt{X},$$

miből egészelés és áttétel által kapjuk:

$$\text{J)}\quad \int x^m dx\sqrt{X}=\frac{x^{m-1}X^{\frac{3}{2}}}{(m+2)\gamma}-\frac{(2m+1)\beta}{(m+2)2\gamma}\int x^{m-1}dx\sqrt{X}$$
$$-\frac{(m-1)\alpha}{(m+2)\gamma}\int x^{m-2}dx\sqrt{X},$$

s ez a keresett lenyomási képlet, melynek segítségével az adott egészlet $\int dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ alakra hozatik, mely alak, minthogy reá az előttünk álló képlet többé nem alkalmazható, úgy találtatik meg, ha a 21)-dik szám III) alatti mintájában $m=0$, $n=2$ iratik, és $(c+x)$ tétetik x helyébe, mely helyettesítésnek folytán nyeretik:

$$\text{K)}\quad \int dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p=\frac{(2\gamma x+\beta)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p}{2\gamma(2p+1)}+$$
$$\frac{p(4\alpha\gamma-\beta^2)}{2\gamma(2p+1)}\int dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{p-1},$$

s ezen képlet alkalmazása által, $\int dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ ismert, még pedig $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$ alakra hozatik, s így ez is teljesen meg van határozva.

Ha a fenebbi G) alatti képletben $(a+bx)$ iratik x helyébe, tehát bdx irandó dx helyébe, továbbá rövidség okáért tétetik

$\alpha+\beta a+\gamma a^2=\alpha'$, $\beta b+2\gamma ab=\beta'$ és $\gamma b^2=\gamma'$, azután még

$$\alpha=\frac{\alpha' b^2-\beta' ab+\gamma' a^2}{b^2}=\frac{A}{b^2}, \text{ és } \beta=\frac{\beta' b-2\gamma' a}{b^2}=\frac{B}{b^2}:$$

akkor a kellő műtételek végbe vitele után nyerjük

$$\text{L)} \int\frac{dx}{(a+bx)^{m}\sqrt{X}}=-\frac{b\sqrt{X}}{A(m-1)(a+bx)^{m-1}}$$
$$-\frac{(2m-3)B}{2(m-1)A}\int\frac{dx}{(a+bx)^{m-1}\sqrt{X}}-\frac{(m-2)\gamma'}{(m-1)A}\int\frac{dx}{(a+bx)^{m-2}\sqrt{X}},$$

hol rövidség okáért $\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2=X$ tétetett. Ezen képlet pedig, mint látjuk, az adott egészletet $\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{X}}$ alakra hozza, mely alak már az előbbiekből ismeretes előttünk.

Ha a H) alatti mintába $\alpha=0$ tétetik, nyerjük :

$$\text{M)} \int x^{m}dx\sqrt{\beta x+\gamma x^2}=\frac{m^{m-1}(\beta x+\gamma x^2)^{\frac{3}{2}}}{(m+2)\gamma}$$
$$-\frac{(2m+1)\beta}{(m+2)2\gamma}\int x^{m-1}dx\sqrt{\beta x+\gamma x^2},$$

mely képletben ha $m=1$ tétetik, áll :

$$\int xdx\sqrt{\beta x+\gamma x^2}=\frac{(\beta x+\gamma x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\gamma}-\frac{\beta}{2\gamma}\int dx\sqrt{\beta x+\gamma x^2}.$$

Hogy még ez utolsó egészlet is meghatároztassék, a fenebbi K) képletben szintén $\alpha=0$ teendő, minek folytán áll :

$$\text{N)} \int dx(\beta x+\gamma x^2)^{p}=\frac{(2\gamma x+\beta)(\beta x+\gamma x^2)^{p}}{2\gamma(2p+1)}$$
$$-\frac{p\beta^2}{2\gamma(2p+1)}\int dx(\beta x+\gamma x^2)^{p-1},$$

mely képlet azon esetre, ha $p=\frac{1}{2}$ átmegy e következőbe :

$$\int dx\sqrt{\beta x+\gamma x^2}=\frac{(2\gamma x+\beta)\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}{4\gamma}-\frac{\beta^2}{8\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{\beta x+\gamma x^2}},$$

mely utolsó egészlet már az előbbiekből ismeretes.

Egy szintén nagy fontosságu lenyomási képletre jutunk

$$\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x^{n-1}}$$

kifejezésnek külzelése, és ezutáni egészelése által, mely mű-tételek végbevitele után nyeretik:

$$\text{P)}\int dx\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x^n}=-\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{(n-1)x^{n-1}}+$$

$$\frac{b}{2(n-1)}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a+bx+cx^2}}+\frac{c}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

mely utolsó egészletek már az előbbiekben tárgyaltattak.

Ha pedig az előttünk álló kifejezésben $a=0$ tétetik, e következő lenyomási képletet nyerjük:

$$\text{Q)}\int\frac{dx\sqrt{bx+cx^2}}{x^n}=-\frac{\sqrt{bx+cx^2}}{(n-1)x^{n-1}}+$$

$$\frac{b}{2(n-1)}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{bx+cx^2}}+\frac{c}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{bx+cx^2}},$$

mely utolsó alakok szintén már ismeretesek előttünk.

Ha pedig e következő egészlet vétetnék tárgyalandónak:

$$\int\frac{x^m dx}{a+bx+cx^2},$$

akkor dx-nek együtthatója okszerü való tört nem lévén, azt valóban végbevitt osztás által, részint egészekre, részint pedig okszerü való törtekre lehet bontani, a mint e következő példából lehet látni:

$$\int\frac{x^3dx}{a+bx+cx^2},$$

hol az említett osztás és egészelés végbevitele után nyerjük:

$$\int\frac{x^3dx}{a+bx+cx^2}=\frac{x^2}{2c}-\frac{bx}{c^2}+\frac{b^2-ac}{c^2}\int\frac{xdx}{a+bx+cx^2}+$$

$$\frac{ab}{c^2}\int\frac{dx}{a+bx+cx^2},$$

és az utolsó két egészlet már ismert alakkal bír.

Ha pedig e következő egészlet volna tárgyalandó:

$$\int\frac{dx}{x^{m}(a+bx+cx^2)},$$

akkor $x=\frac{1}{u}$, tehát $dx=-\frac{du}{u^2}$ tétetvén, ezen egészlet e következő alakot kapja : $-\int\frac{u^{m}du}{au^2+bu+c}$, mely az előbbivel ugyanaz.

Végre még czélszerü lesz megemlítni, hogy

$$\frac{x^{m-1}}{(a+bx+cx^2)^2}$$

kifejezésnek a külzelése által e következő kifejezésre jutunk :

$$d.\frac{x^{m-1}}{X^2}=(m-1)a\frac{x^{m-2}dx}{X^3}+(m-3)b\frac{x^{m-1}dx}{X^3}+$$
$$(m-5)c\frac{x^{m}dx}{X^3},$$

hol rövidség okáért $a+bx+cx^2=X$ tétetett, ebből pedig áttétel és egészelés által nyeretik :

$$\text{R)}\int\frac{x^{m}dx}{X^3}=\frac{x^{m-1}}{(m-5)cX^2}-\frac{(m-3)b}{(m-5)c}\int\frac{x^{m-1}dx}{X^3}$$
$$-\frac{(m-1)a}{(m-5)c}\int\frac{x^{m-2}dx}{X^3},$$

mely képlet segítségével tehát, a bal oldalon levő egészlet $\int\frac{dx}{X^3}$ vagy $\int\frac{xdx}{X^3}$ alakokra visszavezethető, mely alakok megint ismeretesek előttünk, minthogy a D és B alatti mintákat lehet rájok alkalmazni.

EGÉSZELÉS SOROK ÁLTAL.

26.) $\int dxf(x)$ kifejezés egészelésénél sokszor azon eset fordúl elő, hogy azt másképen egészelni nem lehet, mint csak úgy, ha $f(x)$ szorzót sorba fejtjük, ezen sornak minden tagját dx-el szorozzuk, s azután egészeljük ; könnyü belátni, hogy ezen esetnek mindig be kell állnia, valahányszor a fen adott kifejezésnek véges egészlete nincsen. Azon sorra nézve pedig, melyre $f(x)$ függvény bontandó, mindig megkivántatik, hogy

1-ször összetartó legyen, 2-szor pedig, hogy minden tagja könnyen egészelhető legyen. A sor összetartását illetőleg, azt kell tudnunk, hogy az egészelt sor x-nek mind azon értékeire nézve összetartó lesz, melyekre nézve $f(x)$-nek sora összetartó, mert ha $f(x)$ függvény a és b határok között folytonos volna, akkor $\int f(x)dx=F(x)$ állván, $F(x)$ szinte ugyanazon határok között leend folytonos, ezen folytonosságtól pedig a sor összetartása különösen függ.

Ha az adott függvény olyan, hogy azt a Mac Laurin tantétele szerint lehet sorba fejteni, akkor mindig áll:

$$f(x)=f(o)+f'(o)x+f''(o)\frac{x^2}{2}+f'''(o)\frac{x^3}{2.3}+f^{\mathrm{IV}}(o)\frac{x^4}{2.3.4}+\ldots\ldots,$$

és ha ezen sor bizonyos határok között folytonos, akkor az ennek dx általi szorzásából s ezutáni egészeléséből eredő sor, szinte folytonos és összetartó lesz, azaz áll:

$$1.)\int f(x)dx=xf(o)+\frac{x^2}{2}f'(o)+\frac{x^3}{2.3}f''(o)+\frac{x^4}{2.3.4}f'''(o)+\ldots..+C$$

Közelebbi felvilágositásul e következő példákat hozzuk elő:

(1-ső Példa.) A külzeléki hánylatból tudjuk, hogy áll:

$$d.arc.tgx=\frac{dx}{1+x^2},\quad\text{következőleg}\quad\int\frac{dx}{1+x^2}=arc.tgx+C,$$

ez pedig az adott kifejezésnek véges egészlete, mind a mellett azonban nem alkalmazható azon esetre, ha valamely ív hosszát érintője által akarnók kifejezni, ez esetben tehát $arc.tgx$ sorba lesz fejtendő, mely sor tagjai x érintőnek hatványai szerint haladjanak, e végre pedig áll:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\ldots.,$$

mely egyenlet mind két része dx-el szoroztatván és egészeltetvén, lesz:

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots\ldots\ldots.+C,$$

hogy az állandó itt elenyésző, már abból látható, hogy ha $x=0$, $arc.tgx$ szinte elenyészik. Ezen sor pedig, valamint alkalmazása is, már rég óta ismeretes előttünk.

(2-dik Példa.) Hasonló módon tudjuk, hogy áll:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc.sinx+C,$$

hogy ezen ív is x-nek hatványai szerint haladó sorba fejtessék, áll legelőször :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\ldots$$

mely egyenlet dx-el szoroztatván és egészeltetvén, lesz :

$$arc.sinx=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots$$

mihez szinte semmi állandó nem tartozik, mert $arc.sinx$, x-el elenyészik, a sor pedig $(+1)$ és (-1) határok között igen összetartó, mivel mint látjuk $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény szinte csak ezen határok között folytonos.

(3-ik Példa.) A külzeléki hánylat elvei szerint áll :

$$d.(log(1+x))=\frac{dx}{1+x},\quad \text{tehát :}\quad \int\frac{dx}{1+x}=log(1+x)+C\ ;$$

ha pedig $(1+x)$-nek logarithmusát, x változó hatványai szerint haladó sor által akarnók kifejezni, akkor áll :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-\ldots\ldots$$

mely sort ha dx-el szorozzuk és egészeljük, lesz :

$$log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots\ldots$$

mint már ismeretes előttünk.

(4-ik Példa.) Meghatározandó :

$$\int\frac{e^{ax}dx}{x},$$

mely kifejezés nem bírván véges egészlettel, csak úgy meghatározható, ha e^{ax} függvényt sorba fejtjük, a kijövő sor minden tagját $\frac{dx}{x}$-el szorozzuk, és a kijövő tagokat egyenkint egészeljük ; áll t. i.

$$e^{ax}=1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{2.3}+\frac{a^4x^4}{2.3.4}+\ldots\ldots$$

minek folytán nyerjük :

$$\int\frac{e^{ax}dx}{x}=C+logx+ax+\frac{a^2x^2}{2^2}+\frac{a^3x^3}{2.3^2}+\frac{a^4x^4}{2.3.4^2}+\ldots\ldots;$$

mivel pedig a fenebbi sor x-nek minden véges értékére nézve összetartó, az előttünk álló egészleti sornak is érvényesnek kell lenni x-nek mind azon értékeire nézve, melyek a folytonosság határai között esnek.

(5-ik Példa.) Megtalálandó legyen :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}\sqrt{a^2-x^2}};$$

akkor ezt, hogy sor által egészeltessék, még így is szabad írni :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}}\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

most pedig a Nevton mintája szerint nyerjük :

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^4}{a^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^6}{a^6}+\ldots\ldots,$$

mely egyenlet mind két részét $\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}}$-vel szorozván és egészelvén, lesz :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}}+$$
$$\frac{1}{2a^3}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{bx+cx^2}}+\frac{1.3}{2.4a^5}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{bx+cx^2}}+\ldots\ldots\ldots,$$

mely egészletek már mind ismeretesek előttünk.

(6-ik Példa.) Legyen adva :

$$\int dx\sqrt{1-e^2cos^2x}=\int dx(1-e^2cos^2x)^{\frac{1}{2}};$$

akkor ennek egészelése végett könnyen nyerjük :

$$(1-e^2cos^2x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}e^2cos^2x-\frac{e^4}{2.4}cos^4x-\frac{e^6}{2.4.6}cos^6x+\ldots\ldots,$$

ennek pedig dx általi szorzása és egészelése adja :

$$\int dx\sqrt{1-e^2cos^2x}=\int dx-\frac{e^2}{2}\int dxcos^2x$$
$$-\frac{e^4}{2.4}\int dxcos^4x-\frac{e^6}{2.4.6}\int dxcos^6x+\ldots\ldots,$$

mely egészletek hogy miként tárgyalandók, később fogjuk látni.

(7-ik Példa.) Meghatározandó :

$$\int dx.\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

akkor itt is a Nevton mintája szerint találjuk :

$$\sqrt{1-e^2x^2}=1-\frac{e^2x^2}{2}-\frac{e^4x^4}{2.4}-\frac{1.3.e^6x^6}{2.4.6}-\ldots\ldots\ldots,$$

s ennek folytán nyilván állni fog :

$$\int dx.\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{e^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$-\frac{e^4}{2.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\ldots\ldots,$$

mely egészletek az előbbiek szerint már mind ismeretesek előttünk.

27.) **(Bernoulli sora.)** Ha az adott $\int f(x)dx$ kifejezés véges egészlettel nem bír, akkor azt részletes egészelés segítségével azonnal sorba lehet fejteni, mi végre e következő kifejezés használandó :

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

hol $u=f(x)$ és $dv=dx$ tétetvén, lesz : $du=f'(x)dx$, és $v=x$, következőleg :

$$\int f(x)dx=xf(x)-\int f'(x)xdx.$$

Az utolsó egészlet pedig újra tárgyaltatván az általános képlet szerint, tétessék : $u=f'(x)$ és $dv=xdx$, lesz : $du=f''(x)dx$, és $v=\frac{x^2}{2}$, miknek helyettesítése által kapjuk :

$$\int f'(x).xdx=\frac{x^2}{2}f'(x)-\frac{1}{2}\int f''(x).x^2dx;$$

továbbá az utolsó egészletre újra alkalmazván a mi képletünket, tétessék : $u=f''(x)$ és $dv=x^2dx$, lesz : $du=f'''(x)dx$ és $v=\frac{x^3}{3}$, miknek folytán áll :

$$\int f''(x)x^2dx=\frac{1}{3}x^3f''(x)-\frac{1}{3}\int f'''(x)x^3dx,$$

s ezen utolsó egészlet, ha újra tárgyaltatik képletünk segítségével, lesz :

$u=f'''(x)$ és $dv=x^3dx$, tehát: $du=f^{\mathrm{V}}(x)dx$ és $v=\frac{x^4}{4}$,

miknek helyettesítése által kapjuk:

$$\int f'''(x)x^3dx=\frac{x^4}{4}f'''(x)-\frac{1}{4}\int f^{\mathrm{IV}}(x)x^4dx,$$

s így már világosan látható, miként folytatandó ezen műtétel; ha tehát ezen eddig nyert eredményeket egymásba helyettesítjük, e következő sort nyerjük:

$$2).\quad \int f(x)dx=C+xf(x)+\frac{x^2}{2}f'(x)+\frac{x^3}{2.3}f''(x)+$$

$$\frac{x^4}{2.3.4}f'''(x)+\ldots\ldots,$$

mely sor Bernoulli János feltalálójának nevét viseli. Ezen sor, mint látjuk, mindaddig összetartó, mig $f(x)$ függvény folytonos.

(1-ső Példa.) Legyen sorba fejtendő:

$$\int e^{-x^2}dx, \text{ akkor lesz:}$$

$$f(x)=e^{-x^2}=u \text{ és } dv=dx, \text{ tehát}$$

$$du=-2e^{-x^2}xdx \text{ és } v=x, \text{ következőleg:}$$

$$\int e^{-x^2}dx=xe^{-x^2}+2\int e^{-x^2}.x^2dx;$$

ha pedig az utolsó egészletre képletünk újra alkalmaztatik, tenni kell:

$u=e^{-x^2}$ és $dv=x^2dx$, tehát: $du=-2e^{-x^2}xdx$ és $v=\frac{x^3}{3}$,

mi által kapjuk:

$$\int e^{-x^2}x^2dx=\frac{x^3}{3}e^{-x^2}+\frac{2}{3}\int e^{-x^2}x^4dx;$$

hasonló módon pedig, képletünket újra alkalmazván ezen utolsó egészletre, és ezen műtételt tovább folytatván, e következő sort nyerjük:

$$\int e^{-x^2}dx=xe^{-x^2}\left[1+\frac{2x^2}{3}+\frac{(2x^2)^2}{3.5}+\frac{(2x^2)^3}{3.5.7}+\ldots\right],$$

mely sor x-nek minden véges értékére nézve összetartó,

(2-ik Példa.) Legyen sorba fejtendő;

$\int\frac{dx}{1+x}$, lesz : $f(x)=\frac{1}{1+x}$, tehát :

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\ f''(x)=\frac{1.2}{(1+x)^3},\ f'''(x)=-\frac{1.2.3}{(1+x)^4},$$

s általánosan :

$$f^n(x)=(-1)^n.\frac{1.2.3.4\ldots\ldots n}{(1+x)^{n+1}},$$

miket a fenebbi 2) mintába helyettesítvén, nyerjük :

$$\int\frac{dx}{1+x}=\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{2(1+x)^2}+\frac{x^3}{3(1+x)^3}+\ldots\ldots\ldots$$

mely sornak értéke nem egyéb, mint $log(1+x)$, miről az által lehet meggyőződni, ha e következő ismert sorba :

$$log(1-x)=-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\right]$$

$\frac{x}{1+x}$-et írjunk x helyett.

28.) **(Az egészlet alatti külzelés.)** Ha helyesnek tekintjük e következő egyenletet :

$$1).\quad \int\varphi(x,a)dx=F(x,a)\,,$$

hol azonban a nem állandó mennyiség, hanem egy x-től független változó, továbbá $F(x,a)$ valamint $\varphi(x,a)$ szintén mind x-re mind a-ra nézve folytonos függvények : akkor $(a+\alpha)$ tétetvén a helyébe de úgy, hogy $(a+\alpha)$ érték még mindig a folytonossági határok között essék, e következő egyenletnek is állnia kell :

$$2).\quad \int\varphi(x,a+\alpha)dx=F(x,a+\alpha)\,,$$

s ezen két egyenlet kivonása által nyerjük :

$$\int\varphi(x,a+\alpha)dx-\int\varphi(x,a)=F(x,a+\alpha)-F(x,a)\,,$$

mely kifejezésben ha α növet végtelen kicsinynek vétetik, tehát da-ra megy át, ezen egyenlet bal része nem lesz egyéb, mint :

$$\frac{d.\int\varphi(x,a)dx}{da}.da\,,$$

jobb része pedig nem lesz egyéb, mint :

$$\frac{d.F(x,a)}{da}da\,,$$

s ennek folytán áll :

$$3).\quad \frac{d.\int\varphi(x,a)dx}{da}=\frac{d.F(x,a)}{da}.$$

Egyúttal pedig könnyü belátni e következő egyenletek helyes voltát:

$$\varphi(x,a+\alpha)=\varphi(x,a)+\frac{d.\varphi(x,a)}{da}\alpha,\quad \text{és}$$

$$4).\quad F(x,a+\alpha)=F(x,a)+\frac{d.F(x,a)}{da}.\alpha,$$

melyek elsejét dx-el szorozván és x szerint egészelvén, lesz:

$$\int\varphi(x,a+\alpha)dx=\int\varphi(x,a)dx+\alpha\int\frac{d.\varphi(x,a)}{da}dx,$$

s így a fenebbi 1) és 2) egyenleteket tekintetbe vévén, áll:

$$F(x,a+\alpha)=F(x,a)+\alpha\int\frac{d.\varphi(x,a)}{da}dx,$$

ennek pedig és a 4) alatti egyenletnek összehasonlításából ered:

$$6).\quad \int\frac{d.\varphi(x,a)}{da}dx=\frac{d.F(x,a)}{da},$$

miből a fenebbi 3) alatti egyenlet segítségével kapjuk:

$$5).\quad \int\frac{d.\varphi(x,a)}{da}dx=\frac{d.\int\varphi(x,a)dx}{da},$$

és ha ugyanazon eljárás n-szer alkalmaztatik egymásután: általánosan is állnia kell:

$$\int\frac{d^n\varphi(x,a)}{da^n}dx=\frac{d^n.F(x,a)}{da^n}.$$

Az 5) alatti egyenlet nyilván azt nyilvánítja, hogy mindegy, akár valamely adott külzeléki függvényt először egészeljünk, s ezután valamely független változó szerint külzeljünk, akár ezen mütétel megfordítva vétetik elö, ha csak mind az egészlet mind a külzelék a folytonossági határok között tartatik. Ha pedig így az x szerinti egészlet meg van határozva, akkor, az 5) és 6) alatti egyenletek segítségével, lehetséges lesz, a megtalált egészletet bizonyos x-től független változó szerint külzelni, s az által új egészleteket felfedezni. A következő példák a dolgot felvilágosítják.

(1-ső Példa.) Az egészleti hánylatból tudjuk, hogy áll:

$$\int dx cosmx = \frac{sinmx}{m}, \text{ és } \int dx sinmx = -\frac{cosmx}{m},$$

mely egyenletek m-nek minden, 0-tól különböző értékére nézve állnak ; ha tehát ezen egyenletek m szerint külzeltetnek, tekintetbe vévén az előbbi 5) alatti egyenletet, mely szerint áll :

$$\int \frac{d.(cosmx)dx}{dm} = \frac{d.\int cosmx.dx}{dm}, \text{ és}$$

$$\int \frac{d.(sinmx)}{dm} dx = \frac{d.\int sinmx.dx}{dm},$$

m szerinti külzelés által kapjuk :

$$\frac{d.(cosmx)}{dm} = -xsinmx, \text{ lesz tehát :}$$

$$\int \frac{d.(cosmx)}{dm}.dx = -\int x.dxsinmx,$$

minek x szerinti egészelésére tétessék :

$$x = u \text{ és } dxsinmx = dv, \text{ lesz : } du = dx, \text{ és}$$

$$v = -\frac{cosmx}{m}, \text{ tehát :}$$

$$\int xdx.sinmx = -\frac{x}{m}cosmx + \frac{1}{m}\int dxcosmx$$

$$= -\frac{x}{m}cosmx + \frac{sinmx}{m^2}.$$

Hasonló módon találjuk szintén :

$$\int xdx.cosmx = \frac{x}{m}sinmx + \frac{cosmx}{m^2},$$

mely egészletek, mint látjuk, egészen újak.

(2-ik Példa.) Az előbbiekből tudva van előttünk, hogy :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

a fenebbi 5) alatti egyenlet szerint pedig áll :

$$\frac{d\int x^m dx}{dm} = \int \frac{d.(x^m)}{dm} dx,$$

ámde m szerinti külzelés által kapjuk :

$$d.(x^m) = x^m dmlogx, \text{ tehát : } \frac{d.(x^m)}{dm} = x^m logx,$$

nyerjük tehát : $\int x^m dx log x$, melyben :

$x^m dx = dv$, és $log x = u$ tétetvén, lesz :

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ és } du = \frac{dx}{x}, \text{ következőleg :}$$

$$\int x^m dx log x = \frac{x^{m+1} log x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^m dx,$$

$$= \frac{x^{m+1} log x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2},$$

mely megint új egészlet. Ha e kifejezésben $m=0$ tétetik, ered :

$$\int dx log x = x log x - x,$$

itt pedig x-t $(1+ax)$-el és $(1-ax)$-el cserélvén fel, nyerjük :

$$\int dx log(1+ax) = \frac{1+ax}{a} . log(1+ax) - \frac{1+ax}{a}, \text{ és}$$

$$\int dx log(1-ax) = -\frac{1-ax}{a} log(1-ax) + \frac{1-ax}{a}.$$

(3-ik Példa.) Tudva van előttünk, hogy áll :

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{log a},$$

ha megint az 5) alatti egyenlet tekintetbe vétetik, áll :

$$\frac{d.\int a^x dx}{da} = \int \frac{d.(a^x)}{da} dx,$$

ámde a szerinti külzelés által kapjuk :

$$\frac{d(a^x)}{da} = x a^{x-1}, \text{ s ennek folytán}$$

$\int x dx a^{x-1}$, melynek x szerinti egészelése végett tétessék : $a^{x-1} dx = dv$, és $x = u$, lesz : $v = \frac{a^{x-1}}{log a}$ és $du = dx$, következőleg :

$$\int x dx . a^{x-1} = \frac{x a^{x-1}}{log a} - \frac{a^{x-1}}{log^2 a},$$

s ez, mint látjuk, megint új alaku egészlet. E példában, valamint az előbbi példákban is, nem szükséges az $\int u dv = uv - \int v du$ képletet alkalmazni, hanem csak az adott egyenletet egy új változó szerint külzelni; így kellő tekintetbe vévén az 5) alatti egyenletet, ha az utolsó példában adott egyenlet a szerint külzeltetik, azonnal nyerjük :

$$\int x dx a^{x-1} = \frac{x a^{x-1} log a}{log a^2} - \frac{a^{x-1}}{log a^2} = \frac{x a^{x-1}}{log a} - \frac{a^{x-1}}{log a^2},$$

mint előbb.

(4-ik Példa.) Az előbbiekből ismeretes előttünk, hogy :

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a},$$

mely egyenletet a szerint külzelvén, nyerjük :

$$\int x dx e^{ax} = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} = \frac{x e^{ax}}{a}\left(1 - \frac{1}{ax}\right),$$

ha pedig az adott egyenlet n-szer egymásután külzeltetik a szerint, az utolsó külzeléki hányados nyilván lesz :

$$d_a^n(e^{ax}) = x^n e^{ax}, \text{ s így álland :}$$

$$\int x^n dx e^{ax} = \frac{x^n e^{ax}}{a}\left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{(ax)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(ax)^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$\pm \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots 3.2.1}{(ax)^n}.$$

(2º.) **(Egészlet alatti egészelés.)** Ha az előbbi szám 1) alatti egyenletét külzeljük, nyerni fogjuk :

$$\frac{d.F(x,a)}{dx} = \varphi(x,a),$$

ezen egyenletnek mind két részét pedig da-val szorozván , és azután a szerint egészelvén, áll :

$$\frac{\int d.F(x,a)da}{dx} = \int \varphi(x,a)da, \quad \text{avagy :}$$

$$\frac{d.\int F(x,a)da}{dx} = \int \varphi(x,a)da,$$

miből következik :

$$d\int F(x,a)da = \int \varphi(x,a)dadx,$$

ezen egyenletet pedig x szerint egészelvén, lesz :

$$\int F(x,a)da = \int\int \varphi(x,a)dadx,$$

mely egyenlet jobb része tehát azt kivánja , hogy először a szerint, azután pedig x szerint vitessék véghez az egészelés. Mivel pedig az előbbi szám 1) alatti egyenlete, ha da-val szoroztatik, azután pedig a szerint egészeltetik , e következő eredményre vezet :

$$\int F(x,a)da = \int\int \varphi(x,a)dxda,$$

állnia kell nyilván e következő egyenletnek is :

$$\int\int \varphi(x,a)dadx = \int\int \varphi(x,a)dxda,$$

mely nevezetes egyenlet azt tanusítja, hogy mindegy, bármely rendben egészeltetik kétszer egymásután az adott külzeléki kifejezés, ha azon változók, melyek szerint történik az egészelés, függetlenek egymástól, és az egészletek határai a folytonosság terén maradnak. Felvilágosításul e következő példákat hozzuk elő :

(1-ső Példa.) Ismeretes előttünk e következő egészlet :

$$\int \frac{adx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = arc.sinax.$$

Ha ezen egyenletet da-val szorozzuk, és a szerint egészeljük, lesz :

$$\int\int \frac{adxda}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \int da.arc.sinax,$$

de az előbbiek szerint áll :

$$\int\int \frac{adxda}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \int\int \frac{adadx}{\sqrt{1-a^2x^2}},$$

ha tehát először a szerint vitetik véghez az egészelés, áll :

$$\int \frac{ada}{\sqrt{1-a^2x^2}} = -\frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{x^2},$$

hanyja $1-a^2x^2=z$; $a\,da=-\frac{dz}{2x^2}$
s így $\int\frac{dz}{-2x^2\sqrt{z}}=-\frac{1}{x^2}\sqrt{1-a^2x^2}$

minek folytán nyerjük :

$$\int da.arcsin.ax = -\int dx.\frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{x^2},$$

hol $\frac{1}{x}$-et tévén x helyébe, áll :

$$\int da.arcsin\frac{a}{x} = \int dx.\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},$$

mely egészlet meghatározására, jó lesz annak mind számlálóját mind nevezőjét ($\sqrt{x^2-a^2}$)-val szorozni, s nyerjük :

$$\int dx.\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}},$$

ezen egyenlet jobb oldalán levő egészletek elseje már ismeretes előttünk, minthogy áll :

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2},$$

a második egészlet meghatározására pedig tétessék :

$x=\frac{1}{u}$, lesz $dx=-\frac{du}{u^2}$, minek helyettesitése adja :

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=-\int\frac{du}{\sqrt{1-a^2u^2}}=\frac{1}{a}arc.sin\left(-\frac{a}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{a}arc.sin\frac{a}{x},$$ s így áll :

$$\int da.arc.sin\frac{a}{x}=\sqrt{x^2-a^2}+a.arc.sin\frac{a}{x},$$

és ha az a mennyiséget x-el felcseréljük, lesz :

$$\int dx.arc.sin\frac{x}{a}=\sqrt{a^2-x^2}+x.arc.sin\frac{x}{a}.$$

(2-ik Példa.) Adva van e következö ismert egészlet :

$$\int\frac{2adx}{1-a^2x^2}=log(1+ax)-log(1-ax).$$

Ha ezen egyenletnek mind két részét da-val szorozzuk, és a szerint egészeljük, nyerjük :

$$\int\int\frac{2adadx}{1-a^2x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}log(1-a^2x^2),$$

mit az előbbi egyenlettel összehasonlítván, ered :

$$\int\frac{dx}{x^2}log(1-a^2x^2)=\int dalog(1-ax)-\int dalog(1+ax);$$

mivel pedig könnyü módon találtatik :

$$\int dalog(1-ax)=alog(1-ax)-a-\frac{1}{x}log(1-ax),$$ és

$$\int da.log(1+ax)=alog(1+ax)-a+\frac{1}{x}log(1+ax),$$

ezek egymástóli kivonása által kapjuk :

$$\int\frac{dx}{x^2}log(1-a^2x^2)=alog\frac{1-ax}{1+ax}-\frac{1}{x}log(1-a^2x^2),$$

s így látjuk, miként lehet az egymásra következő kettős egészelés által új egészleteket felfedezni.

A TÚLLÉPŐ FÜGGVÉNYEK EGÉSZELÉSE.

30.) **(A logarithmusi függvények egészelése.)** Logarithmusi külzeléki függvényeknek azok neveztetnek, melyekben a változó külzeléke, ugyanazon változó valamely függvényének logarithmusával szorozva fordúl elő. Ilyféle külzeléki függvénynek legegyszerübb alakja $dx(logx)^n$, melynek egészelését kell mindenekelőtt tárgyalnunk.

Meghatározandó legyen tehát :

$$\int dx(logx)^n,$$

akkor könnyü belátni, hogy ennek egészelése egyedül csak az n kitevőnek lenyomásától függ, egy e végre szolgáló lenyomási képletet pedig $\int udv = uv - \int vdu$ minta segítségével nyerünk, ha benne $u=(logx)^n$ és $dv=dx$ tétetik, mely esetben áll $du=n(logx)^{n-1}.\frac{dx}{x}$ és $v=x$, miknek helyettesítése adja :

$$1). \quad \int dx(logx)^n = x(logx)^n - n\int dx(logx)^{n-1},$$

mely kifejezésnek első megtekintéséből látjuk, hogy az n kitevő az utolsó egészletben már egységgel nyomatik alább, továbbá azt is könnyü belátni, hogy ezen minta segítségével az n kitevő zerusig lenyomható, s így az ily alaku egészletek ezen képlet által teljesen meghatározvák, ugyanis ha $n=1$, akkor áll :

$$\int dxlogx = xlogx - x.$$

Ha pedig $(logx)^n$ mennyiség mint osztó fordúlna elö, akkor egy e végre szolgáló lenyomási képletet az által nyerünk, ha az előbbi 1) mintába $(1-n)$ iratik n helyett, ez esetben t. i. ered :

$$2) \quad \int\frac{dx}{(logx)^n} = -\frac{x}{(n-1)(logx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{(logx)^{n-1}},$$

mely képlet segítségével az n kitevő szintén mindig egységgel nyomatik alább, azonban könnyü belátni, hogy általa az n kitevő még sem nyomható le zerusig, hanem csak egyig, a hátra maradó $\int\frac{dx}{logx}$ végegészlet tehát más úton lesz meghatározandó, mely utat később fogunk látni.

Továbbá meghatározandó legyen e következő kevert egészlet:

$$\int Xdx(logx)^n,$$

hol X alatt x-nek valamely függvényét kell érteni; akkor ennek egészelése szintén csak az n kitevőnek lenyomásától függ, mi végre megint a fenebbi általános képletünk lesz használandó, melyben $u=(logx)^n$ és $dv=Xdx$ teendő, s lesz:

$$du=n(logx)^{n-1}\frac{dx}{x} \quad \text{és} \quad v=\int Xdx=X',$$

miknek helyettesítése által kapjuk:

$$3). \quad \int Xdx(logx)^n=X'(logx)^n-n\int\frac{X'dx(logx)^{n-1}}{x},$$

mely képlet segítségével az n kitevő szintén 0-ig lenyomható, s így a hátra maradó $\int Xdx$ alaku végegészlet már könnyen meghatározható. Ha az utolsó képletben $X=x^m$ tétetik, lesz:

$\int Xdx = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$

$$4). \quad \int x^m dx(logx)^n=\frac{x^{m+1}(logx)^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^m dx(logx)^{n-1},$$

mely minta segítségével az adott egészlet $\int x^m dx$ alakra hozatik vissza, melynek egészlete $=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, s így az adott egészlet teljesen meg van határozva. E következő példában áll:

$$\int xdxlogx=\frac{x^2logx}{2}-\frac{x^2}{4}.$$

Ha pedig az utolsó 4) alatti képletben $(1-n)$ iratik n helyébe, e következő lenyomási képletet nyerjük:

$$5). \quad \int\frac{x^m dx}{(logx)^n}=-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(logx)^{n-1}}+\frac{m+1}{n-1}\int\frac{x^m dx}{(logx)^{n-1}},$$

mely képlet segítségével az n kitevő szintén egységgel nyomatik alább, de azt 0-ig lenyomni lehetetlen, a végegészlet tehát, melyre jutunk, ez lesz:

$\int \frac{x^m dx}{log x}$, melyet más úton kell keresni.

Ezen út pedig e következőkben áll : tétessék

$x^{m+1} = z$, lesz : $(m+1) log x = log z$, és $(m+1) x^m dx = dz$,

akkor az utolsó két egyenlet osztásából ered :

$$\frac{x^m dx}{log x} = \frac{dz}{log z}, \text{ tehát szintén : } \int \frac{x^m dx}{log x} = \int \frac{dz}{log z},$$

mely utolsó egészlet meghatározására teendő :

$e^u = z$, s lesz : $u = log z$ és $du = \frac{dz}{z}$, következőleg :

$e^u du = dz$, ha t. i. e a természetes logarithmusok alapszáma, miknek folytán áll :

$$\int \frac{dz}{log z} = \int \frac{e^u du}{u}.$$

Hogy pedig ezen kifejezés egészeltessék, e^u kitevőleges mennyiség, u változónak hatványai szerint haladó sorba lesz fejtendő, mely sor e következő :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2.3} + \frac{u^4}{2.3.4} + \frac{u^5}{2.3.4.5} + \ldots\ldots\ldots,$$

s ezen egyenlet mindkét részét $\frac{du}{u}$-val szorozván s egyszersmind egészelvén, nyerni fogjuk :

$$\int \frac{e^u du}{u} = log u + u + \frac{u^2}{2^2} + \frac{u^3}{2.3^2} + \frac{u^4}{2.3.4^2} + \ldots\ldots,$$

itt pedig u helyébe z-ben kifejezett értéket tévén, lesz :

$$\int \frac{dz}{log z} = log log z + log z + \frac{(log z)^2}{2^2} + \frac{(log z)^3}{2.3^2} + \ldots\ldots;$$

végre a kérdéses x-ben kifejezett egészlet lesz :

$$\int \frac{x^m dx}{log x} = log(m+1) + log log x + (m+1) log x + \frac{(m+1)^2 log^2 x}{2^2} + \frac{(m+1)^3 log^3 x}{2.3^2} + \ldots\ldots,$$

ezen egészlet tehát, mint látjuk, csak sor által előterjeszthető.

A részletes egészelés $\int u dv = uv - \int v du$ képlet segítségével e következő logarithmusi egészletre is alkalmazható :

$\int dx [log(x + \sqrt{1+x^2})]^n$, melyre nézve teendő :

Lásd Külzeléki lainglat 30$^{\text{d}}$ lap: 3$^{\text{ik}}$ Példa.

$u=[log(x+\sqrt{1+x^2})]^n$ és $dv=dx$, s lesz : $v=x$, és

$$du=n[log(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

miknek helyettesítése által nyerjük :

$$\int dx\,[log(x+\sqrt{1+x^2})]^n=x[log(x+\sqrt{1+x^2})]^n$$
$$-n\int\frac{xdx[log(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ha pedig ezen utolsó egészletre újra alkalmaztatik a fen említett általános képlet, tévén :

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=dv, \text{ és } [log(x+\sqrt{1+x^2}]^{n-1}=u, \text{ lesz :}$$

$$v=\sqrt{1+x^2} \text{ és } du=(n-1)[log(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

s akkor e következő eredményre jutunk :

$$\int\frac{xdx[log(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}[log(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-1}$$
$$-(n-1)\int dx[log(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-2},$$

minek helyettesítése a fenebbi képletben adja :

$$\int dx[log(x+\sqrt{1+x^2})]^n=x[log(x+\sqrt{1+x^2})]^n$$
$$-n\sqrt{1+x^2}[log(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-1}$$
$$+n(n-1)\int dx[log(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-2},$$

mely utolsó egészletet, ha megint tárgyaljuk képletünk szerint, és ezen műtételt úgy folytatjuk, e következő eredményt fogjuk kapni :

$$\int dx[log(x+\sqrt{1+x^2})]^n=[log\,(x+\sqrt{1+x^2})]^n.$$
$$\left[x-\frac{n\sqrt{1+x^2}}{log(x+\sqrt{1+x^2})}+\frac{n(n-1)x}{log^2(x+\sqrt{1+x^2})}\right.$$
$$\left.-\frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1+x^2}}{log^3(x+\sqrt{1+x^2})}+\ldots\ldots\ldots\right]$$

mely általános kifejezésben csak n helyébe az illető érték teendő; így ha $n=1$, nyerni fogjuk:

$$\int dx.log(x+\sqrt{1+x^2})=xlog(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}.$$

Legyen tárgyalandó még e következő egészlet:

$$\int\frac{dxlogx}{a+bx},$$

akkor erre is alkalmazván a részletes egészelést, tétessék:

$$logx=u,\quad \text{és}\quad \frac{dx}{a+bx}=dv,\ \text{lesz}\ du=\frac{dx}{x},\quad \text{és}$$

$$v=\frac{1}{b}log(a+bx),$$ miknek helyettesítése adja:

$$\int\frac{dxlogx}{a+bx}=\frac{1}{b}logx.log(a+bx)-\frac{1}{b}\int\frac{dx}{x}log(a+bx),$$

mely utolsó egészlet már csak sor által meghatározható, mi végre azt így is szabad írni: lásd Külc: log: 82 lap 33 §.

$log(a+bx)=log[a.(1+\frac{bx}{a})]=log a+log(1+\frac{bx}{a})$

$$\int\frac{dx}{x}log(a+bx)=loga\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x}log\left(1+\frac{bx}{a}\right),$$

ámde áll: $$log\left(1+\frac{bx}{a}\right)=\frac{bx}{a}-\frac{b^2x^2}{2a^2}+\frac{b^3x^3}{3a^3}-\frac{b^4x^4}{4a^4}+\ldots.$$

mit $\frac{dx}{x}$-el szorozván és egészelvén, nyerjük:

$$\int\frac{dx}{x}log\left(1+\frac{bx}{a}\right)=\frac{bx}{a}-\frac{b^2x^2}{2^2a^2}+\frac{b^3x^3}{3^2a^3}-\frac{b^4x^4}{4^2a^4}+\ldots\ldots$$

s így az adott egészlet e következő értékü lesz:

$$\int\frac{dxlogx}{a+bx}=\frac{1}{b}logx.log\frac{a+bx}{a}-\frac{x}{a}+\frac{bx^2}{2^2a^2}-\frac{b^2x^3}{3^2a^3}+\frac{b^3x^4}{4^2a^4}-\ldots\ldots$$

Ha pedig e következő alaku egészlet fordúlna elö:

$$\int x^m dx.log(a+bx),$$

akkor erre is a részletes egészelési módot alkalmazván, teendő:

$$x^m dx=dv,\quad \text{és}\quad log(a+bx)=u,\ \text{s lesz:}$$

$$v=\frac{x^{m+1}}{m+1},\quad \text{és}\quad du=\frac{bdx}{a+bx},$$

s ezeknek folytán nyerjük:

$$\int x^m dx log(a+bx) = \frac{x^{m+1} log(a+bx)}{m+1} - \frac{b}{m+1}\int\frac{x^{m+1}}{a+bx},$$

mely egészlet már igen könnyen meghatározható.

Legyen adva még: $\int\frac{dx}{x}(logx)^n$, akkor ennek egészelése végett tétessék: $logx=z$, lesz $\frac{dx}{x}=dz$, és $(logx)^n=z^n$, következőleg:

$$\int\frac{dx}{x}(logx)^n=\frac{(logx)^{n+1}}{n+1}+C.$$

Végre legyen meghatározandó még e következő egészlet:

$$\int\frac{dx}{x^2}log(1-a^2x^2),$$

akkor ezt is részletesen tárgyalván, tétessék: $log(1-a^2x^2)=u$ és $\frac{dx}{x^2}=v$, lesz: $du=-\frac{2a^2xdx}{1-a^2x^2}$, és $v=-\frac{1}{x}$, következőleg:

$$\int\frac{dx}{x^2}log(1-a^2x^2)=-\frac{1}{x}log(1-a^2x^2)-2a^2\int\frac{dx}{1-a^2x^2},$$

mivel pedig tudjuk, hogy áll:

$$\int\frac{dx}{1-a^2x^2}=\frac{1}{2a}log\frac{1+ax}{1-ax},$$

ha a jel is kellő tekintetbe vétetik nyerni fogjuk:

$$\int\frac{dx}{x^2}log(1-a^2x^2)=-\frac{1}{x}log(1-a^2x^2)+alog\frac{1-ax}{1+ax}.$$

31.) **(A kitevős függvények egészelése.)** Ha az adott és egészelendő külzeléki kifejezésben kitevős függvény mint szorzó fordúl elő, akkor ez kitevős külzeléki függvénynek neveztetik. Ilyen külzeléki függvények egészelésére mindenek előtt azok alap-alakjait kell bemutatnunk, melyek már ismeretesek előttünk, és e következők:

1.) $\int a^x dx=\frac{a^x}{loga}+C,$ 2.) $\int a^{mx}dx=\frac{a^{mx}}{mloga}+C,$

mely két kifejezésben, ha e iratik a helyébe, értvén e alatt a természetes logarithmusok alapszámát, nyerjük:

3.) $\int e^x dx=e^x+C,$ és 4.) $\int e^{mx}dx=\frac{e^{mx}}{m}+C.$

Hasonlóképen helyes lesz e következő két kifejezés :

$$5.)\ \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C,\quad \text{és}\quad 6)\ \int e^{-mx}dx = -\frac{e^{mx}}{m} + C.$$

Ezeknek előrebocsátása után, tegyük feladatunkká e következő egészletnek meghatározását :

$$\int a^x . x^n dx,$$

akkor itt azonnal látjuk, hogy ennek egészelése csak az n kitevőnek lenyomásától függ, egy e végre szolgáló képletet pedig az által nyerünk, ha az adott kifejezésre a részletes egészelést alkalmazzuk, minek folytán teendő :

$$a^x dx = dv \quad \text{és} \quad x^n = u, \text{ s lesz : } v = \frac{a^x}{loga}, \text{ és } du = nx^{n-1}dx,$$

miknek helyettesítése által e következő eredményre jutunk :

$$7.)\quad \int a^x . x^n . dx = \frac{a^x x^n}{loga} - \frac{n}{loga}\int a^x . x^{n-1}dx,$$

mely képlet segítségével, már az n kitevő egygyel nyomatik alább : hogy pedig ezen kitevőt 0-ig le lehet nyomni, következik abból, hogy ezen képletet $n=1$ esetre is lehet alkalmazni, melyben áll :

$$\int a^x . xdx = \frac{xa^x}{loga} - \frac{a^x}{(loga)^2} + C,$$

az ily alaku egészletek tehát teljesen meghatározvák.

Még egy második esetnek tárgyalása kinálkozik itt, ha t. i. az x^n mennyiség mint osztó fordúl elő ; a meghatározandó egészlet tehát ez lesz :

$$\int \frac{a^x dx}{x^n};$$

erre is a részletes egészelési módot alkalmazván, tétessék :

$$u = a^x \text{ és } dv = \frac{dx}{x^n}, \text{ lesz : } du = a^x dx loga \text{ és } v = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},$$

s ezen értékek helyettesítése azonnal adja :

$$8).\quad \int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{loga}{n-1}\int \frac{a^x dx}{x^{n-1}},$$

hol már látjuk, hogy az n kitevő egygyel kisebbíttetett ; ezen képlet segítségével azonban még sem lehetséges 0-ig lenyomni a kérdéses kitevőt, hanem csak egyig, s ennek folytán

$\int \frac{a^x dx}{x}$ egészlet más úton meghatározandó, mely út egyébiránt már az előbbi számban megmutattatott.

Vegyük elő még e következő egészlet meghatározását:

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}}.$$

Ezt is csak részletesen lehet egészelni, mi végre teendő:

$$a^x dx = dv \text{ és } \frac{1}{\sqrt{x}} = u, \text{ s lesz: } v = \frac{a^x}{loga} \text{ és } du = -\frac{dx}{2x\sqrt{x}},$$

miknek helyettesítése adja:

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = \frac{a^x}{\sqrt{x}\,loga} + \frac{1}{2loga}\int \frac{a^x dx}{x\sqrt{x}},$$

mely utolsó egészletet megint részletesen tárgyalván, tétessék:

$$a^x dx = dv \text{ és } \frac{1}{x\sqrt{x}} = u, \text{ s lesz: } v = \frac{a^x}{loga} \text{ és } du = -\frac{3dx}{2x^2\sqrt{x}},$$

s ezeknek helyettesítése által kapjuk:

$$\frac{1}{2loga}\int \frac{a^x dx}{x\sqrt{x}} = \frac{a^x}{2x\sqrt{x}(loga)^2} + \frac{3}{2^2(loga)^2}\int \frac{a^x dx}{x^2\sqrt{x}};$$

ha pedig ezen utolsó egészletet újra tárgyaljuk részletesen, könnyü módon nyerjük:

$$\frac{3}{2^2(loga)^2}\int \frac{a^x dx}{x^2\sqrt{x}} = \frac{3a^x}{2^2x^2\sqrt{x}(loga)^3} + \frac{3.5}{2^3(loga)^3}\int \frac{a^x dx}{x^3\sqrt{x}},$$

mely műtételt folytatván, és a nyert eredményeket egymásba helyettesítvén, e következő sorra jutunk:

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = \frac{a^x}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{loga} + \frac{1}{2x(loga)^2} + \frac{3}{2^2x^2(loga)^3}\right] + \frac{3.5}{2^3(loga)^3}\int \frac{a^x dx}{x^3\sqrt{x}},$$

miből láthatni, hogy ezen egészlet csak sor által meghatározható.

Hasonló módon találtatik meg e következő egészlet értéke is:

$$\int \frac{a^x dx}{1-x} = \frac{a^x}{1-x}\left[\frac{1}{loga} - \frac{1}{(1-x)(loga)^2} + \frac{1.2}{(1-x)^2(loga)^3} - \frac{1.2.3}{(1-x)^3(loga)^4} + \ldots\ldots\right].$$

32.) **(Még némely kitevős egészletek.)** Ez alkalommal olyféle egészletekről lesz szó, melyek a kitevős és háromszögtani függvényekből összekevervék, s melyeknek egyenes egészelése csak úgy lehetséges, ha tiszta kitevős kifejezésekre vezettetnek vissza. Az itten előforduló esetek elseje ez :

$$\int e^{mx}.dx.sinnx,$$

melynek egészelése végett e következö két minta használandó : Lásd: Külx: hány: 96 lap: 3 és 4 párinak

a) $sinnx = \dfrac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ és b) $cosnx = \dfrac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-xn\sqrt{-1}}}{2}$,

mely értékek elsejét az adott egészletbe tévén, lesz :

$$\int e^{mx}dx.sinnx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int e^{mx}dx\left[e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}\right],$$

és ha rövidség okáért tétetik :

$$m + n\sqrt{-1} = a, \quad \text{és} \quad m - n\sqrt{-1} = \alpha,$$

e következő két egészletet nyerjük :

$$\int e^{mx}dxsinnx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int e^{ax}dx - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int e^{\alpha x}dx$$

$$= \frac{2a\sqrt{-1}e^{\alpha x} - 2\alpha\sqrt{-1}e^{ax}}{4a\alpha},$$ ez itt közös nevezőre van hozva és (−1) vel szorozva

itt pedig a és α helyébe a fenebbi értékeket vissza helyettesítvén, e következő kifejezésre fogunk jutni :

$$\int e^{mx}dxsinnx = \frac{e^{mx}}{m^2+n^2}\left[\frac{m(e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}} - \frac{n(e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}})}{2}\right],$$

hol az a) és b) alatti értékeket helyettesítvén, lesz :

$$1.)\quad \int e^{mx}dxsinnx = \frac{e^{mx}}{m^2+n^2}(msinnx - ncosnx) + C.$$

Ez egyenletben $n = 1$ tétetvén, nyerjük :

$$2.)\quad \int e^{mx}dxsinx = \frac{e^{mx}}{m^2+1}(msinx - cosx) + C.$$

Vegyük elő most a második esetnek a tárgyalását, azaz :

$$\int e^{mx}dx\cos nx,$$

akkor $\cos nx$ helyébe a fen kitett értéket tévén, ered :

$$\int e^{mx}dx\cos nx=\frac{1}{2}\int e^{ax}dx+\frac{1}{2}\int e^{\alpha x}dx,$$

hol a és α-nak a fen előhozott értékei vannak, ezen két egészletnek értéke pedig lesz :

$$=\frac{e^{ax}}{2a}+\frac{e^{\alpha x}}{2\alpha}=\frac{\alpha e^{ax}+ae^{\alpha x}}{2a\alpha},$$

itt pedig a és α helyébe az ismert értékeket tévén, és az a) és b) alatti értékeket tekintetbe vévén, lesz :

$$3.)\quad \int e^{mx}dx\cos nx=\frac{e^{mx}}{m^2+n^2}(m\cos nx+n\sin nx)+C,$$

és ha $n=1$, akkor áll :

$$4.)\quad \int e^{mx}dx\cos x=\frac{e^{mx}}{m^2+1}(m\cos x+\sin x)+C,$$

miből tehát az a) és b) alatti képletek hasznát látni lehet.

Egy harmadik eset e következő egészletnek a meghatározásában áll :

$$\int e^{mx}dx\sin^2x;$$

itt is $\sin x$ helyébe kitevős mennyiségek által kifejezett értéket helyettesítvén, nyerjük :

$$\sin^2x=\frac{1}{4}\left(2-e^{2x\sqrt{-1}}-e^{-2x\sqrt{-1}}\right),\text{ következőleg}$$

$$\int e^{mx}dx\sin^2x=\frac{e^{mx}}{2m}-\frac{1}{4}\int e^{ax}dx-\frac{1}{4}\int e^{\alpha x}dx,$$

hol $a=m+2\sqrt{-1}$ és $\alpha=m-2\sqrt{-1}$, ennek folytán áll szintén :

$$\int e^{mx}dx\sin^2x=\frac{e^{mx}}{2m}-\frac{\alpha e^{ax}+ae^{\alpha x}}{4a\alpha},$$

itt pedig a és α helyébe értékeit vissza helyezvén, lesz :

$$\int e^{mx}dx\sin^2x=\frac{e^{mx}}{2m}-\frac{e^{mx}}{2(m^2+1)}(m\cos 2x+2\sin 2x)+C,$$

mely egészlet még átalakítható, ha t. i. $\cos 2x$ és $\sin 2x$ helyébe az ismert értékek tétetnek, s ennek folytán lesz :

$$5.)\ \int e^{mx}dx\sin^2x = \frac{2e^{mx}}{m(m^2+4)} + \frac{e^{mx}\sin x(m\sin x - 2\cos x)}{m^2+4} + C.$$

Hasonló módon tárgyaltatik e következő negyedik eset is:

$$\int e^{mx}dx\cos^2x,$$

hol $\cos x$ helyébe az ismert kitevős értéket tévén, és hasonló műtételeket vivén véghez, nyerjük:

$$6')\ \int e^{mx}dx\cos^2x = \frac{2e^{mx}}{m(m^2+4)} + \frac{e^{mx}\cos x(m\cos x + 2\sin x)}{m^2+4}.$$

Czélszerü lesz most e következő általános egészletnek a tárgyalása:

$$\int e^{mx}dx\sin^n x,$$

melynek egészelése, mint látjuk, csak az n kitevőnek lenyomásától függ; egy e végre szolgáló lenyomási képlet pedig csak részletes egészelés által található, $\int udv = uv - \int vdu$ minta segitségével, melyben legelöször teendő:

$$e^{mx}dx = dv \quad \text{és} \quad \sin^n x = u, \quad \text{s lesz:}$$

$$v = \frac{e^{mx}}{m} \quad \text{és} \quad du = n\sin x^{n-1}dx\cos x,$$

miknek helyettesítése által kapjuk:

$$\int e^{mx}dx\sin^n x = \frac{e^{mx}\sin^n x}{m} - \frac{n}{m}\int dx.e^{mx}\sin x^{n-1}\cos x,$$

mely utolsó egészletet újra részletesen tárgyalván, tétessék:

$$e^{mx}dx = dv \quad \text{és} \quad \sin^{n-1}x\cos x = u, \text{ s lesz: } \quad v = \frac{e^{mx}}{m}, \text{ és}$$

$$du = (n-1)\sin^{n-2}xdx\cos^2x - dx\sin^n x,$$ Lásd Kul. Tág. 20^dik lap.

s ezeknek helyettesítése adja:

$$\int e^{mx}dx\sin^{n-1}x\cos x = \frac{e^{mx}\sin^{n-1}x\cos x}{m}$$

$$-\frac{n-1}{m}\int e^{mx}dx\sin x^{n-2}\cos^2 x + \frac{1}{m}\int e^{mx}dx\sin^n x,$$

hol $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ tétetvén, lesz még:

$$\int e^{mx}dx sinx^{n-1}cosx = \frac{e^{mx}sinx^{n-1}cosx}{m} - \frac{n-1}{m}\int e^{mx}dx sinx^{n-2} + \frac{n}{m}\int e^{mx}dx sin^n x,$$

minek helyettesítése a fenebbi képletben adja :

$$\frac{m^2+n^2}{m^2}\int e^{mx}dx sin^n x = \frac{e^{mx}sinx^{n-1}(msinx - ncosx)}{m^2} + \frac{n(n-1)}{m^2}\int e^{mx}dx sin^{n-2}x,$$

ebből pedig nyerjük :

$$7.)\quad \int e^{mx}dx sin^n x = \frac{e^{mx}sin^{n-1}x(msinx - ncosx)}{m^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{mx}dx sin^{n-2}x,$$

mely képlet segítségével az n kitevő két egységgel nyomatik alább, s így ha $n=2$, lesz :

$$\int e^{mx}dx sin^2 x = \frac{e^{mx}sinx(msinx - 2cosx)}{m^2+4} + \frac{2e^{mx}}{m(m^2+4)},$$

mint előbb már megtaláltuk. Ha pedig $n=1$, lesz :

$$\int e^{mx}dx sinx = \frac{e^{mx}(msinx - cosx)}{m^2+1},$$

mint már szintén ismeretes előttünk.

Hasonló módon pedig, ha szinte részletesen járunk el, e következő általános kifejezésre fogunk jutni :

$$8.)\quad \int e^{mx}dx cos^n x = \frac{e^{mx}cos^{n-1}x(mcosx + nsinx)}{m^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{mx}dx cosx^{n-2}.$$

mi által az n kitevő szinte két egységgel nyomatik alább.

Még nem lesz felesleges megmutatni, hogy az 1) és 2) alatti képletek szintén részletes egészelés által nyerhetők ; ugyanis az $\int e^{mx}dx sinnx$ egészletben tétessék :

$u = sinnx$ és $dv = e^{mx}dx$, lesz $du = ndx cosnx$, és $v = \frac{e^{mx}}{m}$,

mely értékek helyettesítése adja :

$$9.)\quad \int e^{mx}dx sinnx = \frac{e^{mx}sinnx}{m} - \frac{n}{m}\int e^{mx}dx cosnx,$$

ezen utolsó egészlet pedig, ha szintén részletesen tárgyaltatik, tévén $cosnx=u$, tehát $du=-ndxsinx$, s v és dv-nek előbbi értékeit megtartván, nyerjük :

$$10.)\ \int e^{mx}dxcosnx=\frac{e^{mx}cosnx}{m}+\frac{n}{m}\int e^{mx}dxsinnx,$$

mely érték helyettesitése adja :

$$\int e^{mx}dxsinnx=\frac{e^{mx}}{m^2+n^2}(msinnx-ncosnx)+C, \text{ mint előbb.}$$

Szintúgy járván el, nyerni fogjuk e következő képletet is :

$$\int e^{mx}dxcosnx=\frac{e^{mx}}{m^2+n^2}(mcosnx+nsinnx)+C,$$

mely szintén már az előbbiekben megtaláltatott. Ezen utolsó képlet az által is nyerhető, hogy a 10) alatti mintába a 9) alati mintának az értéke helyettesíttetik.

A HÁROMSZÖGTANI FÜGGVÉNYEK EGÉSZELÉSE.

33.) Valahányszor a változó külzelékének szorzója, ugyanazon változónak valamely háromszögtani függvénye : akkor ez háromszögtani külzeléknek neveztetik; az ilyféle külzelékek egészelése pedig, a háromszögtani függvények egészelését foglalja magában. Hogy ezen, különféle alakban előforduló háromszögtani külzelékeket annál könnyebben lehessen egészelni, e következő ismert alapegészleteket hozzuk elő :

$$1.)\ \int dxsinx=-cosx, \quad 2)\ \int dxcosx=sinx$$

$$3.)\ \int dxsinnx=-\frac{cosnx}{n}, \text{ és } 4)\ \int dxcosnx=\frac{sinnx}{n}.$$

Ezeknek előrebocsátása után, vegyük egészelendőnek e következő általános háromszögtani kifejezést :

$$\text{I.)}\ \int dxsin^mxcos^nx,$$

melynek egészelése részint az m, részint pedig az n kitevőnek lenyomásától függ; nem gyéren azonban azon eset is fordúl elő, hogy a kivánt egészelésnek véghez vitelére, ezen kitevők egyike lenyomandó, másika pedig nagyobbitandó. Az e czélra szolgáló általános képleteket, szinte csak részletes egészelés által lehet megtalálni; mi végre vegyük fel először, hogy az adott kifejezésnek egészelése az m kitevőnek lenyomásától függ, az n kitevő változatlanul ugyanaz maradván; akkor a fenebbi I) alatti kifejezést még igy is szabad írni:

$$\int dxsinx.sin^{m-1}xcos^{n}x,$$

erre pedig az általános $\int udv=uv-\int vdu$ képletet alkalmazván, tétessék:

$$dxsinx=dv, \text{ és } u=sin^{m-1}xcos^{n}x, \text{ következőleg}$$
$$v=-cosx, \text{ és } du=(m-1)dxsin^{m-2}xcos^{n+1}x$$
$$-nsin^{m}xcos^{n-1}xdx,$$

s mind ezeknek helyettesítése adja:

$$5.)\quad \int dxsin^{m}xcos^{n}x=-\frac{sin^{m-1}xcos^{n+1}x}{n+1}+$$
$$\frac{m-1}{n+1}\int dxsin^{m-2}xcos^{n+2}x,$$

mely kifejezésből látjuk, hogy általa az m kitevő lenyomható két egységgel, az n kitevő azonban ugyanannyi egységgel nagyobbítatott; ezen képlet tehát, e következő alaku esetekre jó sikerrel lesz alkalmazható:

$$\int dxsin^{3}xcos^{-2}x,$$

hol tehát $m=3$ és $n=-2$, s ennek folytán lesz:

$$\int dxsin^{3}xcos^{-2}x=\frac{sin^{2}x}{cosx}+2cosx=cosx+\frac{1}{cosx}.$$

Ha pedig oly képletet akarnánk megalapítni, melyben az m kitevő lenyomatik ugyan, de az n kitevő változatlan marad: akkor csak az előbbi 5) alatti képletben

$$cos^{n+2}x=cos^{n}x(1-sin^{2}x) \text{ teendő,}$$

és a kellő mütételek végbe vitele után nyerjük:

$$6.)\quad \int dxsin^{m}xcos^{n}x=-\frac{sin^{m-1}xcos^{n+1}x}{m+n}$$
$$+\frac{m-1}{m+n}\int dxsin^{m-2}xcos^{n}x,$$

hol, mint látjuk, az n kitevő ugyanaz maradt. Ezen minta segítségével e következő egészleteket nyerjük:

$$\int dx \sin^3 x \cos x = \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{4} + \frac{1}{2}\int dx \sin x \cos x.$$

$$\int dx \sin^2 x \cos x = \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + \frac{1}{3}\int dx \cos x,$$

$$\int dx \sin^4 x \cos x = \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{3}{5}\int dx \sin^2 x \cos x \text{ ..... s i. t.}$$

Következik most azon esetnek tárgyalása, ha a fenebbi 1) alatti kifejezés egészelése, az n kitevőnek lenyomásától függ, mi végre ezen kifejezés még így is írható :

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = \int dx \cos x . \sin^m x \cos^{n-1} x,$$

ezt pedig részletesen egészelvén, tétessék :

$$dv = dx \cos x, \text{ és } u = \sin^m x \cos^{n-1} x, \text{ s lesz :}$$

$$v = \sin x, \text{ és } du = m dx \sin^{m-1} x \cos^n x$$

$$-(n-1) dx \sin^{m+1} x \cos^{n-2} x,$$

miknek helyettesítése által kapjuk :

$$7.)\quad \int dx \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} +$$

$$\frac{n-1}{m+1}\int dx \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x,$$

mely képlet segítségével, ez n kitevő megint két egységgel nyomatik alább, áz m kitevő azonban ugyanannyi egységgel nagyobbítatik; ez tehát e következő alaku egészletek tárgyalására szolgál :

$$\int dx \sin^{-2} x \cos^3 x = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - 2\sin x = -\sin x - \frac{1}{\sin x}.$$

Ha pedig a 7) alatti képletben $\sin^{m+2} x = \sin^m x(1 - \cos^2 x)$ tétetik, akkor egy kevés összehúzás után nyerjük : $\sin^{m+2} x = \sin^m x \cdot \sin^2 x = \sin^m x . (1 - \cos^2 x)$ mivel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$8.)\quad \int dx \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} +$$

$$\frac{n-1}{m+n}\int dx \sin^m x \cos^{n-2} x,$$

hol tehát az n kitevő két egységgel nyomatik alább, az m kitevő ugyanaz maradván. Ezen képlet segítségével nyerjük :

$$\int dx \sin x \cos^3 x = \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{4} + \frac{1}{2}\int dx \sin x \cos x,$$

$$\int dx sinx cos^2 x = \frac{sin^2 x cos x}{3} + \frac{1}{3}\int dx . sinx \dots \text{s í. t.}$$

34.) Ha a 6) és 8) alatti képletek közöl az elsöben $2-m$ iratik m helyébe, a másodikban pedig $2-n$ tétetik n helyett: akkor a kellő rövidítés végbe vitele után, e következő két új mintát fogjuk kapni :

$$9.) \quad \int \frac{dx cos^n x}{sin^m x} = -\frac{cos^{n+1} x}{(m-1) sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{dx cos^n x}{sin^{m-2} x}, \text{ és}$$

$$10.) \quad \int \frac{dx sin^m x}{cos^n x} = \frac{sin^{m+1} x}{(n-1) cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{dx sin^m x}{cos^{n-2} x}.$$

E képletek segítségével e következő eseteket lehet tárgyalni :

$$\int \frac{dx cos x}{sin^3 x} = -\frac{cos^2 x}{2 sin^2 x} = -\frac{1}{2} cot^2 x$$

$$\int \frac{dx sin x}{cos^3 x} = \frac{sin^2 x}{2 cos^2 x} = \frac{1}{2} tg^2 x$$

$$\int \frac{dx sin^3 x}{cos^2 x} = \frac{sin^3 x}{cos x} - 3\int dx sin^3 x,$$

mely utólsó egészlet tárgyalását később fogjuk látni.

Ha a 6) alatti képletben $n=0$, és a 8) alatti képletben $m=0$ tétetik, e következő két mintát fogjuk nyerni :

$$11.) \quad \int dx sin^m x = -\frac{sin^{m-1} x cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx sin^{m-2} x, \text{ és}$$

$$12.) \quad \int dx cos^n x = \frac{sin x cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int dx cos^{n-2} x,$$

mely képletek segítségével az ily alaku egészletek $\int dx$ alakra hozatnak, ha az n vagy m páros számok, és $\int dx sin x$ vagy

$\int dx cos x$ alakra hozatnak, ha az n és m páratlan számok, mint e következő példákból fogjuk látni :

$$\int dx sin^3 x = -\frac{sin^2 x cos x}{3} + \frac{2}{3}\int dx sin x$$

$$\int dx cos^3 x = \frac{sin x cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int dx cos x$$

$$\int dx sin^2 x = -\frac{sin x cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx$$

$$\int dx cos^2 x = \frac{sin x cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx \text{..... s i. t.}$$

Ha a 11) alatti képletben $2-m$ iratik m helyett, a 12) alatti képletben pedig $2-n$ tétetik n helyébe : akkor, a kellő rövidítések végbe vitele után, két új mintát nyerünk úgymint :

$$13.)\quad \int \frac{dx}{sin^m x} = -\frac{cos x}{(m-1) sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{sin^{m-2} x}\text{; és :}$$

$$14.)\quad \int \frac{dx}{cos^n x} = \frac{sin x}{(n-1) cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{cos^{n-2} x},$$

mely képletek segítségével az m és n kitevők mindig két egységgel nyomatnak alább, de még sem lehetséges ezen kitevőket 0-ig, hanem csak egyig lenyomni, mint a következő példákból lehet látni : áll ugyanis :

$$\int \frac{dx}{sin^3 x} = -\frac{cos x}{2 sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{sin x}, \quad \text{és}$$

$$\int \frac{dx}{cos^3 x} = \frac{sin x}{2 cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{cos x},$$

mely két végegészletet más úton kell keresni. Ha pedig a kitevők páros számok, akkor az egészlet teljesen meghatározható, áll t. i.

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -cot x, \quad \text{és} \quad \int \frac{dx}{cos^2 x} = tg x.$$

A fenebbi két végegészlet meghatározására, ha mindjárt az elsőt tárgyalás alá veszszük, azt még így is írhatni :

$$\int \frac{dx}{sin x} = \int \frac{dx sin x}{sin^2 x} = \int \frac{d.(-cos x)}{1 - cos^2 x},$$

itt pedig $cosx=y$ tétetvén, lesz : $d.(-cosx)=-dy$, és

$$1-cos^2x=1-y^2,$$

s ezeknek helyettesítése adja :

$$\int\frac{dx}{sinx}=-\int\frac{dy}{1-y^2}=\frac{1}{2}log\frac{1-y}{1+y}=log\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}};$$

a háromszögtan elvei szerint tehát :

$$15.)\quad \int\frac{dx}{sinx}=logtg\frac{1}{2}x+C.$$

A második végegészlet tárgyalása végett, azt még így is írhatni :

$$\int\frac{dx}{cosx}=\int\frac{dxcosx}{cos^2x}=\int\frac{d(sinx)}{1-sin^2x}$$

hol $sinx=y$ tétetvén, lesz $d.(sinx)=dy$, következőleg

$$\int\frac{dx}{cosx}=\int\frac{dy}{1-y^2}=log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}=log\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}};$$

mivel pedig a háromszögtan elvei szerint könnyü bebizonyítni, hogy

$$\frac{1+sinx}{1-sinx}=tg^2\left(45+\frac{1}{2}x\right),$$

a kérdéses egészlet lesz :

$$16.)\quad \int\frac{dx}{cosx}=logtg\left(45+\frac{1}{2}x\right)+C.$$

Az előbbi képletek alkalmazásánál nem gyéren e következő alakokra jutunk :

$$\int\frac{dxsinx}{cosx},\quad \int\frac{dxcosx}{sinx},\quad \text{és}\quad \int\frac{dx}{sinxcosx},$$

melyeket nyilván külön úton kell meghatározni ; ezen út pedig e következő : Az első egészletre nézve t. i. áll :

$$\int\frac{dxsinx}{cosx}=\int\frac{d.(-cosx)}{cosx}=-\int\frac{dz}{z},$$

ha t. i. $cosx=z$ tétetik ; lesz tehát :

$$17.)\quad \int\frac{dxsinx}{cosx}=-logcosx+C.$$

A második egészletet illetőleg, azt így is írhatni :

$$\int\frac{dxcosx}{sinx}=\int\frac{d.(sinx)}{sinx}=\int\frac{dz}{z},\quad \text{ha t. i. } sinx=z,$$

s ennek folytán áll :

$$18.)\quad \int\frac{dxcosx}{sinx}=logsinx+C.$$

Végre a harmadik egészlet meghatározására, mind számlálóját mind nevezőjét cos^2x-el kell osztani, s nyerjük :

$$\int\frac{dx}{sinxcosx}=\int\frac{d(tgx)}{tgx}=\int\frac{dz}{z},\quad \text{ha t. i. } tgx=z,$$

s ennek következtében lesz :

$$19.)\quad \int\frac{dx}{sinxcosx}=logtgx+C.$$

Hátra van még e következő háromszögtani alakok egészelése :

$$a.)\quad \int dxsinnxcosmx,$$

$$b)\quad \int dxcosnxcosmx,\quad \text{és}\quad c)\quad \int dxsinnxsinmx;$$

mind ezeknek egészelése végett szükség lesz, az itten előforduló szorzatokat összeggé változtatni, mi végre a háromszögtan elvei szerint áll :

$$sinnxcosmx=\frac{1}{2}sin(n+m)x+\frac{1}{2}sin(n-m)x;$$

az első a) alatti egészlet tehát így áll :

$$\int dxsinnxcosmx=\frac{1}{2}\int dxsin(n+m)x+\frac{1}{2}\int dxsin(n-m)x,$$

mely egészlet már ismeretes levén, áll :

$$20.)\quad \int dxsinnxcosmx=-\frac{cos(n+m)x}{2(n+m)}-\frac{cos(n-m)x}{2(n-m)}+C.$$

A b) alatti egészletet illetőleg ismeretes, hogy áll :

$$Cosnxcosmx=\frac{1}{2}cos(n+m)x+\frac{1}{2}cos(n-m)x,\quad \text{következőleg}$$

$$\int dxcosnxcosmx=\frac{1}{2}\int dxcos(n+m)x+\frac{1}{2}\int dxcos(n-m)x,$$

mely két egészlet már megint ismeretes, áll tehát :

$$21.)\quad \int dx\cos nx\cos mx=\frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}+\frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}.$$

Végre a c) alatti harmadik egészletet illetőleg, áll :

$$\sin nx\sin mx=\frac{1}{2}\cos(n-m)x-\frac{1}{2}\cos(n+m)x,\quad \text{tehát :}$$

$$\int dx\sin nx\sin mx=\frac{1}{2}\int dx\cos(n-m)x,$$

$$-\frac{1}{2}\int dx\cos(n+m)x\text{, avagy :}$$

$$22.)\quad \int dx\sin nx\sin mx=\frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}-\frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}.$$

Ide tartozik még e következő háromszögtani alak :

$$\int dx\sin x\cos x,$$

melyre nézve áll :

$$\int dx\sin x\cos x=\frac{1}{2}\int dx\sin 2x=-\frac{1}{4}\cos 2x,$$

és $\cos 2x$ helyébe értékét téve, lesz :

$$23.)\quad \int dx\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin^2x-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^2x+C.$$

Ha a 33-ik szám 5) alatti mintájában n nemlegesnek vétetik, akkor e következő eredményre jutunk :

$$\int\frac{dx\sin^m x}{\cos^n x}=\frac{\sin^{m-1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{m-1}{n-1}\int\frac{dx\sin^{m-2}x}{\cos^{n-2}x},$$

itt pedig $m=n$ tétetvén, nyerjük :

$$24.)\quad \int dx\,tg^n x=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-\int dx\,tg^{n-2}x,$$

mely képlet segítségével az adott alaku egészlet teljesen meghatározható, mert ha n páros szám, akkor áll :

$$\int dx\,tg^2x=tgx-x,$$

ha pedig n páratlan szám, akkor nyerjük :

$$\int dx\,tg^3x=\frac{1}{2}tg^2x-\int dx\,tgx,$$

mely végegészlet már ismeretes előttünk. Ha pedig az adott kitevő nagyobb lenne, akkor csak a 24) alatti képletet többször egymásután kell alkalmazni. Ha ugyane képletben $(2-n)$ iratik n helyébe, e következő új mintát fogjuk kapni :

$$25.)\quad \int\frac{dx}{tg^n x}=-\frac{1}{(n-1)tg^{n-1}x}-\int\frac{dx}{tg^{n-2}x},$$

mely képlet által az n kitevő egyig lenyomható, áll ugyanis :

$$\int\frac{dx}{tg^2x}=-\frac{1}{tgx}-x,$$

ha pedig a kitevő páratlan szám, akkor áll :

$$\int\frac{dx}{tg^3x}=-\frac{1}{2tg^2x}-\int\frac{dx}{tgx},$$

mely utolsó egészlet szintén már ismeretes előttünk, minthogy $\int\frac{dx}{tgx}=\int\frac{dxcosx}{sinx}$, minek értéke az előbbiekben már megtaláltatott.

35.) **(Kevert egészletek.)** Itt olyan egészleteket kell érteni, melyek a háromszögtani, és más nemü függvényekből összekevervék. Az első itt tárgyalandó alak e következő :

$$\text{a)}\quad \int x^r dxsinnx,$$

melynek első megtekintéséből látjuk, hogy egészelése egyedül csak az r kitevőnek a lenyomásától függ ; egy e végre szolgáló képlet pedig szintén részletes egészelés által nyerhető ; ha t. i. az $\int udv=uv-\int vdu$ mintába tétetik $x^r=u$ és $dv=dxsinnx$, lesz : $du=rx^{r-1}dx$, és $v=-\frac{cosnx}{n}$, miknek helyettesítése adja :

$$\int x^r dxsinnx=-\frac{x^r cosnx}{n}+\frac{r}{n}\int x^{r-1}dxcosnx,$$

mely képlet által az r kitevő már egygyel alább nyomatik, de mivel mellette $cosnx$ szorzó fordúl elő, ezen utolsó egészletet még egyszer szükséges lesz tárgyalni a mi általános képletünk szerint, mi végre teendő : $x^{r-1}=u$ és $dv=dxcosnx$, s lesz $du=(r-1)r^{r-2}dx$, és $v=\frac{sinnx}{n}$, s ezeknek helyettesítéséből ered :

$$\int x^{r-1}dxcosnx=\frac{x^{r-1}sinnx}{n}-\frac{r-1}{n}\int x^{r-2}dxsinnx,$$

mely értéket az előbbi képletbe helyettesítvén, nyerni fogjuk :

$$26.)\quad \int x^r dx sinnx = \frac{x^{r-1}}{n^2}(rsinnx - nxcosnx)$$

$$-\frac{r(r-1)}{n^2}\int x^{r-2}dx sinnx,$$

mely minta segítségével már az r kitevő két egységgel nyomatik alább, és hogy ugyanaz lenyomható 0-ig, e következő példákból fogjuk látni : áll ugyanis

$$\int x^2 dx sinnx = \frac{x}{n^2}(2sinnx - nxcosnx) + \frac{1}{n^2}cosnx, \text{ és}$$

$$\int xdx sinnx = \frac{1}{n^2}(sinnx - nxcosnx).$$

A következő egészelendő alak nyilván ez :

$$b)\quad \int x^r dx cosnx,$$

melynek egészelése szintén csak az r kitevőnek lenyomásától függ, mi végre ezen egészlettel szintúgy kell eljárni, mint az előbbi esetben, s így e következő általános képletre fogunk jutni :

$$27.)\quad \int x^r dx cosnx = \frac{x^{r-1}}{n^2}(rcosnx + nxsinnx)$$

$$-\frac{r(r-1)}{n^2}\int x^{r-2}dx cosnx,$$

mely képlet szerint az r kitevő szintén 0-ig lenyomható, ugyanis áll :

$$\int x^2 dx cosnx = \frac{x}{n^2}(2cosnx + nxsinnx) - \frac{2}{n^2}\int dx cosnx,$$

mely utolsó egészlet már ismert alaku ; áll továbbá :

$$\int xdx cosnx = \frac{1}{n^2}(cosnx + nxsinnx).$$

36.) **(Körméreti függvények egészelése.)** Hogy ezen külzeléki függvények egészeléséről is kellő fogalmat nyerhessünk, itt e következő eseteket hozzuk elő :

$$(1\text{-ső eset.})\quad \int dx(arcsinx)^n,$$

melynek egészelése mint látjuk, csak az n kitevő lenyomásától függ, e végre pedig az ismert részletes egészelési képletet használván, tétessék $dv=dx$, és $u=(arcsinx)^n$, s lesz $v=x$ és

$$du=n(arcsin x)^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

miknek helyettesítéséből ered :

$$\int dx(arcsinx)^n=x(arcsinx)^n-n\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}(arcsinx)^{n-1}.$$

Ezen utolsó egészlet pedig, ha újra tárgyaltatik részletesen, tenni kell :

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=dv,\text{ és } u=(arcsinx)^{n-1},\text{ s lesz :}$$

$$v=-\sqrt{1-x^2},\text{ és } du=(n-1)(arcsinx)^{n-2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

s ezeknek folytán nyerjük :

$$n\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-n\sqrt{1-x^2}\,(arcsinx)^{n-1}$$

$$+n(n-1)\int dx(arcsinx)^{n-2},$$

mely értéket az előbbi képletbe tévén, ered ;

$$1.)\quad \int dx(arcsinx)^n=(arcsinx)^{n-1}[xarcsinx+n\sqrt{1-x^2}]$$

$$-n(n-1)\int dx(arcsinx)^{n-2},$$

s ezen képlet segítségével az n kitevő mindig két egységgel nyomatik alább, általa tehát az ilyen alaku egészletek teljesen meghatározvák; áll ugyanis :

$$\int dx(arcsinx)^2=arcsinx(xarcsinx+2\sqrt{1-x^2})-2x,\quad\text{és}$$

$$\int dx(arcsinx)=x.arcsinx+\sqrt{1-x^2}.$$

Ha pedig az 1) alatti képlet utolsó egészletére, az általános egészelési mintát folytatva alkalmazzuk, akkor e következő kifejezésre fogunk jutni :

$$2.)\quad \int dx(arcsinx)^n=(arcsinx)^n\Big[x+\frac{n\sqrt{1-x^2}}{arcsinx}$$

$$-\frac{n(n-1)x}{(arcsinx)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(arcsinx)^3}+\ldots\ldots$$

Hasonló módon kell tárgyalni a következő második esetet is :

$$(\text{2-ik eset.})\quad \int dx(arccosx)^n,$$

melyben teendő : $(arccosx)^n=u$, és $dx=dv$, s lesz $v=x$, és

$$du=-n(arccosx)^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

miknek helyettesítéséből ered :

$$\int dx(arccosx)^n=x(arccosx)^n+n\int(arccosx)^{n-1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},$$

mely végegészlet, ha újra tárgyaltatik képletünk szerint, teendő :

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=dv,\quad \text{és}\quad (arccosx)^{n-1}=u,\ \text{s lesz :}\quad v=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{és}\quad du=-(n-1)(arccosx)^{n-2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

s ezeknek helyettesítése adja :

$$3.)\ \int dx(arccosx)^n=(arccosx)^{n-1}.(x.arccosx-n\sqrt{1-x^2})$$

$$-n(n-1)\int dx(arccosx)^{n-2},$$

mely képlet segítségével az n kitevő megint két egységgel nyomatik alább. Ezen képlet szerint áll :

$$\int dx(arccosx)^3=(arccosx)^2(x.arccosx-3\sqrt{1-x^2}$$

$$-6\int dx.arccosx,\quad \text{és végre :}$$

$$\int dx(arccosx)=x.ar.cosx-\sqrt{1-x^2}.$$

Ha pedig a fenebbi 3) egyenletnek végegészletére folytatva alkalmazzuk a részletes egészelést, nyerjük :

$$4).\ \int dx(arccosx)^n=(arccosx)^n.\Big[x-\frac{n\sqrt{1-x^2}}{arccosx}-\frac{n(n-1)x}{(arccosx)^2}+$$

$$\left.\frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(arccos x)^3}+\ldots\ldots\right]$$

Legyen meghatározandó e következő kevert egészlet:

$$(3\text{-dik eset.})\quad \int x^m dx arcsin x,$$

melynek egészelése az m kitevőnek lenyomásától függ; a részletes egészelést itt is alkalmazván, tétessék:

$$dv = x^m dx \quad \text{és} \quad u = arcsin x, \quad \text{s lesz:}$$

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad \text{és} \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

s ezeknek folytán nyerjük:

$$5).\quad \int x^m.dx.arsin x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot arcsin x - \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

mely utolsó egészletet már meg tudjuk határozni; ha e képletben $m=0$ tétetik, nyerjük:

$$\int dx arcsin x = x arcsin x + \sqrt{1-x^2}, \text{ mint előbb.}$$

Hasonló módon kell eljárni a következő egészlettel is:

$$(4\text{-dik eset.})\quad \int x^m dx arctg x,$$

hol: $x^m dx = dv$ és $arctg x = u$ tétetvén, lesz:

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad \text{és} \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \text{ tehát:}$$

$$6).\quad \int x^m dx arctg x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot arctg x - \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}dx}{1+x^2},$$

s ezen utolsó egészlet megint ismeretes előttünk, ha e képletben $m=0$ tétetik, nyerjük:

$$\int dx.arctg x = x arctg x - \frac{1}{2}log(1+x^2),$$

ha pedig m helyébe nagyobb szám tétetnék; akkor csak a végegészlet más, de az ismert módon lesz tárgyalandó.

Vegyük elő még e következő egészletek tárgyalását:

$$(1\text{-ször.})\quad \int\frac{dx arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$$

akkor erre is a részletes egészelési módot alkalmazván, tétessék:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dv \text{ és } arcsinx=u\text{, s lesz :}$$

$$v=arcsinx\text{, és } du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

s mindezeknek folytán :

$$\int\frac{dxarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}=(arcsinx)^2-\int\frac{dx.arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}\text{, miből :}$$

$$7).\quad \int\frac{dxarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(arcsinx)^2+C.$$

Szintúgy kell eljárni e következő egészletnél is :

$$(2\text{-szor.})\quad \int\frac{dxarctgx}{1+x^2},$$

melyre nézve teendő : $arctgx=u$ és $\frac{dx}{1+x^2}=dv$, s lesz :

$$du=\frac{dx}{1+x^2}\text{, és } v=arctgx\text{, következőleg :}$$

$$\int\frac{dxarctgx}{1+x^2}=(arctgx)^2-\int\frac{dxarc.tgx}{1+x^2},$$

miből nyilván nyerjük :

$$8).\quad \int\frac{dxarctgx}{1+x^2}=\frac{1}{2}(arctgx)^2+C.$$

Következik most ezen egészletnek tárgyalása :

$$(3\text{-szor.})\quad \int\frac{xdxarcsinx}{\sqrt{1-x^2}},$$

melyben $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=dv$ és $arcsinx=u$ tétetvén, lesz :

$$v=-\sqrt{1-x^2}\text{ és } du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\text{, s ennek folytán :}$$

$$9).\quad \int\frac{xdxarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}(arcsinx)+x.$$

Meghatározandó legyen továbbá :

$$(4\text{ szer.})\quad \int\frac{x^2dxarcsinx}{\sqrt{1-x^2}};$$

akkor itt $\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=dv$ és $arcsinx=u$ tétetvén, lesz :

$$du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\text{ és } v=-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}arcsinx,$$

s mindezeknek folytán :

$$10).\int\frac{x^2dxarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}=-arcsinx\left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}-\frac{1}{4}arcsinx\right)+\frac{x^2}{4},$$

miből már eléggé láthatni, miként tárgyalandók az ilyen alaku egészletek.

Ha tehát általánosan véve adatnék :

$$\int Xdxarcsinx,$$

akkor ennek egészelése végett teendő : $Xdx=dv$ és $arcsinx=u$, s lesz : $v=\int Xdx=X'$ és $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, hol X valamint X' is x-nek meghatározott függvénye. Ezek folytán lesz :

$$11).\int Xdxarcsinx=X'arcsinx-\int\frac{X'dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hasonló módon találtatik szintén :

$$12).\int Xdxarctgx=X'arctgx-\int\frac{X'dx}{1+x^2},$$

és az e képletekben előforduló végegészletek már ismert alakkal bírván, könnyen egészelhetők.

37). **(Még némely háromszögtani külzelékek egészelése.)** Az ide tartozó egészletek egyike e következő :

$$\text{(1-ször.)}\quad\int\frac{dx}{a^2-b^2cos^2x},$$

melynek egészelése semmi nehézséggel sem jár, egészletének meghatározására t. i. csak a 7)-dik szám 21) alatti képletében teendő : $\alpha=\gamma=1$, és x változó $cosx$-el felcserélendő, tehát $-dxsinx$ teendő dx helyébe, s mivel ez esetben

$-v'=a^2-b^2$, nyerjük :

$$\int\frac{-dxsinx}{(a^2-b^2cos^2x)sinx}=\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}arctg\frac{cosx\sqrt{a^2-b^2}}{asinx},$$

avagy rövidebben :

$$1).\int\frac{dx}{a^2-b^2cos^2x}=-\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}arctg\frac{cosx\sqrt{a^2-b^2}}{asinx}.$$

Ha pedig tekintetbe vétetik az, hogy :

$$-arctg\frac{m}{n}=arccot\frac{m}{n}=arctg\frac{n}{m},$$

ennek folytán könnyü módon e következő egészletet kapjuk:

$$1).\ \int\frac{dx}{a^2-b^2cos^2x}=\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}arctg\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}tgx+C,$$

mely képlet azonban csak azon esetre használható, ha $a^2>b^2$, ellenkező esetben ezen egészlet képzetessé válik. Hogy tehát a második esetre nézve is egy képletet kapjunk, a fen előhozott helyettesítés vitessék véghez a 7-dik szám 23) alatti képletében is, akkor e következő mintát nyerjük:

$$2).\ \int\frac{dx}{a^2-b^2cosx^2}=\frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}}log\frac{1-\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}tgx}{1+\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}tgx}+C.$$

Végre ugyanazon helyettesítést véghezvivén a 7)-dik szám 25) alatti képletében is, e következő eredményre jutunk:

$$3).\ \int\frac{dx}{a^2+b^2cos^2x}=\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}arctg\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}tgx+C.$$

Ezen utolsó egészletből egy új egészletet lehet kapni az által, ha $\frac{x}{2}$ tétetik x helyébe, áll t. i.

$$\int\frac{dx}{2(a^2+b^2cos^2\frac{1}{2}x)}=\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}arctg.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}tg\frac{1}{2}x,$$

tekintetbe vévén továbbá azt, hogy:

$cos^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cosx$, egyszersmind pedig

$2a^2+b^2=\alpha$ és $b^2=\beta$ tétetvén, lesz:

$$b=\sqrt{\beta},\ \text{és}\ a=\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2}}\ \text{és}\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

mindezeknek folytán nyerni fogjuk:

$$4).\ \int\frac{dx}{\alpha+\beta cosx}=\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}arctg\cdot\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}}tg\frac{1}{2}x+C,$$

s ez egy egészen új egészlet, mely azonban csak azon esetre használható, ha $\alpha>\beta$, ellenkező esetre egy új egészletet kell megalapítnunk; mi végre megfontolandók e következők:

Ha t. i. a 32)-dik szám a) és b) alatti képleteiben $n=1$

tétetik, és az így nyert kifejezések egymással elosztatnak, akkor a kellő műtételek végbevitele után nyerni fogjuk :

$$x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}log\frac{1+\sqrt{-1}tgx}{1-\sqrt{-1}tgx},$$

hol $tgx=u$ tétetvén, lesz :

$$arctgu=\frac{1}{2\sqrt{-1}}log\frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}},$$

itt végre $u\sqrt{-1}$ tétetvén u helyébe, ered :

$$arctgu\sqrt{-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}log\frac{1-u}{1+u}.$$

Ez meglévén, tétessék most :

$$u=\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}}tg\frac{1}{2}x,\text{ tehát : } u\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{\sqrt{\alpha+\beta}}tg\frac{1}{2}x,$$

akkor a fenebbi 4) alatti képlet átmegy ebbe :

$$5).\quad\int\frac{dx}{\alpha+\beta cosx}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}log\frac{1+\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{\sqrt{\beta+\alpha}}.tg\frac{1}{2}x}{1-\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{\sqrt{\beta+\alpha}}tg\frac{1}{2}x}+C,$$

mely egészlet már azon esetre használható, ha $\beta>\alpha$.

Minthogy továbbá $1+cosx=2cos^2\frac{1}{2}x$, nyerni fogjuk :

$$6).\quad\int\frac{dx}{1+cosx}=tg\frac{1}{2}x+C.$$

Hasonló módon áll szintén :

$$7).\quad\int\frac{dx}{1-cosx}=-cot\frac{1}{2}x+C.$$

A következő két egészlet szintén könnyen megmagyarázható :

$$\int\frac{dx}{1+sinx}\text{ és }\int\frac{dx}{1-sinx};$$

az elsejét így is szabad írni :

$$\int\frac{dx}{1+sinx}=\int\frac{dx(1-sinx)}{cos^2x}=\int\frac{dx}{cos^2x}-\int\frac{dxsinx}{cos^2x},$$

mely két egészlet már ismeretes előttünk. Hasonló módon áll ;

$$\int\frac{dx}{1-sinx}=\int\frac{dx(1+sinx)}{cos^2x}=\int\frac{dx}{cos^2x}+\int\frac{dxsinx}{cos^2x},$$

mely egészletek szintén ismeretesek.

Vegyük elő még e következő egészlet meghatározását :

$$\int\frac{dxsinx}{a+bcosx};$$

akkor könnyü belátni, hogy ennek az értéke helyettesítés által nyerhető, tévén t. i.

$$a+bcosx=z,\ \text{lesz}\ dxsinx=-\frac{dz}{b},\ \text{tehát :}$$

$$\int\frac{dxsinx}{a+bcosx}=-\frac{1}{b}\int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{b}logz=-\frac{1}{b}log(a+bcosx)+C;$$

ha pedig ezen egészlet $x=0$ esetben elenyésznék, áll :

$$0=-\frac{1}{b}log(a+b)+C,\ \text{miből}\ C=\frac{1}{b}log(a+b),$$

következőleg

$$8).\ \int\frac{dxsinx}{a+bcosx}=\frac{1}{b}log\frac{a+b}{a+bcosx}.$$

Ha végre e következő kifejezés adatnék :

$$\int\frac{dxcosx}{a+bcosx},$$

akkor dx együtthatójának valóban véghezvitt osztása által kapjuk :

$$\int\frac{dxcosx}{a+bcosx}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bcosx},$$

mely utolsó egészlet már az előbbiekben megtaláltatott.

A háromszögtani függvények egészelésének befejezésére érdekes lesz, még egy, e következő esetre szolgáló lenyomási képletet származtatni :

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta cosx)^m}.$$

E végre szükséges lesz, a 25)-dik szám L) alatti képletében tenni : α-át a helyébe, β-át b helyébe, $(cosx)$ et x helyébe, továbbá : $\alpha'=1\beta'=0$ és $\gamma'=-1$, s lesz : $A=\beta^2-\alpha^2$, és $B=2\alpha$, s így nyerni fogjuk :

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta cosx)^m}=\frac{\beta sinx}{(m-1)(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta cosx)^{m-1}}$$
$$-\frac{(2m-3)\alpha}{(m-1)(\beta^2-\alpha^2)}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta cosx)^{m-1}}+$$
$$\frac{m-2}{(m-1)(\beta^2-\alpha^2)}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta cosx)^{m-2}},$$

mely képlet segítségével már az m kitevőnek lenyomása kieszközölhető, áll ugyanis például :

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta cosx)^2}=\frac{\beta sinx}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta cosx)}+\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\int\frac{dx}{\alpha+\beta cosx},$$

mely végegészlet már ismeretes. Ha pedig az adott kitevő nagyobb lenne, akkor csak a megtalált képletet többször egymásután kell alkalmazni.

FELSŐBB KÜLZELÉKEK EGÉSZELÉSE.

38.) A külzeléki hánylatból ismeretes előttünk, hogy ha $y=f(x)$ egy adott függvény, akkor ennek első külzeléke $dy=f'(x)dx$ alakban kellőleg terjesztetik elő ; ugyanazon függvénynek második és még magasb rendü külzelékei pedig e következő alakokban fordúlnak elő :

$$d^2y=f''(x)dx^2, \qquad d^3y=f'''(x)dx^3,$$
$$d^4y=f^{IV}(x)dx^4, \qquad d^5y=f^{V}(x)dx^5,$$

s általánosan véve :

$$d^ny=f^n(x)dx^n.$$

Miként egészelendő valamely függvénynek első rendü külzeléke, már az előbbiekben elég bőven megmutattatott ; most tehát feladatunk lesz, megmutatni, miként kell valamely magasb rendü külzeléket egészelnünk. Mivégre főleg azt kell megjegyeznünk, hogy valamely függvény magasb rendü külzelékei nem egyszerre, hanem csak fokonkinti külzelés által találtatnak meg, mely körülmény a magasb rendü külzelékek egészelésénél szinte kellő tekintetbe veendő; azaz, valamint az n-dik rendü külzelék csak a függvény n-szeres egymásutáni külzelése által volt nyerhető, úgy egy adott n-dik rendü külzelék egészelése szintén csak n-szeres egymásutáni egészelés által fog nyeretni, mi miatt az itteni eljárás ismételt egészelésnek neveztetik.

Ezen eljárás kellő felfogására legczélszerübb lesz, itt legelőször a másod rendü külzelékek egészelését bemutatni, s így fokonkint a magasb rendü külzelékek egészelésére átmenni. Legyen tehát :

a.) $\frac{d^2y}{dx^2}=X$ az egészelendő másod rendü külzelék,

melyben X alatt x-nek valamely függvényét kell érteni; akkor azt nyilván még így is írhatni :

$$\frac{d^2y}{dx}=Xdx,$$

az egészelési szabályok szerint tehát áll :

$$\frac{dy}{dx}=\int Xdx+A,$$

hol A az első egészelésnek tetszésszerinti állandója. Ezen egyenletből pedig e következő származik :

$$dy=dx\int Xdx+Adx,$$

következőleg

$$y=\int dx\int Xdx+Ax+A',$$

hol A' az egészelésnek második tetszésszerinti állandója. Ezen kifejezésből pedig egyszersmind világosan látjuk, miként véghez-viendő a kettős egymásutáni egészelés. Az utolsó egyenletet azonban könnyü módon lehet úgy átalakítni, hogy benne a kettős egészelési jegy ne fordúljon elő; mi végre az

$$\int udv=uv-\int vdu$$

képletet használván, tétessék :

$$dx=dv, \text{ és } \int Xdx=u, \text{ tehát } v=x \text{ és } du=Xdx,$$

miknek helyettesítése adja :

$$\int dx\int Xdx=x\int Xdx-\int Xxdx,$$

s ennek helyettesítéséből ered ;

$$1.)\quad y=x\int Xdx-\int xXdx+Ax+A',$$

ez pedig azon általános képlet, melynek segítségével a másod rendü külzelékek mindig egészelhetők, ha X mint x-nek függvénye adatik. E következő példákból ennek alkalmazását fogjuk látni.

(1-ső Példa.) Legyen :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=X,$$

akkor áll :

$$y=x\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+Ax+A',\quad \text{avagy :}$$

$$y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+Ax+A'$$

mint $d^2y=\frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}}$ külzeléki kifejezésnek egészlete.

(2-ik Példa.) Legyen adva :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x\sin x=X,$$

akkor ezen értéket az általános 1) alattti képletbe tévén, lesz :

$$y=x\int xdx\sin x-\int x^2dx\sin x+Ax+A',$$

mivel pedig : I $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int xdx\sin x=\sin x-x\cos x,\quad \text{és :}$$

$$\int x^2dx\sin x=2x\sin x-x^2\cos x+2\cos x,$$ I

nyerni fogjuk :

$$y=-x\sin x-2\cos x+Ax+A',$$

s ez az adott külzelék teljes egészlete.

Ezen tárgy további folytatására, vegyük egészelendőnek e következő másod rendü külzeléket :

$$b)\quad \frac{d^2y}{dx^2}=P,$$

hol P alatt $\frac{dy}{dx}=y'$ külzeléki hányadosnak a függvényét kell érteni ; akkor ezen egyenletet a külzeléki szabályok szerint így is szabad írni :

$$\frac{dy'}{dx}=P, \text{ miből } dx=\frac{dy'}{P},$$

következőleg :

$$2.) \quad x=A+\int\frac{dy'}{P}$$

hol A az egészelésnek tetszésszerinti állandója. Mivel továbbá áll :

$$dy=y'dx=\frac{y'dy'}{P},$$

áll szinte :

$$3.) \quad y=B+\int\frac{y'dy'}{P},$$

ha pedig a most nyert 2) és 3) alatti egyenletekből y' mennyiség kiküszöböltetik, támadni fog egy, x és y közötti egyenlet, mely az eredetileg adott egyenlet egészletének lesz tekintendő, melyben A és B a kettős egészelésnek tetszésszerinti állandói lesznek.

Adva legyen továbbá e következő másod rendü külzeléki hányados :

$$c) \quad \frac{d^2y}{dx^2}=Y,$$

hol meg kell jegyeznünk, hogy Y mennyiség y-nak valamely függvénye, akkor ezt egészelés végett, $2dy$-nal kell szorozni, mi által nyerjük :

$$\frac{2dy.d^2y}{dx^2}=2Ydy,$$

mely kifejezésnek első megtekintéséből látjuk, hogy ennek bal része $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ mennyiségnek külzeléke, minek folytán szabad lesz azt még így is írni :

$$d.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2Ydy, \text{ következőleg } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int Ydy+C,$$

s így :

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{C+2\int Ydy}, \text{ miből kapjuk :}$$

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{C+2\int Ydy}}, \text{ tehát: } x=\int\frac{dy}{\sqrt{C+2\int Ydy}}+B,$$

s így az egészelés megtörtént úgy, hogy x változó y által van kifejezve, mely egyenletből azután y is kifejezhető x által. Vegyük fel példában, hogy $Y=ky$, akkor áll :

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{C+ky^2}}+B,$$

minek egészlete e következő :

$$x=\frac{1}{\sqrt{k}}log(y\sqrt{k}+\sqrt{C+ky^2})+C.$$

Hogy pedig y-t x által lehessen kifejezni, ezen egyenlet még így is írható :

$$x\sqrt{k}-B\sqrt{k}=log(y\sqrt{k}+\sqrt{C+ky^2x}),$$

és ha e a természetes logarithmusok alapszáma, akkor áll :

$$e^{x\sqrt{k}-B\sqrt{k}}=y\sqrt{k}+\sqrt{C+ky^2},$$

ha pedig $e^{-B\sqrt{k}}$ állandó mennyiséget B'-el jegyezzük, lesz még :

$$B'\sqrt{k}e^{x\sqrt{k}}-y\sqrt{k}=\sqrt{C+ky^2},$$

mit négyzetre emelvén, s összehúzván, lesz :

$$2B'\sqrt{k}e.^{x\sqrt{k}}y=B'^2e^{2x\sqrt{k}}-C,$$

hol ha rövidség okáért tétetik : $\frac{B'\sqrt{k}}{2}=B$, és $-\frac{C}{2B'\sqrt{k}}=A$,

lesz még :

$$y=Be^{x\sqrt{k}}+Ae^{-x\sqrt{k}},$$

mely kifejezés az adott egyenlet egészletének tekintendő.

Ha pedig a c) alatti kifejezésben $Y=-ky$ vétetnék lesz :

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{C-ky^2}}+B,$$

minek egészlete ez :

$$x=\frac{1}{\sqrt{k}}arc.sin\frac{y\sqrt{k}}{\sqrt{C}}+B\ ;$$

hogy pedig y változó x-nek függvényében fejeztessék ki, a jelen egyenletből kapjuk :

$$(x-B)\sqrt{k}=arcsin\frac{y\sqrt{k}}{\sqrt{C}},\quad \text{tehát}\quad y=\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{k}}sin(x-B)\sqrt{k},$$

itt pedig az ivek különbségének sinusát kifejtvén, és rövidség okáért tévén :

$$\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{k}}\cos B\sqrt{k}=A, \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{k}}\sin B\sqrt{k}=-B,$$

nyerni fogjuk :

$$y=A\sin x\sqrt{k}+B\cos x\sqrt{k},$$

mely a $\frac{d^2y}{dx^2}=-ky$ kifejezésnek egészlete.

39.) **(A harmad rendü külzelékek egészelése.)** Megértvén az előrebocsátott 2-sod rendü külzelékek egészelését, a következő harmad és még magasb rendü külzelékek egészelése sem jár semmi nehézséggel. Ugyanis, legyen egészelendő e következő függvény :

$$\text{a).} \quad \frac{d^3y}{dx^3}=X, \quad \text{avagy} \quad d^3y=Xdx^3,$$

hol X, x-nek valamely függvényét terjeszti elő. Ezen kifejezés egészelése végett, azt még így is írhatni :

$$\frac{d^3y}{dx^2}=Xdx, \quad \text{következőleg} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\int Xdx+A,$$

hol A az első egészelésnek tetszésszerinti állandója. Ebből pedig nyerjük :

$$\frac{d^2y}{dx}=dx\int Xdx+Adx\,, \text{ s ennek folytán :}$$

$$\frac{dy}{dx}=\int dx\int Xdx+Ax+A',$$

hol A a második egészelésnek tetszésszerinti állandója. Ebből végre kapjuk :

$$dy=dx\int dx\int Xdx+Axdx+A'dx\,, \text{ tehát :}$$

$$\text{1).} \quad y=\int dx\int dx\int Xdx+\frac{Ax^2}{2}+A'x+A'',$$

hol A'' a harmadik egészelésnek tetszésszerinti állandója, ez pedig a harmadrendü külzelékek egészelésének általános képlete, melyet azonban, kényelmesebb alkalmazása végett, czélszerü lesz egyes egészletekre szétbontani : mivégre a részletes egészelést kell alkalmazni, az ismert általános képletben tehát teendő :

$dv=dx$ lesz $v=x$, és $\int dx\int Xdx=u$, lesz $du=dx\int Xdx$,

miknek helyettesítése adja :

$$\int dx\int dx\int Xdx=x\int dx\int Xdx-\int xdx\int Xdx,$$

ezen két egészlet mindegyikére pedig a részletes egészelést újra alkalmazván, az elsőre nézve tétessék :

$$dx=dv\text{, tehát : } v=x\text{, és } \int Xdx=u\text{, lesz } du=Xdx,$$

következőleg

$$x\int dx\int Xdx=x^2\int Xdx-x\int xXdx,$$

a másodikra nézve pedig tétessék :

$$xdx=dv\text{, tehát } v=\frac{x^2}{2}\text{ és } \int Xdx=u\text{, lesz : } du=Xdx,$$

s ennek folytán áll :

$$\int xdx\int Xdx=\frac{x^2}{2}\int Xdx-\frac{1}{2}\int Xx^2dx,$$

miket helyettesítvén, e következő eredményre jutunk :

$$2).\ y=\frac{x^2}{2}\int Xdx-x\int xXdx+\frac{1}{2}\int Xx^2dx+\frac{Ax^2}{2}+A'x+A'',$$

mely képlet már kényelmesebben használható, s ennek felvilágosítására e következő példákat hozzuk elő :

(1-ső Példa.) Az egészelendő függvény legyen :

$$d^3y=\frac{dx^3}{\sqrt{1+x^2}}\text{, lesz : } X=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\text{, következőleg}$$

$$y=\frac{x^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}-x\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{Ax^2}{2}+A'x+A'',$$

ezek pedig mind ismert egészletek lévén, áll :

$$y=-\frac{3x\sqrt{1+x^2}}{4}+\frac{1}{4}(2x^2-1)log(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{Ax^2}{2}+A'x+A''.$$?

(2-dik Példa.) Legyen egészelendő e következő függvény :

$$\frac{d^3y}{dx^3}=axcosx=X\text{, akkor áll :}$$

$$y=\frac{ax^2}{2}\int xdxcosx-ax\int x^2dxcosx+\frac{a}{2}\int x^3dxcosx+$$
$$\frac{Ax^2}{2}+A'x+A'',$$

ámde a 35)-dik szám 27) alatti ismert képlete szerint áll :

$$\int xdxcosx = cosx + xsinx,$$

$$\int x^2dxcosx = 2xcosx + x^2sinx - 2sinx, \text{ és}$$

$$\int x^3dxcosx = 3x^2cosx + x^3sinx - 6cosx - 6xsinx,$$

miket helyettesítvén és összehúzván, nyerjük :

$$y = -axsinx - 3acosx + \frac{Ax^2}{2} + A'x + A''.$$

Vegyük elő még e következő harmad rendü külzeléknek egészelését :

$$\text{b)}. \quad \frac{d^3y}{dx^3} = Q,$$

hol Q mennyiség $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ második külzeléki hányadosnak valamely függvénye ; akkor ezen egyenletet nyilván még így is irhatni :

$$\frac{dy''}{dx} = Q, \text{ miből : } dx = \frac{dy''}{Q}, \text{ következőleg}$$

$$3). \quad x = \int \frac{dy''}{Q} + A.$$

Mivel továbbá áll : $dy' = y''dx = \frac{y''dy''}{Q}$, áll szintén :

$$y' = \int \frac{y''dy''}{Q} + B,$$

s mivel végre $dy = y'dx = dx\int \frac{y''dy''}{Q} + Bdx$, nyerjük :

$$4). \quad y = \int \frac{dy''}{Q} \int \frac{y''dy''}{Q} + Bx + C,$$

ha pedig a 3) és 4) alatti egyenletekből y'' hányadost kiküszöböljük, nyerünk egy, x és y közötti egyenletet, mely az adott egyenlet egészletének tekintendő. Végre az A, B és C mennyiségek a háromszoros egészelésnek tetszésszerinti állandói. Legyen például adva :

$ad^2y = dydx$, mely egyenlet még így is irható :

$$\frac{ad^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} = y',$$

s mivel ennek folytán áll : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$, lesz még :

$$a\frac{dy'}{dx}=y',$$ miből : $$dx=a\frac{dy'}{y'},$$ tehát :

$x=a log y'+C$; mivel továbbá áll :

$dy=y'dx$, áll szintén : $dy=ady'$, tehát : $y=ay'+C'$, miből :

$$y'=\frac{y-C'}{a},$$ minek helyettesítése adja :

$$x=a.log\frac{y-C'}{a}+C,$$

hol C és C' a kettős egészelésnek állandói ; ezen utolsó egyenlet pedig, a fen adott külzelék egészletének tekintendő.

Legyen adva még e következő 4-ik rendü külzelék :

$$\text{c)}\quad \frac{d^4y}{dx^4}=X, \quad \text{avagy:}\quad d^4y=Xdx^4;$$

akkor ennek egészelése végett, ezen kifejezést még így is szabad írni :

$$\frac{d^4y}{dx^3}=Xdx, \quad \text{tehát:}\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\int Xdx+A,$$

ezt továbbá még így is írhatni :

$$\frac{d^3y}{dx^2}=dx\int Xdx+Adx, \quad \text{tehát:}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\int dx\int Xdx+Ax+A',$$

ezen utolsó kifejezést még így is lehet írni :

$$\frac{d^2y}{dx}=dx\int dx\int Xdx+Axdx+A'dx,$$

s ennek folytán

$$\frac{dy}{dx}=\int dx\int dx\int Xdx+\frac{Ax^2}{2}+A'x+A'',$$

végre ebből nyerjük :

$$dy=dx\int dx\int dx\int Xdx+\frac{Ax^2}{2}dx+A'xdx+A''dx, \quad \text{miből:}$$

$$y=\int dx\int dx\int dx\int Xdx+\frac{Ax^3}{2.3}+\frac{A'x^2}{2}+A''x+A''',$$

hol A, A', A'' és A''' a négyszeres egészelésnek tetszésszerinti állandói. E kifejezésben azonban czélszerü lesz, a négyszeres egészelési jegygyel ellátott tagot szétbontani úgy, hogy y-nak értékében csak egyszeres egészelések fordúljanak elő ; e végre pedig megint a részletes egészelés lesz alkalmazandó, melynek értelmében legelőször teendő :

$$dx = dv, \quad \text{és} \quad \int dx \int dx \int X dx = u, \text{ s lesz } v = x, \quad \text{és}$$

$$du = dx \int dx \int X dx,$$

minek helyettesítése az általános képletben adja:

$$\int dx \int dx \int dx \int X dx = x \int dx \int dx \int X dx - \int x dx \int dx \int X dx,$$

ezen utolsó két egészletre pedig újra alkalmazván a részletes egészelést, nyerjük:

$$x \int dx \int dx \int X dx = x^2 \int dx \int X dx - x \int x dx \int X dx, \quad \text{és}$$

$$\int x dx \int dx \int X dx = \frac{x^2}{2} \int dx \int X dx - \frac{1}{2} \int x^2 dx \int X dx,$$

s így áll:

$$\int dx \int dx \int dx \int X dx = \frac{x^2}{2} \int dx \int X dx - x \int x dx \int X dx +$$
$$\frac{1}{2} \int x^2 dx \int X dx,$$

mely három egészletet újra tárgyalván részletesen, lesz:

$$y = \frac{x^3}{2.3} \int X dx - \frac{x^2}{2} \int x X dx + \frac{x}{2} \int x^2 X dx - \frac{1}{2.3} \int x^3 X dx +$$
$$\frac{Ax^3}{2.3} + \frac{A'x^2}{2} + A''x + A'''$$

s ez azon általános képlet, melynek segítségével a negyedik rendű külzelékek mindig egészelhetők, ha X-nek az értéke adatik. Például vegyük fel, hogy $X = ax$; akkor ezen értéket az előttünk álló egyenletbe helyettesítvén, lesz:

$$y = \frac{ax^5}{12} - \frac{ax^5}{6} + \frac{ax^5}{8} - \frac{ax^5}{30} \quad \text{avagy:}$$

$$y = \frac{ax^5}{2.3.4.5} + \frac{Ax^3}{2.3} + \frac{A'x^2}{2} + A''x + A'''$$

mint erről külzelés által is meg lehet győződni.

HATÁROZOTT EGÉSZLETEK.

40). Minthogy $F(x)$ függvény külzeléke $f(x)dx$ kifejezés által kellőleg van képviselve, megfordítva e következő egyenletnek is helyesnek kell lenni:

1). $\int f(x)dx = F(x) + C$,

mely kifejezés, mivel x-nek bármely értékére nézve áll, és x különféle értékeinek a függvény különféle értékei is megfelelnek, határozatlan egészletnek szokott neveztetni. Ha azonban az értékek azon sorában, melyeket x változó fölvenni képes, mely sorra nézve az adott függvény a folytonosságát megtartja, bizonyos hézagot választunk, melyre nézve az adott egészlet értékét akarjuk tudni, és felteszszük, hogy az említett hézag $x=a$ értékkel kezdődik, és $x=b$ értékkel végződik: akkor ez esetben az adott egészlet értéke többé nem lesz határozatlan, hanem teljesen határozott, s még csak az van hátra megmutatni, miként kell ily határozott, azaz a és b határok között vett egészletet kifejezni.

E végre könnyü belátni, hogy ha a kisebbik, b pedig nagyobbik határnak tekintetik, akkor $x=a$ esetre nézve, az adott általános egészletnek elenyészőnek kell lenni, minek folytán áll:

$$0 = F(a) + C,\ \text{miből}:\ C = -F(a),$$

és a kérdéses egészlet $F(x) - F(a)$ által fog adatni, mely egészlet tehát egyik oldaláról már meg van határozva, azaz kezdetére nézve, minthogy $x=a$ értékkel kezdjük az egészlet értékét számítni. Hogy tehát ezen egészlet értéke, a másik oldaláról, azaz végéről is meg legyen határozva, csak b teendő x helyébe, s nyerni fogjuk: $F(b) - F(a)$, s ez már az adott egészletnek, a és b határok között vett határozott értéke, melyet egyenletben így szokás kifejezni:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

a nagyobbik határ tehát mindig felső határnak, a kisebbik határ pedig alsó határnak szokott neveztetni, és magát a határozott egészletet mindig úgy találjuk meg, ha az általános egészletben először a nagyobbik határ, azután pedig a kisebbik határ iratik x helyébe, és ezen helyettesítésnek utóbbi eredményét az első eredményből kivonjuk. Határozott egészlet értékét legjobban képzelhetni az által, ha $F(x)$ függvény x metszékhez tartozó és görbe vonal által bezárt sík felületet állítna elő, és azon felületről volna szó, mely $x=a$, és $x=b$ metszékek között fekszik, mint ezt már a bevezetésben megmutattuk. Valahányszor tehát egy adott külzeléknek határozatlan egészlete adatik, vagy könnyen meghatározható, annak bizonyos határokra vonatkozó határozott egészlete mindig könnyen megtalálható, mihelyt a felvett határok a folytonossági határok között esnek, mire mindig jól kell figyelni. Így például, ismeretes előttünk, hogy áll:

$$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg.\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Ezen egészletet nem szabad olyan határok között venni, melyek egyikére nézve az $a+bx+cx^2$ háromszak nemlegessé, másikára nézve pedig tevőlegessé válik, mivel olyféle határok között fekszik a zerus is, s ez esetben lenne:

$$\frac{1}{a+bx+cx^2}=\infty,$$

s ennél fogva $(a+bx+cx^2)$-nek nem szabad 0-nak lenni, hanem inkább az kivántatik, hogy ezen háromszak, x-nek minden értékére nézve, mely a kitűzött határok között fekszik, ugyanazon előjellel bírjon; minek kieszközlésére, az $a+bx+cx^2=0$ egyenlet gyökeinek képzeteseknek kell lenni, mert ezen egyenletből kapjuk:

$$x=-\frac{b}{2c}\pm\frac{1}{2c}\sqrt{b^2-4ac},$$

mely kifejezés képzetessé válik azon esetre, ha $4ac>b^2$, mert mihelyt $b^2=4ac$, már a fen adott egészleti függvény végtelen nagygyá válik. Hasonlóképen szabad okoskodni e következő egészletre nézve is:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}.$$

Ezen egészlet legszélsőbb határainak értékei csak e következő egyenletből nyerhetők :

$$\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}=\pm1,$$

mivel azon sinus, mely egységnél nagyobb, vagy (—1)-nél kisebb, képzetes értékre vezet ; ezen egyenletből kapjuk :

$$x=\frac{b}{2c}\pm\frac{1}{2c}\sqrt{4ac+b^2},$$

mely két érték által, a folytonosság legszélsőbb határai képviselvék, az adott külzeléki vagy egészleti függvényre nézve.

Ha tehát valamely külzeléki függvény határozatlan egészlete adatik, ennek bizonyos határok közötti értéke mindig könnyen meghatározható, mint e következő ide tartozó példákból fogjuk látni :

(1-ső Példa.) A külzeléki hánylatból ismeretes előttünk, hogy áll :

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1};$$

ha ezen egészlet értékét 0 és 1 határok között akarnók tudni, akkor legelőször x helyébe 1-et, azután pedig x helyébe 0-t kell tenni, s ennek folytán nyerjük :

$$1).\quad\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}.$$

(2-dik Példa.) Tudva van előttünk, hogy áll :

$$\int e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax},$$

mely egészletet ha ∞ és 0 határok között veszszük, nyerjük

$$2).\quad\int_0^\infty e^{-ax}dx=\frac{1}{a}.$$

(3-dik Példa.) A 35)-dik szám 26) és 27) alatti általános mintáiból következik :

$$\int xdx sinnx=-\frac{xcosnx}{n}+\frac{sinnx}{n^2},\quad\text{és}$$

$$\int xdx cosnx=\frac{xsinnx}{n}+\frac{cosnx}{n^2},$$

mely egészletek ha π és 0 határok között vétetnek, nyerjük:

$$3). \int_0^\pi xdxsinnx = -\frac{\pi cosn\pi}{n}, \text{ és}$$

$$4). \int_0^\pi xdxcosnx = \frac{cosn\pi - 1}{n^2};$$

itt azonban két esetet kell megkülönböztetnünk, melyek abból következnek, hogy n vagy páratlan, vagy páros szám lehet; az első esetben a 3) alatti egészlet folyvást $\frac{\pi}{n}$-el, a 4) alatti egészlet pedig folyvást $-\frac{2}{n^2}$-vel egyenlő; a második esetben azonban a 3) alatti egészlet folyvást $= -\frac{\pi}{n}$, a 4) alatti egészlet pedig $=0$ lesz.

(4-dik Példa.) A 34)-dik szám 11) és 12) alatti képleteiből kapjuk:

$$\int dxsin^2x = -\frac{sinxcosx}{2} + \frac{1}{2}x, \text{ és}$$

$$\int dxcos^2x = \frac{sinxcosx}{2} + \frac{1}{2}x,$$

mely egészletek $\frac{\pi}{2}$ és 0 határok között vétetvén, lesz:

$$5). \int_0^{\frac{\pi}{2}} dxsin^2x = \frac{\pi}{4}, \text{ és } 6). \int_0^{\frac{\pi}{2}} dxcos^2x = \frac{\pi}{4}, \text{ következőleg}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dxsin^2x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dxcos^2x = \frac{\pi}{4}.$$

(5-dik Példa.) Vegyük most tárgyalás alá a 34)-dik szám 11) és 12) alatti általános mintáit, azaz:

$$\int dxsin^nx = -\frac{sinx^{n-1}cosx}{n} + \frac{n-1}{n}\int dxsinx^{n-2}, \text{ és}$$

$$\int dxcos^nx = \frac{cosx^{n-1}sinx}{n} + \frac{n-1}{n}\int dxcosx^{n-2},$$

és vegyük ezen egészleteket is $\frac{\pi}{2}$ és 0 határok között, lesz:

$$7).\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^n x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin x^{n-2}, \text{ és}$$

$$8).\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^n x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos x^{n-2}.$$

Ezen egészletekre nézve is két esetet kell megkülönböztetnünk, t. i. n vagy páros, vagy páratlan szám; hogy az első esetnek megfelelő törvény megalapíttassék, tegyük $n=6$, akkor áll:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^6 x = \frac{5}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^4 x, \text{ továbbá lesz szintén:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^4 x = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^2 x, \text{ és}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^2 x = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2},$$

mely egészletek egymásba helyettesítése által kapjuk:

$$9)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^6 x = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Hasonló módon nyerjük szintén:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^6 x = \frac{5}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^4 x, \text{ továbbá:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^4 x = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^2 x, \text{ és}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^2 x = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

melyeket egymásba helyettesítvén, lesz:

$$10.)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^6 x = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Az eddig nyert 9) és 10) alatti kifejezésekből tehát világosan láthatni azon törvényt, mely szerint ezen határozott egészletek haladnak, úgy hogy általánosan véve szabad írni:

$$11.)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^n x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^n x = \frac{1.3.5.7 \ldots . n-1}{2.4.6.8 \ldots\ldots n} \frac{\pi}{2}.$$

Ha pedig a 7) és 8) alatti képletekben páratlan szám tétetik

n helyébe, akkor az előbbihez hasonló eljárásnál fogva nyerni fogjuk:

$$12.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx sin^n x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx cos^n x = \frac{2.4.6\ldots.(n-1)}{3.5.7\ldots\ldots.n},$$

mi meglevén, ha a 11) és 12) alatti kifejezéseket összehasonlítjuk, e következő eredményre fogunk jutni:

$$\frac{1,3.5.7\ldots\ldots.(n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots\ldots.n}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)}{3.5.7\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.n},$$

miből nyerjük:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.\ldots\ldots.}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.\ldots\ldots.},$$

mely kifejezés segítségével π számnak a meghatározása könnyü.

(6-ik Példa.) Ha a 32)-ik szám 1) és 3) alatti mintáiban m nemlegesnek vétetik, nyerjük:

$$\int e^{-mx} dx sin nx = -\frac{e^{-mx}}{m^2+n^2}(m sin nx + n cos nx) \quad \text{és:}$$

$$\int e^{-mx} dx cos nx = \frac{e^{-mx}}{m^2+n^2}(n sin nx - m cos nx).$$

Ezen egészletek pedig ha ∞ és o határok között vétetnek, lesz:

$$13.)\quad \int_0^{\infty} e^{-mx} sin nx = \frac{n}{m^2+n^2}, \quad \text{és}$$

$$14.)\quad \int_0^{\infty} e^{-mx} dx cos nx = \frac{m}{m^2+n^2}.$$

(7-ik Példa.) Az előbbiekből tudva van előttünk, hogy áll:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc sin \frac{x}{a},$$

mely egészlet ha a és 0 határok között vétetik, lesz:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Hasonlóképen ha e következő egészlet:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arc.tg \frac{x}{a},$$

∞ és 0 határok között vétetik, nyerjük:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a}.$$

Továbbá tudjuk, hogy áll :

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a},$$

mely egészlet $+a$ és $-a$ határok között vétetvén, adja :

$$\int_{-a}^{+a} dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a^2\pi}{2}.$$

(8-ik Példa.) Meghatározandó legyen :

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2}.dx.$$

Hogy ezen egészletet 1 és 0 határok között lehessen venni, legelőször ennek határozatlan egészletét kell ismernünk, mi végre azt okszerüvé kell tenni, e következő helyettesítés által :

$\sqrt{x}=z$, tehát $x=z^2$ és $dx=2zdz$, minek folytán áll :

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2}.dx=2\int\frac{1+z^2}{1+z^4}dz,$$

mely utolsó egészlet meghatározására, ismeretes előttünk, hogy :

$$1+z^4=(1+z\sqrt{2}+z^2)(1-z\sqrt{2}+z^2),$$

minek következtében szabad tenni :

$$2.\frac{1+z^2}{1+z^4}=\frac{A+Bz}{1+z\sqrt{2}+z^2}+\frac{C+Dz}{1-z\sqrt{2}+z^2},$$

miből könnyü módon találjuk : $A=1$, $B=0$, $C=1$, és $D=0$, tehát :

$$2\frac{1+z^2}{1+z^4}=\frac{1}{1+z\sqrt{2}+z^2}+\frac{1}{1-z\sqrt{2}+z^2},$$

s így áll szintén :

$$2\int\frac{1+z^2}{1+z^4}dz=\int\frac{dz}{1+z\sqrt{2}+z^2}+\int\frac{dz}{1-z\sqrt{2}+z^2},$$

az ismert képlet szerint tehát lesz :

$$2\int\frac{1+z^2}{1+z^4}dz=\sqrt{2}arctg\frac{2z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}arctg\frac{2z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

mely két *arctg.* egybe vonatván, mint ezt az előbbiekben már megmutattuk, nyerni fogjuk :

$$2\int\frac{1+z^2}{1+z^4}dz=\sqrt{2}.arctg.\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2},$$

ezen egészlet pedig ha 1 és 0 határok között vétetik, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ értéket adja, áll tehát:

$$\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(9-dik Példa.) Az ismert egészletek sorába tartozik:

$$\int\frac{dx}{\alpha+\beta cosx}=\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}arctg\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}}tg\frac{1}{2}x,$$

ez pedig ha π és 0 határok között vétetik, nyerjük:

$$\int_0^\pi\frac{dx}{\alpha+\beta cosx}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}.$$

(10-ik Példa.) Ismeretes előttünk e következő egészlet:

$$\int\frac{dxarctgx}{1+x^2}=\frac{1}{2}(arctgx)^2,$$

melyet ha ∞ és 0 határok között veszünk, nyerjük:

$$\int_0^\infty\frac{dxarctgx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8},$$

mivel pedig általánosan véve áll:

$$\int\frac{dx(arctgx)^m}{1+x^2}=\frac{1}{m+1}(arctgx)^{m+1},$$

ezt is ∞ és 0 határok között vévén, ered:

$$\int_0^\infty\frac{dx(arctgx)^m}{1+x^2}=\frac{1}{m+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1}.$$

Végre e következő határozott egészletek helyes volta is könnyen belátható:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2},\quad \text{és}\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi,$$

miből következik:

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=2\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}.$$

Hasonló módon könnyü belátni, hogy áll:

$$\int_a^b x^m dx=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1},$$ áll tehát szintén:

$$\int_a^x x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

és mivel ez egyenletben $-\frac{m+1}{m+1}$ nyilván az állandót terjeszti elő, szabad lesz állítnunk általánosan:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

mely egészletre nézve egy különös abban álló eset fordúl elő, ha $m = -1$-nek vétetik, ez esetben t. i. áll:

$$\frac{x^0 - a^0}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ határozatlan érték},$$

melynek meghatározására, ha m változónak vétetik, áll:

$$\frac{d_m(x^{m+1} - a^{m+1})}{dm} = x^{m+1} log x - a^{m+1} log a, \text{ és } \frac{d_m(m+1)}{dm} = 1,$$

az előbbi kifejezésben pedig $m = -1$ tétetvén, lesz:

$$x^{m+1} log x - a^{m+1} log a = log x - log a, \text{ következőleg}$$

$$\int \frac{dx}{x} = log x - log a,$$

mint már ismeretes előttünk. Az eddig előhozottak elégségesek annak belátására, hogy ha valamely külzeléki kifejezésnek határozatlan avagy általános egészlete adatik, ennek határozott egészletét megtalálni semmi nehézséggel sem jár, ha a folytonossági határok kellőleg tekintetbe vétetnek. Az eddig előhozott határozott egészletekhez, nagy fontossága miatt, még egyet kell csatolnunk, melyet e következő módon találunk meg: A 31)-dik szám 7) alatti mintájába e tétessék a helyébe, akkor tudván e-nek a jelentését, nyerjük:

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int e^x x^{n-1} dx,$$

itt pedig $(-nx)$-et tévén x helyett, és n-et $(a-1)$-gyel felcserélvén, lesz:

$$\int e^{-nx} x^{a-1} dx,$$

mely egészletet ha ismételve részletesen tárgyaljuk, e következő eredményre fogunk jutni:

$$\int e^{-nx} x^{a-1} dx = -e^{-nx} \cdot \Big[\frac{x^{a-1}}{n} + \frac{(a-1)}{n^2} x^{a-2} + \frac{(a-1)(a-2)}{n^3} x^{a-3} + \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{n^4} x^{a-4} + \ldots\ldots + \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots (a-1)}{n^a} \Big].$$

Ezen egészletet pedig ha ∞ és 0 határok között veszszük, lesz :

$$\int_0^{\infty} e^{-nx} x^{a-1} dx = \frac{1.2.3.4\ldots\ldots(a-1)}{n^a}.$$

41). (**Határozott egészletek megalapítása más módon.**) Nem gyéren azon eset is fordúl elő, hogy valamely adott külzeléki kifejezésnek határozatlan avagy általános egészlete zárt alakban elő nem állítható, ellenben bizonyos határok közötti egészlete könnyen meghatározható, még pedig zárt alakban. Hasonlóképen a külzelés és az ez utáni egészelés, bizonyos állandó mennyiség szerint, szintén tekintélyes eszközt nyújt, új határozott egészletek létre hozására. A következő esetek a tárgy felvilágosítására szolgálnak :

(1-ső eset.) A külzeléki hánylatból tudjuk, hogy áll :

$$\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m},$$

mely egyenletet dm-el szorozván, nyerni fogjuk :

$$\int_0^{+1} dx . x^{m-1} dm = \frac{dm}{m},$$

ezt pedig m szerint egészelvén, lesz :

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{logx} = logm + C.$$

Az állandónak meghatározására, tétessék $m=1$, lesz :

$$\int_0^1 \frac{dx}{logx} = C,$$

$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{lgx} = lgm + \int_0^1 \frac{dx}{logx}$ elter

minek helyettesítése adja :

$$1.) \quad \int_0^1 \frac{x^{m-1} - 1}{logx} dx = logm,$$

mely egyenlet állván, e következő is helyes lesz :

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} - 1}{logx} dx = logn,$$

és ezen utolsó két egyenlet kivonása által kapjuk :

$$2.) \quad \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{logx} dx = log\frac{m}{n},$$

s ez egy nevezetes határozott egészlet.

(2-dik eset.) Ha az előbbi szám 13) alatti képletét dm-

mel, a 14) alatti képletet pedig szintén dm-mel szorozzuk, nyerni fogjuk :

$$3.)\quad \int_0^\infty dxe^{-mx}dmsinnx = \frac{ndm}{n^2+m^2}, \quad \text{és}$$

$$4.)\quad \int_0^\infty dxe^{-mx}dmcosnx = \frac{mdm}{n^2+m^2};$$

ha már most a 3) alatti kifejezést egészeljük m szerint, lesz :

$$\int_0^\infty \frac{dxe^{-mx}sinnx}{x} = -arctg.\frac{m}{n},$$

ide pedig k-t tévén m helyébe, áll szintén :

$$\int_0^\infty \frac{dxe.^{-kx}sinnx}{x} = -arctg.\frac{k}{n},$$

mely két egyenletet egymásból kivonván, lesz :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}-e^{-mx}}{x}.sinnx = arctg\frac{m}{n} - arctg\frac{k}{n},$$

és ha az $arc.tg$-sek különbségét egybe vonjuk, nyerjük :

$$\int_0^\infty dx\frac{e^{-kx}-e^{-mx}}{x} = arctg.\frac{(m-k)n}{n^2+mk},$$

itt pedig $m=\infty$ és $k=0$ tétetvén, ered :

$$5.)\quad \int_0^\infty \frac{dxsinnx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

mely egészlet teljesen új alakkal bír. Említésre méltó még az is, hogy ezen határozott egészlet értéke nem függ n-től, mert tévén $x=\frac{u}{n}$, tehát $dx=\frac{du}{n}$, nyerjük :

$$\int_0^\infty \frac{dusinu}{u} = \frac{\pi}{2},$$

mely egyenletben többé n nem fordúl elő.

Vegyük elő már most a fenebbi 4) alatti kifejezésnek m szerinti egészelését, áll :

$$\int_0^\infty \frac{dxe^{-mx}cosnx}{x} = -\frac{1}{2}log(n^2+m^2),$$

itt pedig k-t írván m helyébe, áll szintén :

$$\int_0^\infty \frac{dxe^{-kx}cosnx}{x} = -\frac{1}{2}log(n^2+k^2),$$

és ezen két egyenletet egymásból kivonván, lesz :

$$6.)\quad \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}-e^{-mx}}{x} cosnx = \frac{1}{2} log \frac{n^2+m^2}{n^2+k^2},$$

e kifejezésben pedig $m=\infty$ és $k=0$ tétetvén, nyerjük :

$$7.)\quad \int_0^\infty \frac{dxcosnx}{x} = \infty,$$

mely szintén egy új határozott egészlet.

(3-dik eset.) Legyen meghatározandó a Laplace híres egészlete, mely e következő alakban adatik elő :

$$\int_0^\infty e.^{-x^2} dx, \quad \text{vagy :} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e.^{-x^2} dx.$$

Ezen egészletek meghatározására, mindenekelőtt arra kell figyelmeztetnem az olvasót, hogy minden határozott egészlet értéke állandó szám, itt is tehát szabad lesz tenni :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = A,$$

s ennek folytán e következő egyenletnek is állnia kell :

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = A,$$

mely két egyenletet egymással szorozván, lesz :

$$a)\quad \int_0^\infty e^{-z^2} dz \int_0^\infty e^{-x^2} dx = A^2,$$

s ezen egyenlet még így is írható :

$$b)\quad \int_0^\infty dz \int_0^\infty dx.e^{-(x^2+z^2)} = A^2,$$

itt pedig $z=xt$ tétetvén, lesz : $dz=xdt$, ha t. i. x állandónak vétetik, és az utolsó egyenlet így áll :

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty xdxe^{-x^2(1+t^2)} = A^2,$$

mi által a benső egészlet egészelhetővé vált; tévén t. i.

$$x^2(1+t^2)=u \quad \text{lesz :} \quad xdx = \frac{du}{2(1+t^2)},$$

s ennek folytán

$$\int_0^\infty xdxe^{-x^2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{1+t^2},$$

minek u szerinti határozatlan egészlete ez :

$$\frac{1}{2}\int\frac{e^{-u}du}{1+t^2}=-\frac{e^{-u}}{2(1+t^2)},$$

miből következik :

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}du}{1+t^2}=\frac{1}{2(1+t^2)},$$

mely értéket a fenebbi egyenletbe helyettesítvén, lesz :

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)}=A^2,\quad \text{s mivel :}\ \alpha)\ \int\frac{dt}{2(1+t^2)}=\frac{1}{2}arctgt,$$

lesz szintén :

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)}=\frac{\pi}{4}=A^2,\quad \text{következöleg}\quad A=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

s így a kérdéses egészletre nézve áll :

$$7).\quad \int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

α) Ha pedig a fenebbi egészletet ($+\infty$ és $-\infty$) határok között veszszük, akkor áll :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{\pi},\ \text{avagy :}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},$$

tehát az előbbi egészletnek kettőzete, mint lennie is kell.

(4-ik eset.) A most megtalált egészleten alapszik e következő egészletnek a meghatározása is :

$$U=\int_0^{\infty}dxcosrx.e^{-a^2x^2};$$

hogy ennek az adott határok közötti értékét ki lehessen találni, azt mindenek előtt r szerint kell külzelni, minek eredménye ez :

$$a)\quad \frac{dU}{dr}=-\int_0^{\infty}xdxe^{-a^2x^2}.sinrx,$$

ezen kifejezésnek pedig legelőször határozatlan egészletét kell meghatároznunk, részletes egészelés által, $\int udv=uv-\int vdu$ képletet használván, melyben teendő :

$$xdxe^{-a^2x^2}=dv\ \text{és}\ sinrx=u,\ \text{s lesz :}$$

$e^{-a^2x^2}=z$, $dz=-e^{-a^2x^2}2a^2x\,dx$ ez $e^{-a^2x^2}x\,dx=-\frac{dz}{2a^2}$

$\int x\,dx\,e^{-a^2x^2}=-\int\frac{dz}{2a^2}=-\frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2}$

$$v=-\frac{1}{2a^2}e^{-a^2x^2} \text{ és } du=rdxcosrx,$$

miknek helyettesítése adja :

$$\int xdxe^{-a^2x^2}sinrx=-\frac{e^{-a^2x^2}sinrx}{2a^2}+\frac{r}{2a^2}\int dxe^{-a^2x^2}cosrx,$$

ezen egészlet pedig ∞ és 0 határok között vétetvén, lesz :

$$\int_0^\infty xdxe^{-a^2x^2}sinrx=-\frac{r}{2a^2}\int_0^\infty dxe^{-a^2x^2}cosrx=-\frac{r}{2a^2}U,$$

ezen egyenlet pedig a fenebbi a) alatti egyenlettel összehasonlítatván, állnia kell szintén :

$$\frac{dU}{dr}=-\frac{r}{2a^2}U, \text{ miből : } \frac{dU}{U}=-\frac{rdr}{2a^2}, \text{ következőleg}$$

$$logU=-\frac{r^2}{4a^2}+C, \text{ ebből pedig kapjuk :}$$

$$U=e^Ce^{-\frac{r^2}{4a^2}}=A.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}, \text{ s ennek folytán áll :}$$

$$\int_0^\infty dxe^{-a^2x^2}cosrx=Ae^{-\frac{r^2}{4a^2}};$$

A állandónak meghatározására, tétessék $r=0$, lesz :

$$\int_0^\infty dxe^{-a^2x^2}=A, \text{ itt pedig } a^2x^2=t^2, \text{ tehát } dx=\frac{dt}{a}$$

tétetvén, lesz :

$$\int_0^\infty dxe^{-a^2x^2}=\int_0^\infty \frac{dt}{a}e^{-t^2}=\frac{1}{2a}\sqrt{\pi}=A,$$

mely érték meglevén, a kérdéses határozott egészlet lesz :

$$8). \quad \int_0^\infty dxe^{-a^2x^2}cosrx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

mely nevezetes érték csak a fenebbi egészlet segítségével megtalálható.

(5-ik eset.) Meghatározandó legyen e következő egészlet :

$$u=\int_0^\infty \frac{cosax}{1+x^2}dx.$$

Ezen kifejezés a szerint külzelve, adja :

$$\frac{du}{da}=-\int_0^\infty xdx\frac{sinax}{1+x^2},$$

ezt pedig még egyszer külzelvén a szerint, nyerjük:

$$\frac{d^2u}{da^2}=-\int_0^\infty x^2dx.\frac{cosax}{1+x^2},$$

mely egyenletet az eredetileg adott egyenletből kivonván, lesz:

$$u-\frac{d^2u}{da^2}=\int_0^\infty dx\left(\frac{cosax}{1+x^2}+\frac{x^2cosax}{1+x^2}\right),$$

s ezen kifejezést összehúzván, áll:

$$u-\frac{d^2u}{da^2}=\int_0^\infty dxcosax,$$

melynek könnyen megtalálható egészletét ∞ és 0 határok között vévén, nyerjük:

$$u-\frac{d^2u}{da^2}=0,\ \text{tehát:}\ \frac{d^2u}{da^2}=u,$$

ámde az előbbiekből már tudjuk, hogy $\frac{d^2y}{dx^2}=ky$ külzeléknek egészlete ez:

$$y=Be^{x\sqrt{k}}+Ae^{-x\sqrt{k}},$$

ha tehát esetünkben $k=1$ tétetik, és a-t x-el felcseréljük, lesz:

$$u=Be^a+Ae^{-a},$$

mivel pedig az adott egészlet a-ra nézve nem lehet végtelen nagy értékű, azért $B=0$ kell tenni, s lesz:

$$u=Ae^{-a},\ \text{s így áll:}$$

$$\int_0^\infty dx\frac{cosax}{1+x^2}=Ae^{-a};$$

A állandónak meghatározására, tétessék $a=0$, lesz:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=A,\ \text{mivel pedig:}$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx,\ \text{lesz:}\ A=\frac{\pi}{2},\ \text{következőleg}$$

$$9).\quad \int_0^\infty dx\frac{cosax}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a},$$

e kifejezésben pedig ha $\frac{x}{m}$ tétetik x helyébe, és ma a helyébe, lesz:

$$10).\quad \int_0^\infty dx\frac{cosax}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}e^{-ma}.$$

Végre ha ezen egyenletet külzeljük a szerint, nyerni fogjuk:

$$11.)\int_0^\infty xdx\frac{sinax}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-ma},$$

mely megint egy új határozott egészlet. Az eddig előadottakból világosan láthatni, hogy valamely állandó szerinti külzelés s ez utáni egészelés miként szolgál új határozott egészletek felfedezésére.

Az eddig előrebocsátottak segítségével még e következő egészlet is meghatározható:

$$(6\text{-ik eset.})\quad v=\int_0^\infty dx\frac{sinax}{x(m^2+x^2)},$$

mely kifejezést a szerint külzelvén, nyerjük:

$$\frac{dv}{da}=\int_0^\infty dx\frac{cosax}{m^2+x^2},$$

mely egészlet a 10) alatti egészlettel ugyanaz, áll tehát:

$$\frac{dv}{da}=\frac{\pi}{2m}e^{-ma}\quad\text{miből}\quad dv=\frac{\pi da}{2m}.e^{-ma},$$

mely kifejezés már könnyen egészelhető; áll t. i.

$$v=-\frac{\pi}{2m^2}e^{-ma}+C.$$

C állandónak meghatározására, tétessék $a=0$, lesz:

$$-\frac{\pi}{2m^2}+C=0,\quad\text{miből:}\quad C=\frac{\pi}{2m^2},$$

s mind ezeknek következtében nyerni fogjuk:

$$12.)\int_0^\infty dx\frac{sinax}{x(m^2+x^2)}=\frac{\pi}{2m^2}(1-e^{-ma}),$$

s ez is, mint látjuk, egy új határozott egészlet.

Hogy a kitevőleges függvények alkalmazását is lássuk, a határozott egészletek felfedezésénél: vegyük meghatározandónak e következő kifejezést:

$$(7\text{-ik eset.})\quad u=\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-x^2}cos2rx;$$

akkor a külzeléki hánylatból tudjuk, hogy áll:

$$Cos2rx=\frac{e^{2rx\sqrt{-1}}+e^{-2rx\sqrt{-1}}}{2},$$

mely értéket helyettesítvén, kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-x^2}\cos 2rx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-x^2+2rx\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-x^2-2rx\sqrt{-1}},$$

mely két egészlet ha $e^{r^2-r^2}$ mennyiséggel szoroztatik, ered :

$$u = \frac{e^{-r^2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-x^2+2rx\sqrt{-1}+r^2} + \frac{e^{-r^2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-x^2-2rx\sqrt{-1}+r^2}$$

mit ekkép is szabad írni :

$$u = \frac{e^{-r^2}}{2}\int_{\infty}^{+\infty} dxe^{-(x-r\sqrt{-1})^2} + \frac{e^{-r^2}}{2}\int_{\infty}^{+\infty} dxe^{-(x+r\sqrt{-1})^2};$$

itt pedig tévén : $x-r\sqrt{-1}=z$, és $x+r\sqrt{-1}=u$, lesz :

$$u = \frac{e^{-r^2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dze^{-z^2} + \frac{e^{-r^2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} due^{-u^2},$$

mely egészletek értéke már az előbbiekből ismeretes előttünk, áll tehát :

$$u = \frac{\sqrt{\pi}e^{-r^2}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}e^{-r^2}}{2},$$

s így a keresett határozott egészlet lesz :

$$13.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dxe.^{-x^2}\cos 2rx = \sqrt{\pi}.e^{-r^2}.$$

minek folytán ugyanazon egészletnek ∞ és 0 határok közötti értéke nyilván ez lesz :

$$\int_0^{\infty} dxe.^{-x^2}\cos 2rx = \frac{1}{2}e.^{-r^2}\sqrt{\pi}.$$

42.) **(A határok felcserélése és beiktatása.)** A határok felcserélését illetőleg, az előbbiekből tudjuk, hogy áll :

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

mivel pedig ezen kifejezés még így is írható :

$$f(b) - f(a) = -[f(a) - f(b)],\ \text{áll szinte :}$$

$$\int_a^b f'(x)dx = -\int_b^a f'(x)dx,$$

szabad tehát a határokat felcserélni, mihelyt maga a határozott egészlet nemlegesen vétetik.

Mivel továbbá $f(x)$ függvény $x=a$ és $x=b$ határok között folytonosnak vétetett, ha $x=c$ egy a és b között fekvő értéket jelent : akkor ezen egyenletnek is kell állnia :

$$f(b)-f(a)=[f(c)-f(a)]+[f(b)-f(c)],$$

s ennek folytán e következő egyenlet helyes lesz:

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^c f'(x)dx+\int_c^b f'(x)dx;$$

itt tehát, mint látjuk, egy új c határ iktattatott be, s így világos, hogy ha n még egy c és b között fekvő határ, áll szintén:

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^c f'(x)dx+\int_c^n f'(x)dx+\int_n^b f'(x)dx,$$

miből egyszermind látjuk, hogy két adott határ közé, bárhány új határt szabad beiktatni.

Továbbá látjuk, hogy c-nek bármely értékére nézve áll:

$$f(b)-f(a)=f(b+c-c)-f(a+c-c),$$

itt azonnal látjuk, hogy ha ezen egyenletnek jobb része oly egészletből eredt, melynek értéke ezen egyenlet bal részével egyenlő, akkor $b+c$ és $a+c$ lesznek azon határok, melyek között a kérdéses egészlet vétetett, maga a függvény pedig $f'(x-c)$ lesz, mert csak ezen esetre nézve áll:

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_{a+c}^{b+c} f'(x-c)dx;$$

vagy azon feltét alatt, hogy $f(x\pm c)$ még a folytonossági határok között foglaltatik, és x-t felcseréljük $(x+c)$-vel, áll szintén:

$$\int_{a+c}^{b+c} f'(x)dx=\int_a^b f'(x+c)dx.$$

Mivel továbbá e következő egyenlet is áll:

$$f(b)-f(a)=f\left(\frac{bc}{c}\right)-f\left(\frac{ac}{c}\right),$$

e következő egyenletnek is helyesnek kell lenni:

$$\int_a^b f'(cx)dx=\int_{ac}^{bc} f'(x)dx,$$

avagy:

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_{ac}^{bc} f'\left(\frac{x}{c}\right)dx.$$

Így például tudjuk, hogy e következő egészlet áll:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a},$$

ha itten x-et felcseréljük $(-x)$-el, s így a határok $-\infty$ és 0-ra mennek át, az előbbiek szerint állni kell:

$$-\int_0^{-\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a}=\int_{-\infty}^0\frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Hasonlóképen áll szintén:

$$\int_{-\infty}^0\frac{dx}{a^2+x^2}+\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{a}.$$

Végre ha a 20)-ik szám α) alatti egyenletében $2m$-et irunk m helyébe, és a kijövő egészletet $(+1)$ és (-1) határok között veszszük, nyerni fogjuk:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots\ldots\ldots\ldots 5.3.1}{2m(2m-2)(2m-4)\ldots\ldots\ldots 6.4.2}\pi.$$

Ha pedig ez egészletben $sinz$ iratik x helyébe, tehát $dzcosz$ dx helyébe, és $\sqrt{1-x^2}=cosz$: akkor, hogy $sinz=-1$ legyen, kell hogy $z=-\frac{\pi}{2}$, hogy pedig $sinz=1$ legyen, kell hogy $z=\frac{\pi}{2}$ legyen, s így a $(+1)$ és (-1) határok $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ és $-\left(\frac{\pi}{2}\right)$-be mennek át, s ennek folytán áll:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dzsin^{2m}z=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots\ldots\ldots 5.3.1}{2m(2m-2)\ldots\ldots\ldots\ldots 6.4.2}\pi,$$

miről a 34)-dik szám 11) alatti képlete segítségével meg lehet győződni.

Ez alkalommal nem lesz érdektelen megmutatni, miként lehet a már ismert Taylor sorát származtatni, határozott egészletek segítségével; ugyanis ha $f(x)$-nek külzeléke $f'(x)dx$ által terjesztetik elö, akkor áll szintén:

$$\int f'(x)dx=f(x),$$

mely egészlet $(x+h)$ és x határok között vétetvén, lesz:

$$\int_x^{x+h}f'(x)dx=f(x+h)-f(x).$$

Ha ezen egyenlet bal részében $(x+h-t)$ iratik x helyébe, tehát $-dt$ dx helyébe (t egy új változót jelentvén), akkor áll:

$$f'(x)dx=-f'(x+h-t)dt;$$

mivel pedig ezen helyettesítés folytán szükségképen a határok változása is beállt, ezeknek meghatározására az $(x+h-t)$ kifejezésben először $x+h$ irandó t helyébe, mi által a felső határ $=0$ lesz, azután pedig x teendő t helyébe, mi által az alsó határ h jön ki, s így áll:

$$\int_{x}^{x+h} f'(x)dx = -\int_{h}^{0} f'(x+h-t)dt;$$

minthogy pedig tudjuk, hogy az egészlet jegyét megváltoztatván, a határok is felcserélhetők, áll még:

$$\text{a)} \quad \int_{0}^{x+h} f'(x)dx = \int_{x}^{h} f'(x+h-t)dt = f(x+h) - f(x).$$

Vizsgáljuk meg most a határozatlan $\int f'(x+h-t)dt$ egészletet az által, hogy reá a részletes egészelési mód alkalmaztassék, az általános $\int udv = uv - \int vdu$ képlet segítségével, miben teendő:

$dt = dv$ lesz $v = t$, és $f'(x+h-t) = u$, s lesz $du = -dtf''(x+h-t)$, miknek helyettesítése adja:

$$\text{b)} \quad \int dtf'(x+h-t) = tf'(x+h-t) + \int tdtf''(x+h-t).$$

Ezen utolsó egészletet pedig megint részletesen tárgyalván, tétessék:

$tdt = dv$ tehát $v = \frac{t^2}{2}$ és $u = f''(x+h-t)$ lesz $du = -dtf'''(x+h-t)$,

s ezeknek folytán:

$$\text{c)} \quad \int tdtf''(x+h-t) = \frac{t^2}{2}f''(x+h-t) + \int \frac{t^2}{2}dtf'''(x+h-t),$$

mely utolsó egészlet, ha újra tárgyaltatik részletesen, és ugyanazon mütétel még tovább is folytattatik, e következő eredményekre fogunk jutni:

$$\text{d)} \quad \int \frac{t^2}{2}dtf'''(x+h-t) = \frac{t^3}{2.3}f'''(x+h-t) + \int \frac{t^3}{2.3}dtf^{\mathrm{IV}}(x+h-t).$$

$$\text{e)} \quad \int \frac{t^3}{2.3}dtf^{\mathrm{IV}}(x+h-t) = \frac{t^4}{2.3.4}f^{\mathrm{IV}}(x+h-t) + \int \frac{t^4}{2.3.4}dtf^{\mathrm{V}}(x+h-t).$$

f) $$\int\frac{t^4}{2.3.4}dtf^{V}(x+h-t)=\frac{t^5}{2.3.4.5}f^{V}(x+h-t)+$$

$$\int\frac{t^5}{2.3.4.5}dtf^{VI}(x+h-t).$$

. . . . és

$$\int\frac{t^{n-1}}{2.3\ldots.(n-1)}dtf^{n}(x+h-t)=\frac{t^n}{2.3\ldots.(n-1)}f^{n}(x+h-t)+$$

$$\int\frac{t^n}{2.3\ldots.n}dtf^{n+1}(x+h-t).$$

Ha már most a megtalált *b*), *c*), *d*), *e*)... alatti értékek egymásba helyettesíttetnek, nyerni fogjuk :

$$\int dtf'(x+h-t)=tf'(x+h-t)+\frac{t^2}{2}f''(x+h-t)+$$

$$\frac{t^3}{2.3}f'''(x+h-t)+\frac{t^4}{2.3.4}f^{IV}(x+h-t)+\ldots\ldots$$

$$\frac{t^{n-1}}{2.3\ldots.(n-1)}f^{n-1}(x+h-t)+\int\frac{t^{n-1}}{2.3\ldots n-1}dtf^{n}(x+h-t).$$

Ezen egészlet pedig, ha h és 0 határok között vétetik, áll :

$$\int_0^h dtf'(x+h-t)=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+$$

$$\frac{h^4}{2.3.4}f^{IV}(x)+\ldots.+\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots.n-1}f^{n-2}(x)+$$

$$\int_0^h\frac{t^{n-1}}{2.3\ldots.n-1}dtf^{n}(x+h-t),$$

végre á fenebbi a) egyenletet tekintetbe vévén, lesz :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots.n-1}f^{n-1}(x)+\int_0^h\frac{t^{n-1}}{2.3\ldots.n-1}dtf^{n}(x+h-t),$$

s ez nyilván a Taylor keresett sora, melynek utolsó és határozott egészlet által adott tagja, a sor kiegészítő tagjának neveztetik.

43.) **(Euler egészlete.)** A 40)-dik szám utolsó határozott egészlete ez volt :

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{a-1}dx=\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(a-1)}{n^a},$$

melyben ha $n=1$ tétetik, nyerni fogjuk :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx=1.2.3.4\,\ldots\ldots\,(a-1),$$

miből látjuk, hogy a jelen egészlet, ha a kitűzött határok között vétetik, a-nak függvénye, mint ezen egészletnek első megtekintéséből látni lehet. Ezen kifejezés azonban csak azon esetre érvényes, ha a egész tevőleges szám; itt tehát nyilván azon kérdésre kell felelnünk, hogy mi értéke lesz ezen egészletnek, ha a kitevő tevőleges törtszám. Mind két esetben látjuk, hogy $x^{a-1}e^{-x}$ kifejezés x-nek folytonos függvénye, mivel valódi törtszámot képvisel. Az eddig mondottak szerint tehát helyes lesz e következő egyenlet :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx=\Gamma(a),$$

mely jelkép által ezen nevezetes egészlet szokott jelentetni. Írjuk e kifejezésben $x=y^2$, tehát $dx=2ydy$, s nyerni fogjuk :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx=2\int_0^\infty dye.^{-y^2}y.^{2n-1}.$$

Ha továbbá az adott egészletet részletesen tárgyaljuk, tévén :

$$u=e^{-x} \quad \text{és} \quad dv=x^{a-1}dx, \quad \text{lesz} \quad du=-e^{-x}dx \quad \text{és} \quad v=\frac{x^a}{a},$$

következőleg

$$\int e^{-x}.x^{a-1}dx=\frac{e^{-x}x^a}{a}+\frac{1}{a}\int e^{-x}x^a dx,$$

ezt pedig ∞ és 0 határok között vevén, mivel a jobb résznek első tagja mind két esetben elenyészik, áll :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x}x^a dx,$$

miből világosan következik, hogy állnia kell e következő egyenletnek :

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+1)}{a}, \text{ miből :}$$

$$a\Gamma(a)=\Gamma(a+1),$$

mely képlet segítségével $\Gamma(a)$ mindig kiszámitható, ha a egész tevőleges szám; s így állnak e következő egyenletek :

$$\Gamma(2)=1.\Gamma(1), \quad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2.1\Gamma(1),$$

$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3.2.1\Gamma(1)$$
$$\Gamma(5)=4\Gamma(4)=4.3.2.1\Gamma(1),$$

s így általánosan is áll :

$$\Gamma(n)=(n-1)\ldots\ldots 3.2.1.\Gamma(1);$$

ha pedig az eredetileg adott egészletben $a=1$ tétetik, ered :

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1, \quad \text{következőleg}$$

$\Gamma(a)=1.2.3.4\ldots\ldots\ldots(a-1)$, mint ezt az előbbiekben már meg is találtuk. Hasonlóképen találjuk szintén :

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \text{ s így általánosan :}$$

$$\Gamma\left(\frac{2a+1}{2}\right)=\left(\frac{2a-1}{2}\right)\left(\frac{2a-3}{2}\right)\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right);$$

mivel azonban áll :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi},$$

mint az az előbbiekből ismeretes előttünk, áll :

$$\Gamma\left(\frac{2a+1}{2}\right)=\frac{2a-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots\ldots\ldots\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi},$$

mely érték tehát azon esetre áll, ha a tevőleges törtszám.

Ez pedig az Euler egészelési módjából eredő úgynevezett Gamma függvény.

Eulernek más rendü egészlete, e következő kifejezésben áll :

$$\int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

melynek igazolására Poisson tudós e következő módot adja elő : Tudván ugyanis, hogy e következő két egyenlet áll :

$$\Gamma(p)=2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2p-1}dy, \quad \text{és :}$$

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2q-1}dx,$$

ezen két egyenlet szorzása által kapjuk :

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}.y.^{2p-1}x^{2q-1}dxdy,$$

e kifejezésben pedig, ha x és y alatt épszögü összrendezőket értünk, azután pedig $dxdy$-nak szorzóját azaz

$$e^{-(x^2+y^2)}y^{2p-1}x^{2q-1}=z$$

a térben létező harmadik összrendezőnek veszszük, akkor az előttünk álló kettős egészlet azon testnek térfogatát képviseli, mely az összrendezők szögében fekvén, xy, xz, és yz síkok által záratik be. A fenebbi kifejezés alakját változtatni fogja, mihelyt x és y helyébe sarkösszrendezőket vezetünk be, azaz tétetik:

$$x=r\cos w \quad \text{és} \quad y=r\sin w,$$

minek folytán lesz:

$$dxdy=rdrdw,$$

mit helyettesítvén, és a kijövő kifejezést úgy egészelvén, hogy az egyik egészlet $w=0$ és $w=\frac{\pi}{2}$, a második egészlet pedig $r=0$ és $r=\infty$ határok között véttessék, nyerjük:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}z.rdrdw,$$

ide ped ig ha z-nek r és w által kifejezett értékét helyettesítjük, e következő eredményre fogunk jutni:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2}.r^{2(p+q)-1}.\sin^{2p-1}w.\cos^{2q-1}w.drdw,$$

ezen kettős egészlet mint látjuk, e következő két egészlet szorzatának tekintendő, úgymint:

$$\int_0^\infty e^{-r^2}.r^{2(p+q)-1}dr, \quad \text{és} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}w.\cos^{2q-1}w.drdw,$$

mely egészletek elsejének az adott határok közötti értéke nyilván:

$$=\frac{1}{2}\Gamma(p+q);$$

a második egészletre nézve pedig tétessék $\sin w=\sqrt{x}$, lesz $\cos w=\sqrt{1-x}$ és $dw=\frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$, miknek helyettesítése által a kérdéses egészlet e következő alakot kapja:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

hol $\frac{\pi}{2}$ határt nyilván egységgel kellett felcserélnünk. Ez pedig Eulernek másod rendü egészlete, melyre nézve már most áll:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

miből nyerjük:

$$\text{a).}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

mi által fenebbi állításunk be van bizonyítva. Végre nem lesz felesleges annak megemlítése, hogy ezen egészlet értéke Betta függvényének neveztetik; s e miatt e következő jelkép által is szokott előterjesztetni:

$$\text{b).}\quad B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Ha e kifejezésben r iratik q helyébe, és $p+q$ iratik p helyébe, nyerjük:

$$B(p+q,r)=\frac{\Gamma(p+q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)},$$

és ha az utolsó két egyenletet egymással szorozzuk, ered:

$$B(p,q).B(p+q,r)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

Ezen kifejezésnek jobb része az értékét nyilván nem változtatja, ha p, q és r mennyiségeket bárhogy felcseréljük, s így ugyanannak kell állnia ezen egyenlet bal részére nézve is, következőleg

$$B(p,q).B(p+q,r)=B(p,r).B(p+r,q)=B(q,r).B(q+r,p)$$

mely tulajdonság egyébiránt már a fenebbi a) alatti egyenletből látható. Ennek folytán pedig állnia kell e következő egyenletnek:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx.$$

Az a) alatti egészletnek felső határa azonban általánosabban felfogható, ha t. i. benne $\frac{x}{c}$ iratik x helyébe, tehát $\frac{dx}{c}$ dx helyébe, akkor kevés rövidítések után nyerjük:

$$\int_0^c x^{p-1}(c-x)^{q-1}dx = c^{p+q-1}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

A Betta függvénynek ezen tulajdonságából, a Gamma függvénynek egy új tulajdonságát is lehet származtatni, még pedig e következő módon: Az a) alatti egyenletben tétessék $p=q$, lesz:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}dx = B(p,p),$$

e kifejezésben pedig, ha $\frac{1}{2}(1+y)$ iratik x helyébe, mely esetben $dx=\frac{dy}{2}$ lesz, akkor a határok nyilván $(+1)$ és (-1)-re mennek át, és e következő egyenletre fogunk jutni:

$$\frac{1}{2^{2p-1}}\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{p-1}dy = B(p,p);$$

mivel pedig könnyü belátni, hogy helyes e következő egyenlet:

$$\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{p-1}dy = 2\int_0^{+1}(1-y^2)^{p-1}dy,$$

helyesnek kell lenni ezen egyenletnek is:

$$\frac{1}{2^{2p-2}}\int_0^{+1}(1-y^2)^{p-1}dy = B(p,p).$$

Ezen utolsó egészlet pedig a Gamma függvény alakjára visszavezethető, ha t. i. z iratik y^2 helyébe, lesz:

$$dy = \frac{dz}{2y} = \frac{dz}{2\sqrt{z}},$$

és az utolsó egyenlet még így is áll:

$$\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^{+1} z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{p-1}dz = B(p,p);$$

ámde az a) alatti egyenlet szerint kell hogy álljon:

$$\int_0^{+1} z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{p-1}dz = B\left(\frac{1}{2}, p\right),$$

s így helyes lesz e következő egyenlet is :

$$\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^{+1} z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{p-1}dz=\frac{1}{2^{2p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right),$$

minek folytán áll szintén :

$$B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right),$$

és a b) alatti egyenlet szerint :

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)},$$

és ha még azt is tekintetbe veszszük, hogy :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \text{lesz :}$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\sqrt{\pi}.\Gamma(2p),$$

és ha p egész tevőleges szám, ezen utolsó egyenlet ebbe megy át :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\cdot\frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)};$$

mivel pedig az előbbiekből ismeretes előttünk, hogy :

$$\Gamma(2p)=1.2.3.4\ldots\ldots(2p-1),\ \text{és}$$
$$\Gamma(p)=1.2.3.4\ldots\ldots(p-1),\ \text{áll még :}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\cdot\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(2p-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots(p-1)}.$$

s ezen egyenletnek figyelmes megtekintéséből ered :

$$\frac{2^p}{\sqrt{\pi}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)=\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(2p-1)}{2^{p-1}1.2.3.4\ldots\ldots(p-1)}$$

avagy rövidebben :

$$\frac{2^p}{\sqrt{\pi}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)=1.3.5.7\ldots\ldots(2p-1).$$

A most megalapított Gamma és Betta függvények, igen kényelmesen szolgálnak számtalan új határozott egészletek felfedezésére; ugyanis ha a fenebbi a) alatti egyenletben $\frac{(k+1)y}{k+y}$ iratik x helyébe, mely esetben lesz :

$$dx=\frac{k(k+1)dy}{(k+y)^2},$$

s hasonló módon találjuk szintén :

$$1-x=\frac{k(1-y)}{k+y},$$

akkor ezen értékek helyettesítése által kapjuk :

$$k^q(k+1)^p\int_0^1\frac{y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy}{(k+y)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

miből nyilván ered :

$$\int_0^1\frac{y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy}{(k+y)^{p+q}}=\frac{1}{k^q(k+1)^p}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

mely határozott egészlet, mint látjuk, egészen új.

MÁSODIK FEJEZET.

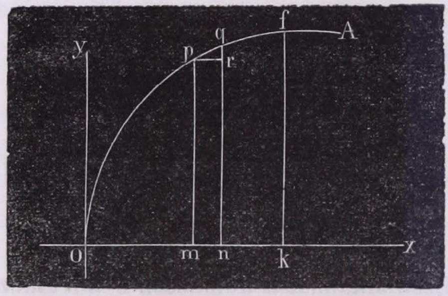
AZ EGÉSZLETI HÁNYLAT ALKALMAZÁSA A MÉRTANRA.

44.) Ezen alkalmazás különösen e következő négy műtételben áll : 1-ször) A sík görbe vonalok által bezárt felületek négyszögitésében. 2-szor) A sík görbe vonalok egyenesítésében, avagy hosszaik meghatározásában. 3-szor) A görbe felületek, nevezetesen pedig a forgási felületek kisíkításában, s végre 4-szer) A testek, különösen pedig a forgási testek köbözésében. Ezen négy műtételt tehát itt rendben tárgyalás alá fogjuk venni.

A GÖRBE VONALOK ÁLTAL BEZÁRT SÍK FELÜLETEK NÉGYSZÖGÍTÉSE.

45.) Egy épszögü tengely-rendszerre nézve, képzeltessék tetszésszerinti OA sík görbe vonal (2-ik idom), akkor ennek bizonyos p pontjának összrendezői lesznek $Om=x$ és $mp=y$, mely két egyenes és az $Op=s$ görbe vonal által a sík Opm felület záratik be, melynek meghatározásáról itt szó van. Ezen felületre nézve azonnal látjuk, hogy ez x-nek valamely függvénye, mely függvénynek a megalapítása a jelen értekezés czélja. Hogy tehát ezen felületnek megfelelő általános mintát lehessen felállítni, növesztessék az $Om=x$ metszék $mn=dx$ külzelékével, akkor az $On=x+dx$ metszéknek az $nq=y+dy$ rendező felel meg, és az $mpqn$ felület nem lesz egyéb, mint a keresett $Opm=F$ felületnek végtelen kicsiny növete avagy külzeléke, melynek meghatározása már könnyü, minthogy az *mpqn* idom oldalmás alaku, melyben *pq* ív egyenes vonalnak tekinthető, felülete tehát e következő lesz :

(2-ik idom.)



$$dF=\frac{2y+dy}{2}.dx=ydx+\frac{1}{2}dxdy,$$

hol a másod rendü végtelen kicsiny tagot elhanyagolván, és a hátra maradó egyenletet egészelvén, nyerni fogjuk :

$$1.)\quad F=\int ydx+C,$$

ez pedig már azon általános minta, melynek segítségével bármely görbe vonal által bezárt felületet meg lehet határozni, mihelyt y helyébe, a görbe vonalnak megfelelő és x által kifejezett érték helyettesítetik, miből egyszersmind látjuk, hogy F valóban x-nek függvénye. Ezen mintának alkalmazása végett e következő érdekes példákat hozzuk elő:

(1-ső Példa.) Meghatározandó legyen a hajtalék felülete. Ezen görbe vonalnak egyenlete : $y^2=px$, következőleg $y=\sqrt{px}$, mely érték helyettesítése adja :

$$F=\int dx\sqrt{px}=\sqrt{p}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{px}+C.$$

Az állandónak a meghatározására látjuk, hogy x-el F is elenyészik, az állandónak tehát értéke nincs, s így áll :

$$F=\frac{2}{3}x\sqrt{px}=\frac{2}{3}x.y,$$

mely eredmény azt mondja, hogy a kérdéses hajtaléki felület, az x és y oldalu épszögnek $\frac{2}{3}$-át teszi.

Ha két rendező között fekvő *mpfk* felület (2-ik idom) meghatározása kivántatnék, akkor $Om=a$, és $Ok=b$ tétetvén, a kérdéses felület nem lesz egyébb, mint b és a határok között vett egészletünk értéke, s áll :

$$(mpfk) \text{ felület} = \int_a^b dx\sqrt{px} = \frac{2}{3}b\sqrt{bp} - \frac{2}{3}a\sqrt{ap}.$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{p}(b\sqrt{b} - a\sqrt{a}).$$

(2-ik Példa.) Meghatározandó legyen a kerülék felülete. Ezen görbe vonal egyenlete : $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ levén, az általános 1) alatti minta így áll :

$$F = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2 - x^2} + C,$$

s nincs egyéb hátra, mint csak a kijelentett egészelést véghez vinni, mi végre a 21)-dik szám III) alatti képlete használandó, melynek összehasonlításából ered :

$m=0$, $a=a^2$, $b=-1$, $n=2$ és $p=\frac{1}{2}$, miknek helyettesítése adja :

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

mely utolsó egészlet már ismeretes levén, ha még az állandó szorzó is tekintetbe vétetik, nyerni fogjuk :

$$F = \frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{2a} + \frac{ab}{2} arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Az állandónak meghatározására, a (3-ik idom)-ból látjuk, hogy az $Om=x$ metszékhez tartozó *Ocnm* felületről volt szó, mely x-el szinte elenyészik ; de mivel ez esetben F felület is 0-sá válik, C állandónak itt értéke nem lesz, a keresett teljes felület tehát e következő egyenlet által fog adatni :

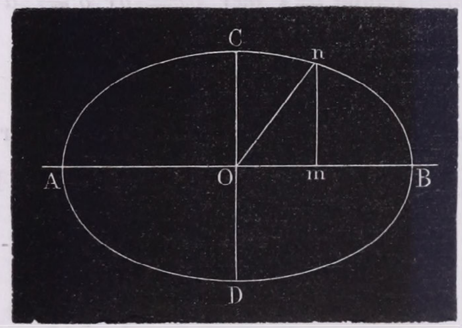
$$F = \frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{ab}{2} arc.sin\frac{x}{a};$$

ha pedig a kerülék egyenlete vétetik tekintetbe, ezen kifejezést még így is szabad lesz írni :

$$F = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} arc.sin\frac{x}{a};$$

ha már most a (3-ik idom)-ban On átlót húzunk, a kérdéses felület két részre fog osztatni, melyek egyike az Onm háromszög,

(3-dik idom.)



melynek felülete $=\frac{xy}{2}$, a második OnC pedig, melyet kerüléki kivágásnak szabad nevezni, nyilván $\frac{ab}{2} arcsin \frac{x}{a}$ kifejezés által fog adatni. Ha az utolsó egyenletben $x=a$ tehát $y=0$ tétetik, akkor a kerülék negyedének felületét fogjuk nyerni, s ez lesz :

$$F=\frac{ab}{2} arcsin 1=\frac{ab\pi}{4},$$

a kerülék egész felülete tehát lesz : $=ab\pi$, mely kifejezésben $b=a$ tétetvén, a kör ismert $a^2\pi$ felületét fogjuk nyerni :

(3-ik Példa.) Megtalálandó a mentelék felülete :

Ezen görbe vonal egyenlete $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ levén, áll :

$$F=\frac{b}{a}\int dx \sqrt{x^2-a^2}+C,$$

minek egészelésére e következő csinos mód alkalmazható : Tétessék t. i.

$\sqrt{x^2-a^2}=tx$, s lesz : $x^2=\frac{a^2}{1-t^2}$, és $t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, tehát

$$\int dx \sqrt{x^2-a^2}=\int txdx,$$

mely egészlet, ha részletesen tárgyaltatik, teendő lesz :

$$dv = xdx, \quad \text{és} \quad u = t, \quad \text{s lesz :} \quad v = \frac{x^2}{2} \quad \text{és} \quad du = dt,$$

miknek helyettesítése adja :

$$\int txdx = \frac{tx^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 dt, \quad \text{avagy :}$$

$$\int txdx = \frac{tx^2}{2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dt}{1-t^2}$$

mely utolsó egészlet már ismert alaku, áll tehát :

$$\int txdx = \frac{tx^2}{2} + \frac{a^2}{4} log \frac{1-t}{1+t},$$

és ha t helyébe értékét visszahelyettesítjük, áll :

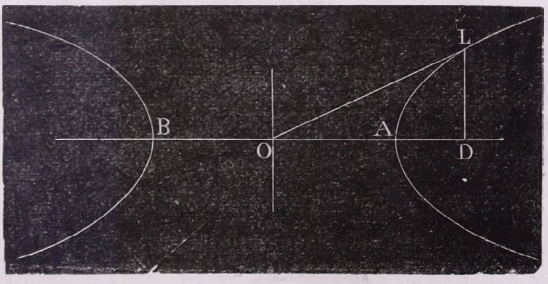
$$F = \frac{b}{a}\int dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} + \frac{ab}{4} log \frac{x - \sqrt{x^2-a^2}}{x + \sqrt{x^2-a^2}} + C,$$

mely kifejezés rövidítésére jó lesz, az utolsó tagnak mind számlálóját, mind nevezőjét $(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ mennyiséggel szorozni, és ezen törtszámot egyszersmind megforditni, mi által kapjuk :

$$F = \frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2} log \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C,$$

ez pedig azon menteléki felület volna, mely a (4-dik idom)-ban ALD által állíttatik elő, mely, mint látjuk, elenyészik azon

(4-dik idom.)



esetre, ha $x = a$; mivel pedig ezen értékre nézve kifejezésünk mindkét tagja szintén elenyészik, az állandó is $=0$ lesz, s így a mentelék teljes felülete így áll :

$$F = \frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2} log \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

és a mentelék egyenletét tekintetbe vévén, áll szintén :

$$F=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a};$$

s mivel az $\frac{xy}{2}$ tag nyilván nem egyéb, mint az OLD háromszög felülete (4-dik idom), következik, hogy a jelen kifejezésnek utolsó tagja nem lehet egyéb, mint az OAL felület, mely menteléki kivágásnak szokott neveztetni.

(4-dik Példa.) Az egyenoldalu mentelékre nézve, melynek összrendezői a végérintőkön számíttatnak, áll :

$$xy=\frac{a^2}{2}, \text{ miből : } y=\frac{a^2}{2x},$$

mely érték helyettesitése által kapjuk :

$$F=\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{x}+C=\frac{a^2}{2}logx+C;$$

ha x' azon metszék, melyre nézve a kérdéses felület elenyészik, akkor az x' és x metszékek között fekvő felület e következő határozott egészlet által fog adatni :

$$F=\frac{a^2}{2}\int_{x'}^{x}\frac{dx}{x}=\frac{a^2}{2}log\frac{x}{x'},$$

és ha $a=1$, akkor egyszerüen áll : $F=\frac{1}{2}log\frac{x}{x'}$, s így a metszékek természetes logarithmusai által azonnal ki van fejezve ezen mentelék felülete, mi miatt ezen logarithmusok menteléki logarithmusoknak is neveztetnek (hyperbolische Logarithmen).

(5-dik Példa.) Ha azon görbe vonal felületéről volna szó, melynek egyenlete :

$$y=a^x, \text{ akkor áll :}$$

$$F=\int a^x dx=\frac{a^x}{loga}+C,$$

mely felület ha megint x és x' határok között vétetik, áll :

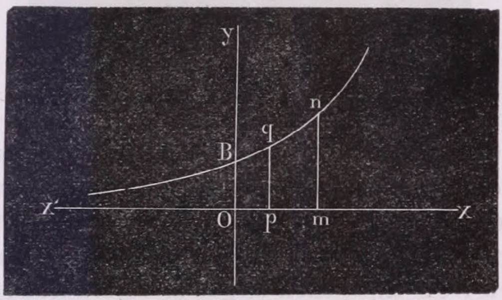
$$F=\frac{a^x-a^{x'}}{loga}=\int_{x'}^{x}a^x dx;$$

a kérdéses görbe vonal az (5-dik idom)-ban terjesztetik elő, hol OX a metszéki, OY pedig a rendezői tengely, tehát

$Op=x'$ és $Om=x$, a megtalált felület pedig $=pqnm$; ha pedig $x'=0$, akkor az $OBnm$ felület lesz:

$$F=\frac{a^x-1}{loga};$$

(5-dik idom.)



ha pedig a metszékek nemlegesek, mely esetben O-tól X' felé számíttatnak, akkor a felület lesz: $=\frac{1-a^{-x}}{loga}$, mely kifejezésben $x=\infty$ tétetvén, azon felületet nyerjük, mely a görbe vonal és annak OX' tengelye között végtelenig kiterjed $=\frac{1}{loga}$.

(6-dik Példa.) Meghatározandó a hengerlék felülete. Azon feltét alatt, hogy a metszékek a hengerlék C csúcspontjából számíttatnak, legyen $CN=x$ egy tetszésszerinti metszék, melyhez tartozik az $NQ=y$ rendező, akkor QCN lesz a meghatározandó felület, melynek kiszámítására áll:

$$\int ydx=xy-\int xdy;$$

továbbá tudjuk, hogy a hengerlék ez esetbeni egyenlete:

$$y=r.arccos\frac{r-x}{r}+\sqrt{2rx-x^2}, \text{ miből:}$$

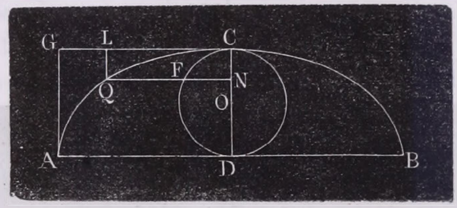
$$dy=\frac{(2r-x)dx}{\sqrt{2rx-x^2}},$$

s ennek helyettesítése adja:

$$\int ydx=xy-\int dx\sqrt{2rx-x},$$

mely egyenlet figyelmes megtekintéséből látjuk, hogy xy szorzat nem egyéb, mint a $QLCN$ (6-dik idom) épszög felülete, melyből nyilván QCL rész kivonandó, hogy a hengerlék

(6-dik idom.)



QCN felülete nyeressék; kifejezésünk második tagja tehát ezen kivonandó részt állítja elő, ámde ugyanazon tag a nemző kör felületének FCN részét is terjeszti elő, következik tehát, hogy a QCL felület az FCN felülettel ugyanaz. A fél hengerlék ACD felületének meghatározására tehát, az $AGCD$ épszög felületétől az ACG felületet ki kell vonni, mely felület nyilván a félkör CFD felületével ugyanaz; mivel pedig az $ADCG$ épszög felülete $=\pi r.2r=2\pi r^2$, a félkör felülete pedig $=\frac{1}{2}\pi r^2$, lesz a fél hengerlék felülete $=\frac{3}{2}\pi r^2$, az egész hengerlék felülete pedig $=3\pi r^2$, azaz, ezen felület a nemzőkör háromszoros felületével egyenlő.

Csinosabb módon találjuk föl a hengerlék felületét, ha számítás alapjául e következő két egyenlet vétetik föl:

$$x=r(1-cos\varphi) \quad \text{és} \quad y=r(\varphi+sin\psi),$$

melyeknél fogva a metszékek szintén C pontból (6-dik idom) számíttatnak. Ezen egyenletek elsejét külzelvén, kapjuk:

$$dx=rd\varphi sin\varphi,$$

mit az általános egyenletbe tévén, lesz:

$$F=r^2\int d\varphi sin\varphi(\varphi+cos\varphi), \text{ avagy:}$$

$$F=r^2\int \varphi d\varphi sin\varphi+r^2\int d\varphi sin^2\varphi;$$

ezen egészletek elsejét részletesen tárgyalván, kapjuk:

$$r^2\int \varphi d\varphi sin\varphi=-r^2\varphi cos\varphi+r^2 sin\varphi,$$

a masodik egészletre pedig egy ismert lenyomási képletet alkalmazván, lesz:

$$r^2\int d\varphi sin^2\varphi=-\frac{r^2 sin\varphi cos\varphi}{2}+\frac{r^2\varphi}{2},$$

s mindezeknek folytán:

$$F=-r^2\varphi cos\varphi+r^2 sin\varphi-\frac{r^2 sin\varphi cos\varphi}{2}+\frac{r^2\varphi}{2}+C.$$

Az állandó meghatározására tudjuk, hogy ha $\varphi=0$, a kérdéses felület is elenyészik, miből következik $C=0$, a keresett és φ szöghöz tartozó teljes felület tehát lesz :

$$F=-r^2\varphi cos\varphi+r^2 sin\varphi-\frac{r^2 sin\varphi cos\varphi}{2}+\frac{r^2\varphi}{2};$$

ha végre a fél hengerlék felületét akarjuk nyerni, akkor csak π teendő φ helyébe, minek eredménye lesz :

$$F=r^2\pi+\frac{r^2\pi}{2}=\frac{3}{2}r^2\pi, \text{ mint előbb.}$$

Ha pedig számítás alapjául e következő két egyenlet vétetik :

$$x=r(\varphi-sin\varphi) \quad \text{és} \quad y=r(1-cos\varphi),$$

melyeknél fogva AB lesz a metszéki tengely, akkor áll :

$$dx=rd\varphi(1-cos\varphi), \text{ s ennek következtében}$$

$$F=r^2\int d\varphi-2r^2\int d\varphi cos\varphi+r^2\int d\varphi cos^2\varphi, \text{ avagy :}$$

$$F=r^2\varphi-2r^2 sin\varphi+\frac{r^2 sin\varphi cos\varphi}{2}+\frac{1}{2}r^2\varphi+C;$$

minthogy pedig, ha $\varphi=0$, az F felület is elenyészik, lesz $C=0$, s így :

$$F=r^2\varphi+\frac{1}{2}r^2\varphi-2r^2 sin\varphi+\frac{r^2 sin\varphi cos\varphi}{2},$$

hol $\varphi=\pi$ tétetvén, a fél hengerlék felülete lesz :

$$F=\frac{3}{2}\pi r^2, \text{ mint előbb.}$$

(7-ik Példa.) Határoztassék meg a Cissois felülete. Ezen görbe vonal egyenlete, mint tudjuk, e következő :

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{a-x}},$$

mely értéket ha az általános négyszögitési egyenletbe helyettesítjük, lesz :

$$F=\int dx\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}=\int xdx.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}},$$

és ha $\sqrt{x}$-el mind a számlálót mind a nevezőt szorozzuk, lesz :

$$F=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{ax-x^2}}+C.$$

Ennek egészelésére alkalmaztassék e következő lenyomási képlet :

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x^{m-1}.\sqrt{2ax-x^2}}{m}+\frac{a(2m-1)}{m}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

melyben $m=2$, és $2a$ helyébe a-t tévén, kapjuk :

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{ax-x^2}}=-\frac{x\sqrt{ax-x^2}}{2}+\frac{3a}{4}\int\frac{xdx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

az utolsó egészletre pedig újra alkalmazván az előttünk álló lenyomási képletet, lesz :

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{ax-x^2}}=-\sqrt{ax-x^2}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

mely utolsó egészlet már ismeretes levén, a helyettesítés megtörténte után kapjuk :

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{ax-x^2}}=-\frac{x\sqrt{ax-x^2}}{2}-\frac{3a}{4}\sqrt{ax-x^2}+$$
$$\frac{3a^2}{8}arccos\frac{a-2x}{a}+C.$$

Az állandónak meghatározására, a kérdéses görbe vonal természetéből tudjuk, hogy ha $x=0$, a hozzá tartozó felület is elenyészik, mely körülmény $C=0$ értékére vezettetvén, a teljes felület lesz :

$$F=-\frac{x\sqrt{ax-x^2}}{2}-\frac{3a}{4}\sqrt{ax-x^2}+\frac{3a^2}{8}arccos\frac{a-2x}{a},$$

mely általános kifejezésben x helyébe, 0 és a határok között fekvő minden tetszésszerinti érték tehető. Ha pedig az egész végtelenig kiterjedő cissois felületét akarnók tudni, akkor az előttünk álló kifejezésben a lesz teendő x helyébe, mi által kapjuk :

$$F=\frac{3a^2}{8}arccos(-1)=\frac{3a^2\pi}{8};$$

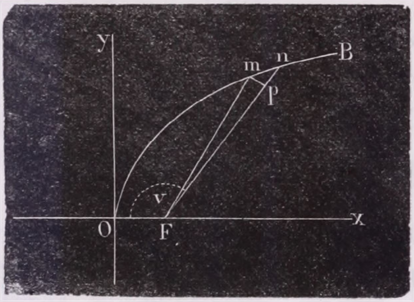
mivel pedig $\frac{a^2\pi}{4}$ nem egyéb, mint azon kör felülete, mely a cissois szerkeztésére kivántatik, és az előbbi kifejezés még így is írható ;

$$F=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2\pi}{4},\text{ következik}$$

hogy a cissois felülete egy oldalról, ezen kör felületének $\frac{3}{2}$-vel, tehát mind két oldalról azaz a cissois egész felülete az említett kör háromszoros felületével egyenlő.

46.) **(Négyszögítés sark-összrendezők által.)** Ha F a gyupont azon görbe OB vonalra nézve, mely a (7-ik idom)-ban terjesztetik elő, akkor $Fm=r$ és $OFm=v$ szög által, nem

(7-dik idom.)



csak m pontnak fekvése, hanem az OFm felület is teljesen meg van határozva. Egy négyszögítési általános egyenletnek származtatására, növesztessék v szög dv külzelékével, akkor az Fm és Fn vezető sugarak végtelen közel állnak egymáshoz, az Fmn háromszög tehát az OFm felület végtelen kicsiny növete avagy külzeléke lesz, melynek meghatározására húzassék mp függőlegesen Fn-re, s áll: $mp=r\sin dv=rdv$, mivel dv szög végtelen kicsiny; s mivel $Fn=r+dr=r$, a kérdéses háromszög felülete lesz: $=\frac{1}{2}r^2dv=dF$, ha t. i. F-el jegyeztetik az OmF felület, s ennek folytán

$$F=\frac{1}{2}\int r^2dv+C,$$

mely már a négyszögítésnek általános egyenlete, melyben csak r helyébe az illető érték teendő. Példa gyanánt vegyük fel, hogy a hajtalék felülete meghatározandó; akkor ezen görbe vonal sarkegyenlete e következő;

$$r=\frac{p}{2(1+cosv)},$$

mely értéket r helyébe tévén a fenebbi egyenletbe, áll :

$$F=\frac{p^2}{8}\int\frac{dv}{(1+cosv)^2};$$

mivel pedig $1+cosv=2cos^2\frac{1}{2}v$, lesz még :

$$F=\frac{p^2}{32}\int\frac{dv}{cos^4\frac{1}{2}v}=\frac{p^2}{16}\int\frac{du}{cos^4u},$$

ha t. i. $\frac{1}{2}v=u$ tehát $dv=2du$ tétetik. Ezen kifejezés egészelésére szolgál a 34)-dik szám 14) alatti képlete, melynek segítségével nyerjük :

$$\int\frac{du}{cos^4u}=\frac{sinu}{3.cos^3u}+\frac{2}{3}tgu,$$

s ennek folytán :

$$F=\frac{p^2tgu}{24}\left(\frac{1}{2cos^2u}+1\right)+C,$$

és ha u helyébe az eredeti érték visszahelyeztetik, lesz :

$$F=\frac{p^2}{24}tg\frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2}sec^2\frac{1}{2}v+1\right)+C;$$

mivel pedig v-vel F is elenyészik, C állandónak sem lesz értéke, s így a teljes felület lesz :

$$F=\frac{p^2}{24}tg\frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2}sec^2\frac{1}{2}v+1\right),$$

mely képletben ha $v=90^0$ tétetik, nyerjük azon felületet, mely a gyupontból függőlegesen emelt vezető sugárhoz tartozik, s ez lesz : $F=\frac{p^2}{12}$, mint lennie is kell, minthogy $\frac{p^2}{12}=\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{4}\cdot\frac{p}{2}$, minek értelme világos.

Vegyük föl még, hogy a logarithmusi csigavonal felülete meghatározandó, akkor áll :

$$r=a^v,$$

mely értéket az általános egyenletbe tévén, lesz :

$$F=\frac{1}{2}\int a^{2v}dv+C=\frac{a^{2v}}{4loga}+C.$$

Az állandó meghatározására tudjuk, hogy ha $v=0$, F felület is elenyészik, áll tehát:

$$0=\frac{1}{4loga}+C,\ \text{miből}:\ C=-\frac{1}{4loga},\ \text{következőleg}:$$

$$F=\frac{a^{2v}-1}{4loga},$$

és ha e iratik a helyébe, lesz:

$$F=\frac{e^{2v}-1}{1}.$$

Ha pedig a fenebbi egészlet v és u határok között vétetik, áll:

$$\frac{1}{2}\int_u^v a^{2v}dv=\frac{a^{2v}-a^{2u}}{4loga},$$

és ha $a=e$, nyerni fogjuk:

$$F=\frac{e^{2v}-e^{2u}}{4}=\frac{r^2-r'^2}{4},$$

miből látjuk, hogy a kérdéses felület mindig megtaláltatik, ha a vezető sugarak négyzeteinek különbsége elosztatik négygyel.

Hasonlóképen találjuk meg az Archimedes csigavonalának felületét is. Ezen görbe vonalnak egyenlete:

$r=av$, minek helyettesítése adja:

$$F=\frac{1}{2}\int a^2v^2dv+C=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{v^3}{3}+C,$$

s minthogy v-vel F is elenyészik, lesz $C=0$, következőleg

$$F=a^2v^2\frac{v}{6}=r^2\frac{v}{6},$$

azaz, a vezető sugár négyzete szoroztassék a megfelelő szögnek hatod részével, sugári részekben adva.

A GÖRBE VONALOK EGYENESÍTÉSE.

47.) A görbe vonalok hosszának meghatározása egyenesítésnek mondatik. Ezen műtételnek véghezvitelére, egy általános képlet lesz szükséges, melyet e következő módon származtatunk: Látjuk t. i. hogy $Om=x$ metszéknek (2-dik idom) $Op=s$ ív felel meg, ha pedig ezen metszéket $mn=dx$

külzelékkel növesztjük, a hozzá tartozó s ív szintén $pq=ds$ végtelen kicsiny növést nyer, és ha pr párhúzamos OX-hez, ered pqr az úgynevezett külzeléki háromszög, melyben $pr=dx$, $qr=dy$ és $pq=ds$, s ennek folytán áll:

$$ds^2=dx^2+dy^2,$$

miből gyököt húzván, s azután egészelvén, nyerni fogjuk:

$$1).\quad s=\int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+C,$$

s ez az egyenesítésnek általános egyenlete, melyben csak $\frac{dy}{dx}$ helyébe, a kérdéses görbe vonal egyenletének első külzeléki hányadosa helyettesítendő. Ezen képletnek alkalmazása e következő esetekből látható lesz:

(1-ső eset.) Egyenesítendő legyen a hajtalék. Ezen görbe vonal egyenlete: $y^2=ax$, hol a a góczhúr; s lesz:

$$2ydy=adx,\quad \text{miből:}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}},$$

következőleg

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{a}{4x},$$

minek helyettesítése a fenebbi képletben adja:

$$s=\int dx\sqrt{1+\frac{a}{4x}}=\int dx\sqrt{\frac{4x+a}{4x}},$$

minek rövidítésére tétessék $a=4b$, s lesz $b=\frac{a}{4}$, tehát:

$$s=\int dx\sqrt{\frac{b+x}{x}}=\int\frac{dx(b+x)}{\sqrt{bx+x^2}},$$

mely kifejezés e következő két egészletre bomlik:

$$s=b\int\frac{dx}{\sqrt{bx+x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{bx+x^2}},$$

mely egészletek utolsóját a 24)-dik szám IX) alatti mintája szerint tárgyalván, nyerni fogjuk:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{bx+x^2}}=\sqrt{bx+x^2}-\frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{bx+x^2}},$$

s ennek folytán:

$$s=\sqrt{bx+x^2}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{bx+x^2}},$$

ezen utolsó egészletre nézve pedig a 8)-dik szám 8-dik esete vétessék tekintetbe, s ered :

$$s=\sqrt{bx+x^2}+\frac{b}{2}log(2x+b+2\sqrt{bx+x^2})+C.$$

Az állandó meghatározására, látjuk, hogy ha $x=0$, az s ív is elenyészik , áll tehát : $0=\frac{b}{2}logb+C$, miből $C=-\frac{b}{2}logb$, a hajtaléki ív teljes hossza tehát lesz :

$$s=\sqrt{bx+x^2}+\frac{b}{2}log\frac{2x+b+2\sqrt{bx+x^2}}{b},$$

hol b helyébe értékét is lehet helyettesítni. Azon esetre , ha $x=b$ kapjuk :

$$s=b\sqrt{2}+\frac{b}{2}log(3+2\sqrt{2}).$$

(2-ik eset.) Egyenesítendő legyen a kerülék. Ezen görbe vonal egyenlete : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, melynek külzelése adja :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad \text{tehát:}\quad \frac{dy^2}{dx^2}=\frac{b^4x^2}{a^4y^2},$$

minek helyettesítése által kapjuk :

$$s=\int dx\sqrt{\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}}=\int\frac{dx}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}};$$

s mivel $a^2-b^2=a^2e^2$ a külpontiság négyzete, áll még :

$$3.)\quad s=\int dx\frac{\sqrt{a^2-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

hogy pedig ezen kifejezést annál könnyebben lehessen egészelni, tétessék : $x=a\cos\varphi$ minek helyes volta könnyen belátható, s lesz : $dx=ad\varphi sin\varphi$, s nyerjük :

$$s=-\int ad\varphi sin\varphi\frac{\sqrt{a^2-a^2e^2cos^2\varphi}}{\sqrt{a^2-a^2cos^2\varphi}},\quad \text{avagy :}$$

$$s=-a\int d\varphi\sqrt{1-e^2cos^2\varphi},$$

mely egészlet, mint látjuk csak sor által nyerhető, e végre pedig $\sqrt{1-e^2cos^2\varphi}$ fejtessék sorba a Newton mintája szerint, s lesz :

$$\sqrt{1-e^2cos^2\varphi}=1-\frac{1}{2}e^2cos^2\varphi-\frac{1}{2.4}e^4cos^4\varphi-\frac{1}{2.4.6}e^6cos\varphi^6-\ldots\ldots,$$

mit $d\varphi$-vel szorozván és egészelvén, áll :

$$-a\int d\varphi\sqrt{1-e^2cos^2\varphi}=-a\int d\varphi+\frac{ae^2}{2}\int d\varphi cos^2\varphi+$$

$$\frac{ae^4}{2.4}\int d\varphi cos^4\varphi+\ldots\ldots$$

mely egészletek mind ismert alakkal bírnak, és e következő minta szerint tárgyaltatnak :

$$\int dx cos^n x=\frac{sinx cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int dx cos^{n-2}x;$$

mivel azonban hosszadalmas lenne, a fenebbi egészletek mindegyikét ezen minta szerint tárgyalni, jobbnak látszik itt, mindjárt egy olyan kerüléki ívnek a hosszát keresni, mely bizonyos adott határok között fekszik; mivégre czélszerü lesz, a kerülék negyedének hosszát meghatározni, mivel ez, mint könnyü belátni, 0 és $\frac{\pi}{2}$ határok között foglaltatik, erre nézve tehát áll :

$$-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi\sqrt{1-e^2cos^2\varphi}=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi+\frac{ae^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi cos^2\varphi+$$

$$\frac{ae^4}{2.4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi cos^4\varphi+\ldots\ldots,$$

hogy pedig mind ezen egészleteket a kitűzött határok között lehessen venni, szükség lesz, legelőször a fen előhozott mintát ugyanazon határok között venni, mi által, minthogy ezen mintának első tagja mindkét határértékre nézve elenyészik, e következő eredményre jutunk :

$$2,)\quad\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}dx cos^n x=\frac{n-1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi=\frac{a\pi}{2}.$$

A mi már most sorunk első egészletét illeti, erre nézve áll :

$$-a\int d\varphi=-a\varphi,\ \text{tehát :}\ -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d=\varphi\,\frac{a\pi}{2},$$

ha pedig a második egészletre a 2) alatti mintát alkalmazzuk, lesz :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi cos^2\varphi=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi=-\frac{\pi}{2},$$

$$\text{tehát: } \frac{ae^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi cos^2\varphi = -\frac{ae^2\pi}{2.4},$$

hasonló módon áll szinte:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi cos^4\varphi = \frac{3}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi cos^2\varphi = -\frac{3}{4}.\frac{\pi}{4}, \text{ s ennek folytán:}$$

$$\frac{ae^4}{2.4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi cos^4\varphi = -\frac{1.3.e^4}{2.4}.\frac{\pi}{16}$$

s így folytatván ezen eljárást, végre e következő sorra fogunk jutni:

$$-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \sqrt{1-e^2cos^2\varphi} = \frac{a\pi}{2} - \frac{ae^2}{2}.\frac{\pi}{4} - \frac{1.3.ae^4}{2.4}.\frac{\pi}{16} - \ldots.$$

mely sor segítségével, a kerülék negyedének hossza már kiszámítható; ha a kerülékben $a=b$ tehát $e=0$ tétetik, akkor az körré válik, és az előttünk álló sor, a kör negyedének $=\frac{a\pi}{2}$ hosszát adja, mint annak lennie is kell.

A kerüléki ív hosszát az előbbi 3) alatti kifejezésből lehet közvetlenül kitalálni, ez t. i. még így is írható:

$$s = \int dx \frac{\sqrt{a^2-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\int dx \frac{\left(1-\frac{e^2x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

s ezen kifejezés számlálóját a Newton mintája szerint sorba fejtvén, lesz:

$$\left(1-\frac{e^2x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e^2x^2}{2a^2} - \frac{e^4x^4}{2.4.a^4} - \frac{1.3.e^6x^6}{2.4.6.a^6} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

minek helyettesítése az egészletek e következő sorát adja:

$$s = a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{ae^2}{2a^2}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a-x^2}} - \frac{ae^4}{2.4.a^4}\int \frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \ldots\ldots$$

mely egészletek értéke már ismeretes előttünk, áll t. i.

$$a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a.arc.sin\frac{x}{a},$$

továbbá egy ismert lenyomási képlet szerint kapjuk:

$$\frac{ae^2}{2a^2}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{ae^2}{2}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2} - \frac{1}{2}arcsin\frac{x}{a}\right],$$

hasonlóképen áll szintén:

$$\frac{ae^4}{2.4.a^4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{ae^4}{2.4}\Big[\frac{x}{4a^2}\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{3}{2}\Big)\sqrt{a^2-x^2}$$

$$-\frac{3}{2.4}arcsin\frac{x}{a}\Big];$$

s így a kerüléki ív hossza lesz :

$$s=a.arcsin\frac{x}{a}+\frac{ae^2}{2}\Big[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2}-\frac{1}{2}arcsin\frac{x}{a}\Big]+\ldots\ldots$$

mely egyenletben ha $e=0$ tétetik, nyerni fogjuk :

$$s=a.arcsin\frac{x}{a},$$

s ez nyilván a körív hossza, melyben $x=\iota$ tételvén, lesz :

$$s=a.arcsin1=\frac{a\pi}{2},\text{ mint a körnegyed hossza.}$$

(3-dik eset.) Meghatározandó a menteléki ív hossza. Ezen görbe vonal egyenlete ez :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad\text{miből :}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y},$$

s ezt az általános egyenesítési mintába tévén, lesz :

$$s=\int dx\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}=\int dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2(x^2-a^2)}},$$

mivel pedig : $a^2+b^2=a^2e^2$ a mentelék külpontisága, áll még:

$$s=\int dx\frac{\sqrt{e^2x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

hogy ezen kifejezést annál könnyebben lehessen egészelni, tétessék :

$$x=\frac{a}{cos\varphi},\text{ lesz : }dx=\frac{ad\varphi sin\varphi}{cos^2\varphi},$$

minthogy a menteléknél x mindig nagyobb a-nál, ennek folytán lesz :

$$s=a\int\frac{d\varphi}{cos^2\varphi}\sqrt{e^2-cos^2\varphi}=ae\int\frac{d\varphi}{cos^2\varphi}\sqrt{1-\frac{cos^2\varphi}{e^2}},$$

most pedig a Newton mintája szerint áll :

$$\Big(1-\frac{cos^2\varphi}{e^2}\Big)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{cos^2\varphi}{2e^2}-\frac{cos^4\varphi}{2.4.e^4}-\frac{1.3.cos^6\varphi}{2.4.6.e^6}-\ldots\ldots$$

mi által az egészletek következő sorát fogjuk kapni :

$$s=ae\int\frac{d\varphi}{cos^2\varphi}-\frac{ae}{2e^2}\int d\varphi-\frac{ae}{2.4.e^4}\int d\varphi cos^2\varphi$$

$$-\frac{1.3.a.e}{2.4.6.e^6}\int d\varphi cos^4\varphi-\ldots\ldots$$

mely egészletek mind ismert alakkal bírván, könnyen meghatározható, káll t. i. még:

$$s=aetg\varphi-\frac{ae}{2e^2}\varphi-\frac{ae}{2.4.e^4}\int d\varphi cos^2\varphi-\frac{1.3.a.e}{2.4.6.e^6}\int d\varphi cos^4\varphi\ \ldots\ldots$$

mely utolsó egészletek az ismert lenyomási képlet szerint tárgyalandók, s így a menteléki ív hossza is meg van határozva.

(4-dik eset.) Meghatározandó a hengerléki ív hossza. Ezen görbe vonalnak egyenlete:

$$y=r.arccos\frac{r-x}{r}+\sqrt{2rx-x^2},$$

miből találjuk:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2r-x}{\sqrt{2rx-x^2}},$$

s ennek helyettesítése adja:

$$s=\int dx\sqrt{1+\frac{(2r-x)^2}{2rx-x^2}}=\int dx\sqrt{\frac{2r}{x}}=\sqrt{2r}\int\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

miből következik:

$$s=2\sqrt{2rx}+C;$$

mivel pedig x-el s szintén elenyészik, lesz $C=0$, s így áll:

$$s=2\sqrt{2rx},$$

s ez az x metszékhez tartozó hengerléki ívnek a hossza, melyben $x=2r$ tétetvén, a fél hengerlék hossza lesz: $s=4r$, az egész hengerlék hossza tehát, a nemző kör nyolczszoros hosszával lesz egyenlő; ez tehát tökéletesen egyenesíthető görbe vonal.

A hengerlék egyenesítése más módon is véghez vihető, ha t. i. két egyenletet veszünk számítás alapjául, mely egyenletek, ha AB (6-dik idom) metszéki tengelynek vététik, e következők:

$$x=r(\varphi-sin\varphi) \quad \text{és} \quad y=r(1-cos\varphi),$$

mely egyenletekből külzelés által kapjuk:

$dy = rd\varphi sin\varphi$, és $dx = rd\varphi(1-cos\varphi)$, következőleg

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sin\varphi}{1-cos\varphi} = cott\frac{1}{2}\varphi,$$

minek helyettesítéséből ered :

$$s = r\int d\varphi(1-cos\varphi)\sqrt{1+cott^2\frac{1}{2}\varphi}, \text{ avagy :}$$

$$s = r\int d\varphi\frac{1-cos\varphi}{sin\frac{1}{2}\varphi} = 2r\int d\varphi sin\frac{1}{2}\varphi, \text{ s végre :}$$

$$s = -4rcos\frac{1}{2}\varphi + C.$$

Az állandó meghatározására, tudjuk, hogy ha $\varphi = 0$, s ív szintén elenyészik, áll tehát :

$$0 = -4r + C, \text{ miből : } C = 4r, \text{ következőleg}$$

$$s = 4r\left(1-cos\frac{1}{2}\varphi\right);$$

ha a hengerlék fél hosszát akarnók tudni, akkor $\varphi = 180^0$ teendő, s lesz :

$$s = 4r, \text{ mint előbb.}$$

(5-dik eset.) Legyen meghatározandó azon görbe vonal hossza, melynek egyenlete : $y = a^x$, lesz :

$$dy = a^x dx loga, \text{ tehát : } \frac{dy}{dx} = a^x loga, \text{ következőleg}$$

$$s = \int dx\sqrt{1+a^{2x}log^2a}.$$

Hogy ezen kifejezést egészelni lehessen, tétessék :

$$\frac{dy}{dx} = yloga = tg\varphi, \text{ s lesz : } dy.loga = \frac{d\varphi}{cos^2\varphi} \text{ és}$$

$$dx = \frac{1}{loga}.\frac{dy}{y}, \text{ mivel pedig : } \frac{dy}{y} = \frac{d\varphi}{sin\varphi cos\varphi}, \text{ áll még :}$$

$$dx = \frac{1}{loga}.\frac{d\varphi}{sin\varphi cos\varphi},$$

s mind ezeknek helyettesítése adja :

$$s = \frac{1}{loga}\int\frac{d\varphi}{sin\varphi cos^2\varphi}.$$

Ennek egészelése végett, alkalmaztassék a 34)-dik szám 10) alatti képlete, melyben $m = -1$ és $n = 2$ tétetvén, lesz :

$$\int\frac{d\varphi}{sin\varphi cos^2\varphi}=\frac{1}{cos\varphi}+\int\frac{d\varphi}{sin\varphi};$$

ámde ugyanazon szám 15) alatti képlete szerint áll :

$$\int\frac{d\varphi}{sin\varphi}=logtg\frac{1}{2}\varphi,$$

minek folytán áll még :

$$\int\frac{d\varphi}{sin\varphi cos^2\varphi}=\frac{1}{cos\varphi}+logtg\frac{1}{2}\varphi,$$

és tekintetbe vévén az állandó szorzót is, lesz :

$$s=\frac{1}{loga}\left(\frac{1}{cos\varphi}+logtg\frac{1}{2}\varphi\right),$$

mely egészlet ha φ és φ_0 határok között vétetik, áll :

$$s=\frac{1}{loga}\left[\frac{1}{cos\varphi}-\frac{1}{cos\varphi_0}+log\frac{tg\frac{1}{2}\varphi}{tg\frac{1}{2}\varphi_0}\right];$$

mivel $\varphi=arctg(yloga)$, itt még csak azt kell megjegyeznünk, hogy φ azon szög, melyet a metszéki tengely azon érintővel képez, mely x metszékü ponthoz van húzva.

48.) **(Egyenesítés sark-összrendezők által.)** Hogy ezen mütételre nézve is egy általános képlet állapítassék meg, szükség lesz megint a (7-dik idom)-ot tekintetbe venni, melyben látjuk, hogy $Fm=r$ vezető sugár és az $OFm=v$ szög által, $Om=s$ ívnek a hossza teljesen meg van határozva; ha pedig v szög végtelen kicsiny dv mennyiséggel nő, s ív szintén $mn=ds$ mennyiséggel növend, s ez az mnp külzeléki háromszögből könnyen nyerhető; áll ugyanis $mp=rsindv=rdv$ és $pn=dr$, következőleg

$$ds^2=dr^2+r^2dv^2,\text{ miből :}$$

$$ds=dv\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{dv}\right)^2},\text{ s így :}$$

$$s=\int dv\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{dv}\right)^2}+C;$$

s ez a kérdéses egyenesítésnek általános képlete, melynek alkalmazását e következő esetekből fogjuk látni:

(1-ső eset.) Egyenesítendő legyen az Archimedes csigavonala. Ezen görbe vonalnak egyenlete : $r=av=\frac{v}{2\pi}$, s lesz :

$dr=\frac{dv}{2\pi}$ következőleg $\frac{dr}{dv}=\frac{1}{2\pi}$, minek helyettesítése adja :

$$s=\int dv\sqrt{\frac{1+v^2}{4\pi^2}}=\frac{1}{2\pi}\int dv\sqrt{1+v^2},$$

mire a 21)-ik szám III) alatti képletét alkalmazván, lesz :

$$\int dv\sqrt{1+v^2}=\frac{v\sqrt{1+v^2}}{2}+\frac{1}{2}log(v+\sqrt{1+v^2}),\quad \text{következőleg}$$

$$s=\frac{v\sqrt{1+v^2}}{4\pi}+\frac{1}{4\pi}log(v+\sqrt{1+v^2})+C;$$

mivel pedig, ha $v=0$, s ív szintén elenyészik, állandónak itt értéke nem lesz, áll tehát teljesen :

$$s=\frac{1}{4\pi}[v\sqrt{1+v^2}+log(v+\sqrt{1+v^2}].$$

(2-ik eset.) Meghatározandó legyen a logarithmusi csigavonalnak hossza. Ezen görbe vonalra nézve áll :

$$v=logr,\quad \text{avagy :}\quad r=e^v,$$

ha ezek elsejét számításba hozzuk lesz :

$$dv=\frac{dr}{r}\quad \text{tehát :}\quad \frac{dr}{dv}=r,\quad \text{s ennek folytán :}$$

$$s=\int\frac{dr}{r}\sqrt{2r^2}=r\sqrt{2}+C.$$

Az állandónak meghatározására, tudjuk, hogy a kérdéses ív elenyészik, ha $r=1$, áll tehát :

$$0=\sqrt{2}+C,\quad \text{miből :}\quad C=-\sqrt{2},\quad \text{s így :}$$

$$s=r\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}(r-1).$$

Ha pedig az előbbi egészlet r és r_0 határok között vétetik, lesz

$$s=\sqrt{2}(r-r_0),$$

s ez azon ív hossza, mely r és r_0 vezető sugarak között foglaltatik.

Vegyük most számítás alapjául a csigavonal második egyenletét; áll :

$$dr=a^v dvloga,\quad \text{és}\quad \frac{dr}{dv}=a^v loga,$$

minek folytán lesz :

$$s=\int dv\sqrt{a^{2v}+a^{2v}log^2a}=\sqrt{1+log^2a}\int a^v dv \text{ avagy :}$$

$$s=\frac{a^v\sqrt{1+log^2a}}{loga}+C;$$

s mivel $a^v=r$, áll még :

$$s=r\frac{\sqrt{1+log^2a}}{loga}+C.$$

Az állandó meghatározására, írjuk $r=1$, lesz $s=0$, tehát :

$$0=\frac{\sqrt{1+log^2a}}{loga}+C \quad \text{miből :} \quad C=-\frac{\sqrt{1+log^2a}}{loga},$$

mely értéket behozván, nyerjük :

$$s=\frac{\sqrt{1+log^2a}}{loga}(r-1),$$

és ha e tétik a helyébe, mely esetben $loge=1$, lesz :

$$s=\sqrt{2}(r-1), \text{ mint előbb.}$$

GÖRBE FELÜLETEK KISÍKÍTÁSA.

49.) Már az elöbbiekben megemlíttetett, hogy itt csak az úgynevezett forgási felületekről lesz szó, minek megértésére csak azt kell képzelnünk, hogy valamely görbe vonalnak meghatározott hosszuságu íve, egy álló tengely körül forog, akkor az emlitett ív ilynemü forgása által egy görbe felület fog leiratni, mely forgási felületnek neveztetik, s melynek kiszámítása lesz itteni feladatunk.

Mindenekelőtt t. i. egy olyféle általános minta lesz megállapitandó, a mely mindennemü ív forgási felületére alkalmazható legyen; e végre pedig legyen $Op=s$ (2-dik idom) egy tetszésszerinti görbe vonalnak íve, melynek hossza $Om=x$ metszék által teljesen meg van határozva; akkor ezen ívnek OX tengely körüli forgása által, egy görbe felület fog eredni, mely felület egyenes számítás által meg nem határozható, ellenben ezen felületnek végtelen kicsiny növete avagy külzeléke könnyen megtalálható; ugyanis, ha $Om=x$ metszék $mn=dx$ külzelékkel nő, s ív szintén $pq=ds$ mennyiséggel fog nőni, ezen végtelen kicsiny ds ív pedig OX tengely körül forogván, a henger görbe felületét írja le, mely, mint a kérdéses felület külzeléke, könnyen megtalálható, még pedig ezen henger alapjának kerülete $=2\pi y$ lévén, oldalfelülete $=2\pi y ds$ lesz, ha tehát a keresett felület Q-val jegyeztetik, áll:

$$dQ=2\pi y ds, \text{ s ennek folytán :}$$
$$Q=2\pi \int y ds+C,$$

és ha ds helyébe az ismert érték tétetik, nyerni fogjuk:

$$Q=2\pi \int y dx \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+C,$$

ez pedig a kérdéses kisikításnak általános mintája, melynek alkalmazását e következőkből fogjuk látni:

(1-ső eset.) Kisikítandó legyen a hajtaléki felület, mely úgy ered, ha Op ív (2-dik idom) mint hajtaléki ív OX tengely körül forog. Ezen görbe vonal egyenlete $y^2=ax$ lévén, hol a a góczhúrt jelenti, áll: $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$, mely értéket a fenebbi általános mintába tévén, nyerni fogjuk:

$$Q=2\pi \int dx\sqrt{ax} \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\right)^2}+C,$$

és a kellő rövidítés megtörténte után:

$$Q=\pi \int dx \sqrt{4ax+a^2}+C,$$

minek egészelése végett tétessék: $4ax+a^2=u$, s lesz: $dx=\frac{du}{4a}$, következőleg:

$$Q=\frac{\pi}{4a}\int du\sqrt{u}=\frac{\pi}{4a}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}, \text{ avagy :}$$
$$Q=\frac{\pi}{6a}(4ax+a^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Az állandónak a meghatározására könnyü belátni, hogy x-el s is és vele Q felület szintén elenyészik, áll tehát:

$$0=\frac{\pi a^2}{6}+C, \text{ miből: } C=-\frac{1}{6}\pi a^2,$$

a keresett teljes felület tehát lesz:

$$Q=\frac{\pi}{6a}(4ax+a^2)\sqrt{4ax+a^2}-\frac{\pi a^2}{6}.$$

Azon esetre, ha $x=\frac{a}{4}$, a felület tartalma lesz:

$$Q=\frac{\pi a^2}{3}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)=0,3047.\pi a^2,$$

mely kifejezés azt mondja, hogy a kérdéses forgási felület, a sugaru kör felületének azon része, mely 0,3047 törtszám által jelentetik.

(2-dik eset.) Határoztassék meg a kerüléki ív forgása által eredő felület. Itt, mint látjuk két, esetet kell megkülönböztetnünk; a kerüléki ív t. i. vagy nagyobbik vagy kisebbik tengelye körül foroghat, mely két esetben tehát, különféle alaku felületek iratnak le; ha az első esetnek tárgyalását veszszük elő, akkor a metszékeket szintén a nagyobbik tengelyen kell számítni, és e következő egyenlet lesz számításba hozandó: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, miből: $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$, s ennek helyettesítése az általános mintába, adja:

$$Q=2\pi\int ydx\sqrt{\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}}=\frac{2\pi b}{a^2}\int dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2},$$

ámde $a^2-b^2=a^2e^2$, minek folytán lesz még:

$$Q=\frac{2\pi b}{a}\int dx\sqrt{a^2-e^2x^2}+C.$$

Ezen kifejezés egészelése a 22)-ik szám III) alatti mintája szerint vitetik véghez, melyre nézve áll: $m=0$, $a=a^2$, $b=-e^2$, $n=2$, és $p=\frac{1}{2}$, miknek kelyettesítése által kapjuk:

$$\int dx\sqrt{a^2-e^2x^2}=\frac{x\sqrt{a^2-e^2x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-e^2x^2}},$$

mely utolsó egészlet már ismeretes levén, áll:

$$\int dx\sqrt{a^2-e^2x^2}=\frac{x\sqrt{a^2-x^2e^2}}{2}+\frac{a^2}{2e}arc.sin\frac{ex}{a},$$

és ha még az állandó szorzó is tekintetbe vétetik, lesz:

$$Q=\frac{\pi bx}{a}.\sqrt{a^2-e^2x^2}+\frac{\pi ba}{e}arc.sin\frac{ex}{a}+C;$$

az állandóra nézve látjuk, hogy ha $x=0$, a forgó ív is elenyészik, a forgási felület tehát szintén $=0$ lesz; de mind ezeknek folytán C is elenyészik, áll tehát;

$$Q = \frac{\pi b x}{a} \sqrt{a^2 - e^2 x^2} + \frac{\pi b a}{e} arc.sin \frac{ex}{a}.$$

Ha e kifejezésben $x = a$ tétetik, akkor e fél kerülékded felületét fogjuk nyerni, s ez lesz :

$$Q = \pi b^2 + \frac{\pi b a}{e} arc.sine,$$

az e gész kerülékded tehát, mint ennek kettőzete, lesz :

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a}{e} arcsine,$$

mely kifejezésben $b = a$ és $e = 0$ tétetvén, nyilván a gömb fefületének kell ki jönnie, kapjuk azonban :

$$2\pi b^2 + 2\pi b^2 . \frac{0}{0},$$

itt tehát a határozatlan $\frac{0}{0}$ szorzó fordul elő, mely $\frac{arc.sine}{e}$ hányadosból ered, ha benne $e = 0$ tétetik, melynek meghatározására, az ismert külzeléki szabály szerint nyerjük :

$$\frac{de}{\sqrt{1 - e^2}} : \text{de} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}},$$

hol $e = 0$ tétetvén, ered : $\frac{0}{0} = 1$, s így áll :

$$2\pi b^2 + 2\pi b^2 = 4\pi b^2,$$

mint azon gömb felülete, melynek sugara $= b$.

(3-ik eset). Ez esetben azt kell feltennünk, hogy a kerüléki ív kisebbik tengelye körül forog; a metszékek tehát szintén e tengelyen számítandók, s igy e következő egyenletet kell számításba hoznunk :

$$y = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2} \quad \text{miből :} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{ax}{b\sqrt{b^2 - x^2}},$$

mit az általános mintába tévén, ered :

$$Q = \frac{2\pi}{b} \int y dx \sqrt{\frac{b^4 + a^2 x^2 - b^2 x^2}{b^2 - x^2}},$$

és a kellő rövidítés után, ha még $a^2 - b^2 = a^2 e^2$ tétetik, lesz :

$$Q = \frac{2\pi a}{b^2} \int dx \sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2} + C,$$

erre a kifejezésre pedig a 21)-ik szám III) alatti mintáját alkalmazván, lesz :

$$\int dx \sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2} = \frac{x\sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2}}{2} +$$

$$\frac{b^4}{2ae}log(aex+\sqrt{b^4+a^2e^2x^2}),$$

és az állandó szorzót tekintetbe vevén, lesz :

$$Q=\frac{\pi ax}{b^2}\sqrt{b^4+a^2e^2x^2}+\frac{\pi b^2}{e}log(aex+\sqrt{b^4+a^2e^2x^2})+C.$$

Az állandó meghatározására, látjuk, hogy ha $x=0$, Q felület szintén elenyészik, áll tehát :

$$0=\frac{\pi b^2}{e}logb^2+C, \text{ miből : } C=-\frac{\pi b^2}{e}logb^2,$$

a teljes felület tartalma tehát lesz :

$$Q=\frac{\pi ax}{b^2}\sqrt{b^4+a^2e^2x^2}+\frac{\pi b^2}{e}log\frac{aex+\sqrt{b^4+a^2e^2x^2}}{b^2}.$$

Ha most az egész kerülékded felületét akarnók tudni, akkor legjobb lesz, ezen előttünk álló egészletet $(+b)$ és $(-b)$ határok között venni, minthogy ezen határok között az egész felület foglaltatik ; s így ha a fenebbi egészletben először $(+b)$ iratik x helyébe, nyerjük :

$$\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}log\frac{a(1+e)}{b},$$

ha pedig $(-b)$ tétetik x helyébe, ered :

$$-\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}log\frac{a(1-e)}{b},$$

mely két eredmény kivonása által, a kerülékded keresett felületét fogjuk nyerni, s ez lesz :

$$Q=2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}log\frac{1+e}{1-e},$$

ezen felület különösen e külpontiságtól függ, és ha benne $e=0$ tétetik, lesz $b=a$, és megint a gömb felületének kell ki jönnie, áll azonban :

$$Q=2\pi a^2+\pi a^2.\frac{0}{0},$$

itt tehát szintén $\frac{0}{0}$ határozatlan szorzó csúszott be, mely nyilván e következő hányadosból ered :

$$\frac{1}{e}log\frac{1+e}{1-e}=\frac{log(1+e)-log(1-e)}{e},$$

ha benne $e=0$ tétetik, ennek ismert külzelése pedig adja :

$$\left(\frac{de}{1+e}+\frac{de}{1-e}\right):de=\frac{1}{1+e}+\frac{1}{1-e},$$

mely kifejezésben $e=0$ tétetvén, ered : $\frac{0}{0}=2$, s így áll :

$$Q=2\pi a^2+2\pi a^2=4\pi a^2,$$

s ez azon gömb felülete, melynek sugara $=a$.

(4-dik eset.) Legyen kisikitandó a menteléki ív forgása által képzett felület. Minthogy ezen görbe vonal egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\text{ lesz : }\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y},$$

mely értéket az általános mintába tévén, lesz :

$$Q=\frac{2\pi b}{a^2}\int dx\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4},\text{ és }a^2+b^2=a^2e^2$$

miatt áll még :

$$Q=\frac{2\pi b}{a}\int dx\sqrt{e^2x^2-a^2}.$$

Ennek egészelése végett tétessék : $\sqrt{e^2x^2-a^2}=tx$, s lesz :

$$x^2=\frac{a^2}{e^2-t^2},\text{ és}$$

$$t=\frac{\sqrt{e^2x^2-a^2}}{x},$$

s áll :

$$\int dx\sqrt{e^2x^2-a^2}=\int txdx,$$

mely egészletet ha részletesen tárgyaljuk $\int udv=uv-\int vdu$ minta szerint, nyerjük :

$$\int txdx=\frac{x^2t}{2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{dt}{e^2-t^2}=\frac{x^2t}{2}+\frac{a^2}{4e}log\frac{e-t}{e+t},$$

és ha t-nek értéke visszahelyeztetik, és még az állandó szorzó is tekintetbe vétetik, lesz :

$$Q=\frac{\pi bx}{a}\sqrt{e^2x^2-a^2}+\frac{\pi ba}{2e}log\frac{ex-\sqrt{e^2x^2-a^2}}{ex+\sqrt{e^2x^2-a^2}}+C,$$

mely egészlet könnyen megfogható oknál fogva még így is írható :

$$Q=\frac{\pi bx}{a}\sqrt{e^2x^2-a^2}+\frac{\pi ba}{e}log\frac{ex-\sqrt{e^2x^2-a^2}}{a}+C.$$

Az állandó meghatározására nézve könnyü belátni, hogy a kérdéses felület elenyészik azon esetre, ha $x=a$, ennek helyettesítése pedig adja:

$$C=-\pi b^2-\frac{\pi ba}{e}log\frac{ae-b}{a},$$

s ennek folytán a keresett teljes felület lesz:

$$Q=\frac{\pi bx}{a}\sqrt{e^2x^2-a^2}-\pi b^2+\frac{\pi ba}{e}log\frac{ex-\sqrt{e^2x^2-a^2}}{ae-b}.$$

(5-dik eset.) Legyen meghatározandó azon felület, mely egy hengerléki ív valamely tengely körüli forgása által jő létre. Minthogy ezen görbe vonal egyik egyenlete ez:

$$y=r.arccos\frac{r-x}{r}+\sqrt{2rx-x^2},$$

ebből nyerni fogjuk:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2r-x}{\sqrt{2rx-x^2}},$$

ennek folytán, már a görbe vonalok egyenesítésénél, ezt találtuk:

$$ds=\sqrt{2r}.\frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{tehát:} \quad Q=2\pi\int yds, \quad \text{avagy:}$$

$$Q=2\pi\sqrt{2r}\int\frac{ydx}{\sqrt{x}}+C,$$

ezen egészlet pedig tárgyaltassék részletesen, tévén:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=dv, \quad \text{és} \quad y=u, \text{ s lesz:} \quad v=2\sqrt{x}, \quad \text{és} \quad du=dy,$$

miknek helyettesítése által kapjuk:

$$\int\frac{ydx}{\sqrt{x}}=2y\sqrt{x}-2\int dy\sqrt{x},$$

hol dy helyébe a fen kitett értéket tévén, nyerni fogjuk:

$$\int\frac{ydx}{\sqrt{x}}=2y\sqrt{x}-2\int dx\sqrt{2r-x};$$

az utolsó egészlet meghatározására tétessék: $2r-x=z$, s lesz: $dx=-dz$, következőleg

$$2\int dx\sqrt{2r-x}=-2\int dz\sqrt{z}=-\frac{4}{3}z^{\frac{3}{2}},$$

egészletünk x által kifejezett értéke tehát lesz :

$$Q=4\pi y\sqrt{2rx}+\frac{8}{3}\pi\sqrt{2r}(2r-x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Az állandó meghatározására, tétessék $x=0$, s lesz y szinte valamint Q is $=0$, s így ered :

$$0=\frac{32}{3}\pi r^2+C \quad \text{miből :} \quad C=-\frac{32}{3}\pi r^2,$$

a keresett felület tehát lesz :

$$Q=4\pi y\sqrt{2rx}+\frac{8}{3}\pi\sqrt{2r}(2r-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{32}{3}\pi r^2.$$

Ha azon egész hengerléki felületről lenne szó, mely AC ívnek CD tengely körüli forgása által jő létre (6-dik idom), akkor csak $2r$ teendő x helyébe, minek folytán nyerjük :

$$Q=8\pi^2r^2-\frac{32}{3}\pi r^2=8\pi r^2\left(\pi-\frac{4}{3}\right),$$

mivel pedig $\pi-\frac{4}{3}=1{,}8082$, lesz : $Q=14.4656\pi r^2$, azaz, a kérdéses felület a nemző körnek 14 meg félszeres felületével egyenlő.

(6-dik eset.) Ha a hengerléki ív AB tengely körül forog (6-dik idom), akkor az így képzett felületnek meghatározására jó lesz e következő két egyenletet számítás alapjául venni :

$$x=r(\varphi-sin\varphi) \text{ és } y=r(1-cos\varphi), \text{ s lesz :}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{sin\varphi}{1-cos\varphi}=cott\frac{1}{2}\varphi\,;$$

ezt pedig az általános mintába tevén, lesz :

$$Q=2\pi r^2\int\frac{d\varphi(1-cos\varphi)^2}{sin\frac{1}{2}\varphi}=8\pi r^2\int d\varphi sin^3\frac{1}{2}\varphi,$$

itt pedig $\frac{1}{2}\varphi=u$, tehát $d\varphi=2du$ tétetvén, nyerni fogjuk :

$$\int d\varphi sin^3\frac{1}{2}\varphi=2\int du sin^3u,$$

az ismert képlet szerint tehát kapjuk :

$$2\int du sin^3u=-\frac{2}{3}sin^2u cos u-\frac{4}{3}cos u, \quad \text{avagy :}$$

$$\int d\varphi sin^3\frac{1}{2}\varphi = -\frac{2}{3}sin^2\frac{1}{2}\varphi cos\frac{1}{2}\varphi - \frac{4}{3}cos\frac{1}{2}\varphi,$$

és az állandó szorzót is tekintetbe vévén, lesz :

$$Q = -\frac{16}{3}\pi r^2\left(sin^2\frac{1}{2}\varphi cos\frac{1}{2}\varphi + 2cos\frac{1}{2}\varphi\right) + C.$$

Az állandó meghatározására, tegyük φ szögöt $=0$, s lesz Q szintén $=0$, s áll :

$$0 = -\frac{32}{3}\pi r^2 + C\text{, honnan : } C = \frac{32}{3}\pi r^2\text{, következőleg}$$

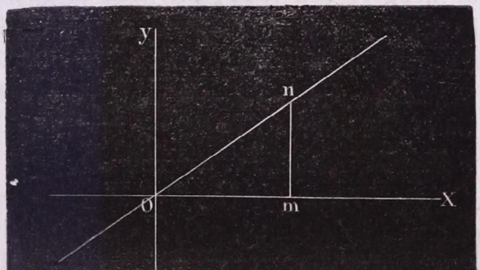
$$Q = -\frac{16}{3}\pi r^2\left(sin^2\frac{1}{2}\varphi cos\frac{1}{2}\varphi + 2cos\frac{1}{2}\varphi\right) + \frac{32}{3}\pi r^2;$$

ha végre azon falületet akarnók nyerni, mely az egész hengerlék AB tengely körüli forgása által ered, akkor $\varphi = 360^0$ teendő, mely helyettesítésnek eredménye lesz :

$$Q = \frac{32}{3}\pi r^2 + \frac{32}{3}\pi r^2 = \frac{64}{3}\pi r^2.$$

(7-dik eset.) Vizsgáljuk még azon esetet is, melyben On egyenes (8-dik idom) OX tengely körül forog; akkor a

(8-dik idom.)



forgó vonalnak egyenlete lesz : $y = ax$, mivel az a kezdő O ponton megy keresztül, s így :

$$dy = adx\text{, és } \frac{dy}{dx} = a,$$

minek helyettesítése adja :

$$Q = 2\pi a\sqrt{1+a^2}\int xdx = 2\pi a\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{x^2}{2} + C,$$

mely kifejezést így is szabad írni :

$$Q = \pi ax.\sqrt{x^2+a^2x^2}+C.$$

Hogy itt az állandó elenyészik, könnyü megfogni, mivel továbbá $ax=y$ és $\sqrt{x^2+a^2x^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ nem egyéb, mint a forgó On vonalnak hossza, a fenebbi érték így is áll:

$$Q=\pi y.On,$$

mely kifejezésben nyilván nem látunk egyebet, mint az üres kúp oldalfelületét, mely ezen egyenesnek forgása által valóban is létre hozatik.

FORGÁSI TESTEK KÖBÖZÉSE.

50.) Forgási testek alatt azon szabályos testeket értjük, melyek meghatározott alaku felületeknek bizonyos tengelyek körüli forgása által erednek. Ezekre nézve is szükséges lesz egy olyféle általános mintának származtatása, melynek segítségével mindennemü forgási testnek köbtartalmát kiszámítni lehessen. E végre pedig látjuk, hogy $mpqn$ felület (2-dik idom) az Opm felületnek külzeléke, ha t. i. $mn=dx$ a metszék külzeléke, ezen felület, ha OX tengely körül forog, egy egyenes hengert hoz létre, melynek magassága $=dx$, alapja pedig $=\pi y^2$, térfogata tehát lesz $=\pi y^2 dx$; és ha azon test térfogata, mely Opm felületnek OX tengely körüli forgása által ered K-nak neveztetik, ennek külzeléke e következő egyenlet által fog adatni:

$$dK=\pi y^2 dx, \text{ s ennek egészelése adja:}$$

$$K=\pi\int y^2dx+C,$$

s ez a keresett általános minta, melyben csak y helyébe azon görbe vonal egyenlete helyettesítendő, mely által az Opm felület bezáratik. Következő esetekből látni fogjuk ezen mintának alkalmazását:

(1-ső eset.) Meghatározandó azon test köbtartalma, mely Onm épszögü háromszög felületének OX tengely körüli forgása által nemződik. Minthogy On a kezdő ponton keresztül menő egyenes, lesz $y=ax$, minek helyettesítése a fenebbi általános mintába, ezt adja:

$$K=\pi a^2\int x^2dx=\pi.a^2\frac{x^3}{3},$$

hogy itt az állandónak értéke nincs, következik abból, hogy ha $x=0$, K test is elenyészik. Mivel pedig az előttünk álló kifejezés még így is írható:

$$K=\pi a^2 x^2 \cdot \frac{x}{3} = \pi y^2 \cdot \frac{x}{3},$$

világosan olvasható ezen kifejezésből, hogy az egyenes kúp térfogatát megtaláljuk, ha alapját magasságának $\frac{1}{3}$-val szorozzuk.

(2-dik eset.) Azon feltét alatt, hogy Op ív (2-dik idom) egy hajtaléki ív, következőleg Opm egy hajtaléki felület, akkor az ennek OX tengely körüli forgása által eredő test, hajtaléki kúpdadnak neveztetik (parabolisches Conoid), melynek köbtartalmát nyerjük, ha $y^2=ax$ tétetik, minek folytán a fenebbi általános képlet ezt adja:

$$K=\pi a \int x dx + C = \frac{\pi a x^2}{2} + C;$$

itt sem lévén értéke az állandónak, áll:

$$K=\pi x^2 \cdot \frac{a}{2}, \text{ miből láthatni},$$

hogy a kérdéses kúpdad térfogata, azon henger térfogatával ugyanaz, melynek alapjának sugara $=x$, magassága pedig $=\frac{a}{2}$.

(3-dik eset.) A kerüléki kúpdad térfogatának meghatározására, vegyük fel először, hogy a kerüléki felület, a kerülék nagyobbik tengelye körül forog, akkor $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ érték lesz teendő y^2 helyébe az általános mintába, s ennek folytán nyerjük:

$$K=\pi b^2 \int dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int x^2 dx = \pi b^2 x - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3},$$

hol az állandónak szintén nincs értéke, minthogy ha x elenyészik, K szintén $=0$. Ha e kifejezésben $x=a$ tétetik, akkor a fél kerüléki kúpdad lesz:

$$K=\frac{2}{3}\pi b^2 a,$$

az egész kúpdad térfogata tehát lesz:

$$K=\frac{4}{3}\pi b^2 a,$$

itt pedig $b=a$ tétetvén, nyerni fogjuk : $K=\frac{4}{3}\pi a^3$, mely kifejezés azon gömb térfogatát adja, melynek sugara $=a$, mint lennie is kell.

Egészen más alaku test származik, ha azt teszszük fel, hogy a kerüléki felület a kisebbik tengelye körül forog, mely esetben a metszékek is ugyane tengelyen számítandók, s y-nak e következő értéke lesz számításba hozandó :

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-x^2),$$

minek folytán az általános képlet adja :

$$K=a^2\pi\int dx-\frac{a^2\pi}{b^2}\int x^2dx=a^2\pi x-\frac{a^2\pi}{b^2}\frac{x^3}{3},$$

az állandó elenyészőnek vétetvén. Ha e kifejezésben $x=b$ tétetik, azon kerüléki kúpdad felét nyerjük, mely földünk alakjához hasonlít $=\frac{2}{3}\pi a^2 b$, az egész kúpdad tehát lesz : $=\frac{4}{3}\pi a^2 b$, és ha ide $b=a$ tétetik, az a sugaru gömb térfogatát fogjuk kapni $=\frac{4}{3}\pi a^3$.

(4-dik eset.) A hengerléki felület valamely tengely körüli forgása által eredő test térfogatának meghatározásánál, több esetet kell megkülönböztetnünk, még pedig :

(1-ször.) Ha az NCQ hengerléki felület (6-ik idom) CD tengely körül forog, akkor az így eredő test térfogatának meghatározására, e következő két egyenlet lesz számításba hozandó :

$x=r(1-cos\varphi)$ és $y=r(\varphi+sin\varphi)$, miből : $dx=rd\varphi sin\varphi$, miknek helyettesítése adja :

$$\pi\int y^2dx=\pi r^3\int d\varphi sin\varphi(\varphi^2+2\varphi sin\varphi+sin^2\varphi), \text{ avagy :}$$

$$K=\pi r^3\int\varphi^2 d\varphi sin\varphi+2\pi r^3\int\varphi d\varphi sin^2\varphi+\pi r^3\int d\varphi sin^3\varphi,$$

a 35)-dik szám 26) alatti képlete adja :

$$\int\varphi^2 d\varphi sin\varphi=2\varphi sin\varphi-\varphi^2 cos\varphi+2cos\varphi,$$

továbbá részletes egészelés által kapjuk :

$$\int \varphi d\varphi sin^2\varphi = \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi}{2} sin\varphi cos\varphi - \frac{1}{8} cos2\varphi ,$$

végre a 34)-dik szám 11) alatti képlete adja :

$$\int d\varphi sin^3\varphi = -\frac{1}{3} sin^2\varphi cos\varphi - \frac{2}{3} cos\varphi ,$$

mind ezeknek folytán tehát áll :

$$K = \pi r^3 \Big[2\varphi sin\varphi - \varphi^2 cos\varphi + 2cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi sin2\varphi +$$
$$\frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{4} cos2\varphi - \frac{1}{3} sin^2\varphi cos\varphi - \frac{2}{3} cos\varphi \Big] + C;$$

C állandónak meghatározására tétessék $\varphi = 0$, mely esetben K test is elenyészik, lesz :

$$0 = \pi r^3 \left(2 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) + C , \text{ miből } C = -\frac{13}{12}\pi r^3 ,$$

a kérdéses test teljes térfogata tehát lesz :

$$K = \frac{1}{2}\pi r^3 \varphi^2 (1 - 2cos\varphi) + \frac{1}{2}\pi r^3 \varphi (4sin\varphi - sin2\varphi) +$$
$$\pi r^3 \left(\frac{4}{3} cos\varphi - \frac{1}{4} cos2\varphi - \frac{1}{3} sin^2\varphi cos\varphi - \frac{13}{12} \right).$$

Ha pedig azon egész testnek a térfogatát akarnók tudni, mely CAD felületnek CD tengely körüli forgása által ered, akkor csak π teendő φ helyébe, s nyerni fogjuk :

$$K = \frac{3}{2}\pi^3 r^3 - \frac{8}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^3}{3} \left(\frac{9\pi^2}{2} - 8 \right) = 9{,}105 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 ,$$

azaz, a kérdéses test térfogata valamivel több mint 9-szer nagyobb azon gömbnél, melynek sugara a nemző kör sugarával ugyanaz.

(2-szor.) Feltévén most, hogy a hengerléki felület AB tengely körül forog, akkor a metszékeket is e tengelyen kell számítni, és e következő két egyenlet hozandó számításba :

$$x = r(\varphi - sin\varphi) \text{ és } y = r(1 - cos\varphi) , \text{ miből :}$$
$$dx = r d\varphi (1 - cos\varphi) , \text{ s ennek folytán áll :}$$
$$K = \pi r^3 \int d\varphi - 3\pi r^3 \int d\varphi cos\varphi + 3\pi r^3 \int d\varphi cos^2\varphi - \pi r^3 \int d\varphi cos^3\varphi ;$$

az utolsó két egészlet a 34)-dik szám 12) alatti mintája szerint tárgyaltatván, ered :

$$K = \frac{5}{2}\pi r^3 \varphi - \frac{11}{3}\pi r^3 sin\varphi + \frac{3}{4} \pi r^3 sin2\varphi - \frac{\pi r^3}{3} sin\varphi cos^2\varphi ,$$

hol könnyü belátni, hogy az állandónak értéke nincs. Ha pedig az előttünk álló kifejezésben 2π iratik φ helyébe, azon egész testet fogjuk nyerni, mely ACB felületnek AB tengely körüli forgása által ered, s ez lesz:

$$K=5\pi^2r^3=11,78.\frac{4}{3}\pi r^3,$$

ez tehát azon gömbnek 12,78-szoros térfogatával egyenlő, melynek sugara a nemző kör sugarával ugyanaz.

(3-szor.) Tegyük fel végre, hogy a hengerléki QCL felület CG érintő körül forog; akkor az így eredő különös alaku test térfogatának meghatározására, a metszékek is CG tengelyen leszneк számítandók, s ennek folytán e következő két egyenlet hozandó számításba:

$$x=r(\varphi+sin\varphi) \quad \text{és} \quad y=r(1-cos\varphi), \text{ miből:}$$

$$dx=rd\varphi(1+cos\varphi),$$

s ennek helyettesítése adja:

$$K=\pi r^3\int d\varphi-\pi r^3\int d\varphi cos\varphi-\pi r^3\int d\varphi cos^2\varphi+\pi r^3\int d\varphi cos^3\varphi,$$

mind ezen egészletek ismeretesek levén, áll:

$$K=\pi r^3\left(\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{3}sin\varphi-\frac{1}{4}sin2\varphi+\frac{1}{3}sin\varphi cos^2\varphi\right),$$

mihez szinte semmi állandó sem járul, minthogy ha $\varphi=0$, a kérdéses test szinte elenyészik. Tévén pedig ide $\varphi=\pi$, azon egész test térfogatát nyerjük, mely ACG felületnek CG tengely körüli forgása által ered, s ez lesz:

$$K=\frac{1}{2}\pi^2r^3=1,178.\frac{4}{3}\pi r^3,$$

mely eredménynek jelentése világos.

(5-dik eset.) Tegyük még feladatunkká, egy kör alaku gyürü térfogatának meghatározását. Legyen e végre az $ADLB$ kör (9-dik idom) a kérdéses gyürü keresztmetszése, melynek teste tehát ezen körnek OF tengely körüli forgása által ered; legyen továbbá $OD=R$ és $DC=r$, és ha az említett kör metszékei A pontból számíttatnak, lesz $Ap=x$ és $mn=y$, tehát $np=pm=\frac{1}{2}y$, s akkor áll:

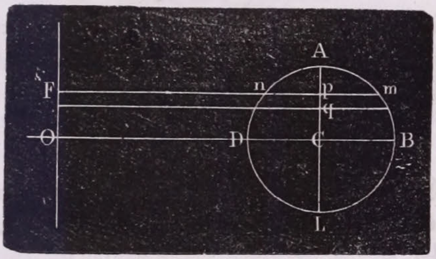
$$Fn=R+r-\frac{1}{2}y, \quad \text{és} \quad Fm=R+r+\frac{1}{2}y,$$

s ennek folytán az Fn sugárral leírt kör felülete lesz :

$$=\pi\left(R+r-\frac{1}{2}y\right)^2, \text{ és}$$

az Fm sugárral leírt kör felülete lesz :

(9-dik idom.)



$$=\pi\left(R+r+\frac{1}{2}y\right)^2,$$

mely két felületet egymásból kivonván, y- szélességü gyürűnek a felületét fogjuk nyerni, s ez e következő lesz :

$$=2\pi y(R+r).$$

Tudjuk továbbá, hogy a körre nézve áll :

$$\frac{1}{2}y=\sqrt{2rx-x^2}, \quad \text{tehát} \quad y=2\sqrt{2rx-x^2},$$

az előbbi felület tehát még így is írható :

$$2\pi y(R+r)=4\pi(R+r)\sqrt{2rx-x^2},$$

most pedig azt tévén föl, hogy az $Ap=x$ metszék $pq=dx$ külzelékkel nő, akkor az utolsó kifejezést dx-el szorozván, a kérdéses gyürü térfogatának külzelékét fogjuk nyerni, s áll :

$$dQ=4\pi(R+r)dx\sqrt{2rx-x^2},$$

mit egészelvén, lesz :

$$Q=4\pi(R+r)\int dx\sqrt{2rx-x^2}+C,$$

Ezen egészlet meghatározása végett, azt nyilván így is szabad írni :

$$\int dx\sqrt{2rx-x^2}=2r\int\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2rx-x^2}},$$

mely egészleteket a 24)-dik szám VII) alatti mintája szerint tárgyalván, nyerni fogjuk :

$$\int dx\sqrt{2rx-x^2}=\frac{1}{2}(x-r)\sqrt{2rx-x^2}+\frac{r^2}{2}arccos\frac{r-x}{r},$$

ha t. i. a kijövő végegészletre a 8)-dik szám 7-ik esetbeni képlete alkalmaztatik. A gyürünek keresett térfogata tehát lesz:

$$Q=2\pi(R+r)(x-r)\sqrt{2rx-x^2}+2\pi r^2(R+r)arc.cos\frac{r-x}{r},$$

mihez semmi állandó sem járul, minthogy ha $x=0$, a gyürü térfogata is elenyészik. Az egész gyürü térfogatát pedig az által fogjuk kapni, ha e kifejezésben $2r$ iratik x helyébe, s lesz:

$$Q=2\pi^2r^2(R+r)=\pi r^2.2\pi(R+r),$$

azaz, a kérdéses gyürü térfogatát megtaláljuk, ha a gyürü keresztmetszését azon kör kerületével szorozzuk, melynek sugara $=R+r$.

51.) A testek köbözésének általánosabb fogalmát lehet szerezni az által, ha azon testeket, melyeknek térfogata meghatározandó, térben képzeljük, egy háromtengelyü rendszerre nézve; ez esetben már a külzeléki hánylat 112)-dik száma alatt egy minta állíttatott fel, mely által a térben létező test külzeléke adatik, s ez e következő:

$$dV=zdxdy,$$

minek egészelése által tehát a test keresett térfogatát fogjuk nyerni, s áll:

$$V=\int\int zdxdy,$$

itt tehát kettős egymásutáni egészelés viendő véghez, s látjuk, hogy $\int zdy$ rész egy felületet állít elő, melynek síkja az yz síkhoz párhúzamos; mivel pedig $z=f(x,y)$, ezen egészlet azon határok között veendő, melyeknél fogva y x-nek valamely függvényét állítja elő, úgy hogy maga az egészlet x-nek függvénye legyen. Továbbá látjuk, hogy $\int zdydx$ azon hasáb térfogatát jelenti, melynek alapja $\int zdy$, magassága pedig dx, s mivel $\int zdy$ x-nek függvénye, $\int zdxdy$ egy teljesen meghatározható kifejezés.

Valahányszor lehetséges, az yz síkkoz párhúzamos és x távolságban fekvő felületet x által kifejezni, azaz x függvényének tekinteni: akkor a test azon térfogatára nézve, mely $x=a$ és $x=A$ határok között fekszik, hol $x=a$ és $x=A$ két párhúzamos sík egyenletei, állnia kell:

$$Q=\int_a^A f(x)dx.$$

Ha például $y=f(x)$ egyenletü görbe vonal x-ek tengelye körül forog, akkor az által oly térfogat fog bezáratni, mely térfogat minden, yz síkhoz párhúzamos sík által körben fog metszetni, melynek felülete $=\pi y^2$; s így a test azon elemének térfogata, mely x és $x+dx$ metszékek között fekszik, nyilván πy^2dx kifejezés által fog adatni; ennél fogva a test azon részének térfogata, mely $x=a$ és $x=A$ határok között fekszik, e következő határozott egészlet által számítható ki:

$$Q=\int_a^A \pi y^2dx=\pi\int_a^A y^2dx,$$

mint már ez a képlet ismeretes előttünk.

(Példa.) Ha egy bezárt idom, melynek felülete $=a^2$, eredeti helyzetéhez párhúzamosan mozog úgy, hogy mind alakjára mind helyzetére nézve magához hasonló maradjon, annak minden pontja tehát egyenes vonalokat ír le; ha továbbá még azt is felteszszük, hogy annak a^2 felülete, bizonyos álló ponttóli távolságának négyzetével változik: kérdés, mily térfogat fog leiratni? Legyen e végre h a mozgó felületnek az álló ponttóli távola eredeti helyzetében, b^2 pedig legyen a mozgó idomnak azon felülete, melylyel az, az álló ponttóli $h-x$ távolban bír; akkor a feladat feltételei szerint áll:

$$a^2 : b^2=h^2 : (h-x)^2, \quad \text{miből:} \quad b^2=\frac{a^2}{h^2}(h-x)^2,$$

mely érték a fenebbi mintába $f(x)$ helyébe tétetvén, lesz:

$$Q=\frac{a^2}{h^2}\int(h-x)^2dx=-\frac{a^2}{3h^2}(h-x)^3+C,$$

mely térfogat, ha $x=0$ és $x=h$ határok között vétetik, nyerni fogjuk:

$$Q=\frac{1}{3}a^2h,$$

mely kifejezésben nyilván a tetények és a kúp térfogatát látjuk. Ha pedig ezen egészlet $x=0$ és $x=k$ határok között vétetik, ered :

$$Q=\frac{a^2}{3h^2}[h^3-(h-k)^3]\,;$$

ha már most $x=k$ értékére nézve, a mozgó felület b^2-re megy át, akkor $\frac{a}{b}=\frac{h}{h-k}$ lesz, miből $h=\frac{ak}{a-b}$, s ezt az előttünk álló egyenletbe helyettesítvén, lesz :

$$Q=\frac{k}{3}\,\frac{a^3-b^3}{a-b}=\frac{k}{3}(a^2+ab+b^2),$$

mely kifejezés nyilván nem egyebet, mint a csonkított tetény vagy kúp térfogatát terjeszti elő.

52.) Hasonlóképen a térben létező görbe felületek külzelékére nézve is, a külzeléki hánylat 111)-dik száma alatt e következő általános kifejezést találtuk :

$$ds=dxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

hol $p=\frac{dz}{dx}$ és $q=\frac{dz}{dy}$, ennek egészelése által tehát, magának a görbe felületnek tartalmát fogjuk nyerni, s áll :

$$s=\int\!\!\int dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Ha valamely sík görbe vonal, metszéki tengelye körül forog, akkor, mint már tudjuk, egy görbe felület jő létre, melynek $x=a$ és $x=A$ határok közötti tartalma ekkép határoztatik meg: A forgó görbe vonal minden pontja által egy kör iratik le, mely körök síkjai a forgási tengelyre merőlegesen állnak, sugarai pedig y rendezővel egyenlők. Egy ilyféle kör, és egy ahhoz végtelen közel fekvő párhúzamos sík között, fekszik nyilván a kérdéses görbe felületnek egy öve, mely egy csonkított kúp oldalfelületének tekinthető ; ennek tartalma tehát, lesz :

$$=2\pi yds\,,\ \text{s mivel}\ ds=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

ds mindig x függvénye lesz, és egészelés által kapjuk :

$$S=2\pi\int ydx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

mint már az előbbiekben is találtuk.

(Példa.) Tudva van előttünk, hogy a térben képzelt gömbnek egyenlete e következő:

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

ha t. i. a gömb középpontja, egyszersmind az összrendezők kezdőpontja. Ezen egyenlet külzelése által kapjuk:

$$\frac{dz}{dx}=p=-\frac{x}{z}, \quad \text{és} \quad \frac{dz}{dy}=q=-\frac{y}{z},$$

mely értékeket a fenebbi általános egyenletbe tévén, lesz:

$$S=\int\int dxdy\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\int\int dxdy\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}},$$

mivel pedig $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$, és $z^2=r^2-x^2-y^2$, áll még:

$$S=r\int\int\frac{dxdy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},$$

mely kifejezést először egészelni kell y szerint, s lesz:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2}}=arcsin\frac{x}{a},$$

ha t. i. $\sqrt{r^2-x^2}=a$ tétetik, ezen egészletet pedig jó lesz mindjárt $x=0$ és $y=\sqrt{a^2-x^2}$ határok között venni, minek eredménye lesz $=\frac{\pi}{2}$, s ennek folytán áll:

$$S=\frac{r\pi}{2}\int dx=\frac{1}{2}rx\pi+C;$$

ha az állandónak meghatározására $x=0$ tétetik, lesz $S=0$, tehát szintén $C=0$, s így lesz:

$$S=\frac{1}{2}rx\pi,$$

ez pedig, mint könnyü belátni, a kérdéses gömböv 4-ed része, melynek magassága $=x$; az egész gömböv felülete tehát lesz $=2\pi rx$, és x helyébe $2r$-et tévén, a gömb $=4\pi r^2$ felülete jön ki, mint lennie is kell.

HARMADIK FEJEZET.

TÖBB VÁLTOZÓVAL BÍRÓ KÜLZELÉKI FÜGGVÉNYEK EGÉSZELÉSE.

53.) **(Az egészlet lehetősége.)** Egy több változóval ellátott külzeléki függvény, melyben az $x, y, z \ldots\ldots$ változóknak csak első $dx, dy, dz, \ldots$ külzelékei fordúlnak elő, vonalos külzeléki függvénynek neveztetik. Ha tehát $P, Q, R \ldots\ldots$ által $x, y, z \ldots\ldots$ változók függvényeit jelöljük, akkor e következő kifejezés:

$$Pdx+Qdy+Rdz+\ldots\ldots$$

$x, y, z \ldots\ldots$ változóknak vonalos külzeléki függvénye lesz.

Az előbbiekben elég bőven megmutatva volt, hogy valamely külzeléki függvénynek egészlete miként meghatározható, azon esetre, ha benne csak egy változó fordúl elő; és ott azt láttuk, hogy ha az adott külzeléki függvény egészelhető alakra nem volna visszavezethető, egészlete mégis, legalább sor által meghatározható; továbbá láttuk azt is, hogy midőn egy adott külzeléki függvénynek véges egészlete felfedezhető nem volt, annak bizonyos határok között vett határozott egészlete mégis megtaláltatott.

Másképen áll azonban a dolog, olyféle külzeléki függvényeknél, melyekben több változó fordúl elő, s melyek azon természettel bírnak, hogy azok közől nem mindeniknek felelhet meg egy egészlet, hanem egészelése csak bizonyos meghatározott feltétektől függ, mely feltéteket e következőkben fogjuk látni:

Fordúljunk legelöször azon külzeléki függvényekhez, melyekben csak két változó, s azoknak külzelékei jönnek elő; akkor, a külzeléki hánylatból már ismeretes előttünk, hogy két változóval biró függvénynek teljes külzeléke e következő kifejezés által adatik :

$$1.)\quad dU = Pdx + Qdy,$$

hol $U = f(x,y)$, Pdx az adott függvény x szerinti első, Qdy ugyanazon függvény y szerinti első külzeléke; s így P és Q nem lehetnek egyéb, mint a kérdéses függvény első x és y szerinti külzeléki hányadosai, azaz áll :

$$P = \frac{dU}{dx}, \quad \text{és} \quad Q = \frac{dU}{dy};$$

egyszersmind pedig megmutattuk a külzeléki hánylatban, hogy $Pdx + Qdy$ alaku kifejezés, csak azon esetre lehet, valamely függvénynek teljes, tehát egészelhető külzeléke ha e következő feltételező egyenlet áll :

$$2.)\quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Ha tehát kellőleg figyelünk azon módra, mely szerint két változóval biró függvény külzeltetett, az adott külzeléknek egészelése is könnyen véghezvihető lesz; tudjuk pedig, hogy két változónak a függvénye csak részletesen külzelhető, úgy, hogy azt legelőször külzeljük x szerint, y állandónak vétetvén, azután pedig az adott függvény külzeltetik y szerint, x-et állandónak tekintvén. Megfordítva is szabad tehát következtetnünk, hogy, ha az adott külzeléki függvény csak x szerint egészeltetik, már teljes egészlete meg lesz, mihelyt képesek leszünk egy állandót hozzá csatolni, mely azonban nem a közönséges állandó, hanem az első esetben y-nak, a második esetben pedig x-nek valamely függvénye. Egy e végre szolgáló általános képlet ekkép találtatik föl:

A fenebbi 1) alatti egyenletből látjuk, hogy a függvény első x szerinti részlet-külzeléke ez :

$$dU = Pdx;$$

ha tehát ezt egészeljük x szerint, és az így nyert eredményhez egy állandót csatolunk, mely y-nak függvénye, akkor a függvény teljes egészlete lesz :

$$U=\int Pdx+Y,$$

hol Y, y-nak az említett függvénye, s nincs egyéb hátra, mint ezen állandónak a meghatározása, mi végre tegyük:

$$\int Pdx=u, \text{ s lesz :}$$

$$U=u+Y,$$

ezen egyenlet pedig külzeltessék y szerint, lesz:

$$\frac{dU}{dy}=\frac{du}{dy}+\frac{dY}{dy},$$

miből könnyü módon nyerjük:

$$Y=\int dy\left(Q-\frac{du}{dy}\right); \text{ mivel pedig: } \frac{dU}{dy}=Q,$$

ennek helyettesitése adja:

$$3.)\quad U=\int Pdx+\int dy\left(Q-\frac{du}{dy}\right)+C,$$

hol C a közönséges állandó. Még csak hátra van megmutatni, hogy $\left(Q-\frac{du}{dy}\right)$ kifejezés tisztán csak y-nak függvénye, tehát semmi x-et sem foglal magában; mi végre tétessék:

$$4.)\quad Q-\frac{du}{dy}=v,$$

akkor ennek x szerinti külzelése adja:

$$\frac{dQ}{dx}-\frac{d^2u}{dydx}=\frac{dv}{dx},$$

ámde az előbbiek szerint áll: $\frac{du}{dx}=P$, tehát: $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{dP}{dy}$, minek helyettesítése által kapjuk:

$$\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}=\frac{dv}{dx}; \quad \text{mivel pedig} \quad \frac{dQ}{dx}=\frac{dP}{dy}, \quad \text{lesz :}$$

$\frac{dv}{dx}=0$, azaz, a fenebbi 4.) kifejezésnek x szerinti külzeléke $=0$, mi nyilván annak a jele, hogy benne semmi x nem foglaltatik.

Hasonló módon kell pedig eljárni, ha az adott külzeléki függvény először y szerint egészeltetik, hozzá csatolván egy állandót, mely x-nek valamely függvénye; ez esetben t. i. áll:

$$U=\int Qdy+X,$$

hol X a kérdéses állandó, melynek meghatározására tétessék : $\int Qdy=s$, s lesz :

$$U=s+X,$$

ezt pedig x szerint külzelvén nyerni fogjuk :

$$\frac{dU}{dx}=\frac{ds}{dx}+\frac{dX}{dx},$$

miből könnyü módon kapjuk :

$$X=\int dx\left(P-\frac{ds}{dx}\right), \text{ minthogy } \frac{dU}{dx}=P,$$

s így e következő egészelési minta származik :

$$5.)\quad U=\int Qdy+\int dx\left(P-\frac{ds}{dx}\right)+C',$$

hol C' a közönséges állandó. Hasonló módon pedig mint ezelőtt, be lehet bizonyítni, hogy $\left(P-\frac{ds}{dx}\right)$ kifejezés tisztán csak x-nek függvénye, melyben tehát semmi y nem foglaltatik. Az adott esetek egészelésénél tehát vagy a 3.) vagy az 5.) alatti minta lesz használandó, a mint t. i. vagy x vagy y szerint történik az egészelés ; alkalmazását pedig e következő példákból fogjuk látni :

(1-ső Példa.) Legyen egészelendő e következő külzeléki függvény :

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2};$$

mielőtt ezen függvényt egészelni lehetne először az x és y szerinti részlet-külzelékeket egymástól el kell választani, s azonnal látjuk, hogy áll :

$$Pdx=\frac{ydx}{x^2+y^2}, \text{ és } Qdy=-\frac{xdy}{x^2+y^2};$$

ha tehát x szerint akarnók egészelni, akkor a 3.) alatti minta lesz használandó, mindenekelőtt tehát áll :

$$u=\int Pdx=\int\frac{ydx}{x^2+y^2}=arctg\frac{x}{y}.$$

Most azon állandónak meghatározása következik, mely y-nak függvénye, mi végre áll:

$$Q = -\frac{x}{x^2+y^2}, \text{ és } \frac{du}{dy} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \text{ következőleg:}$$

$$Q - \frac{du}{dy} = 0, \text{ s így } Y = 0, \text{ áll tehát teljesen:}$$

$$U = arctg\frac{x}{y} + C.$$

(2-dik Példa.) Az adott külzeléki függvény legyen ez:

$$du = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right);$$

ha itt is x szerint akarunk egészelni, akkor az x szerinti első részlet-külzelék ez lesz:

$$Pdx = \frac{(x^2+xy+y^2)dx}{x(x^2+y^2)},$$

minek egészelését kijelentvén, lesz:

$$u = \int\frac{(x^2+xy+y^2)dx}{x(x^2+y^2)} + Y,$$

mely kifejezés még így is irható:

$$u = \int dx\left(\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{x}\right) + Y,$$

hol tehát két egészletet látunk, melyekre nézve áll:

$$u = arctg\frac{x}{y} + logx + Y.$$

Azon állandónak meghatározására tehát, mely y-nak függvénye, áll:

$$Q = -\frac{x^2+xy+y^2}{y(x^2+y^2)}, \text{ továbbá: } \frac{du}{dy} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \text{ következőleg:}$$

$$Q - \frac{du}{dy} = -\frac{1}{y}, \text{ s így } Y = -logy,$$

az adott függvény teljes egészlete tehát lesz:

$$u = arctg\frac{x}{y} + log\frac{x}{y} + C,$$

hol C a közönséges állandó.

(3-dik Példa.) Legyen egészelendő e következő függvény:

$$du = \frac{dx}{x} + \frac{dx+dy}{2(x+y)} - \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$du = d\cdot(arctg\frac{x}{y}) = -\frac{x\,dy}{y^2(1+\frac{x^2}{y^2})}$ ebből $\frac{du}{dy} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

ha itt y szerint akarjuk véghez vinni az egészelést, akkor az y szerinti részlet-külzelék lesz:

$$Qdy=\frac{dy}{2(x+y)}-\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

s ennél fogva az egészelés által kapjuk:

$$u=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{x+y}-\int\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+X,$$

hol X azon állandó, mely x-nek függvénye. Ezen egészletek ismeretesek levén, áll:

$$u=\frac{1}{2}log(x+y)-\sqrt{x^2+y^2}+X;$$

hogy pedig X állandót meglehessen határozni, P-nek értéke nyilván ez:

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+y)}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

s mivel továbbá:

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2(x+y)}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\text{ nyerjük:}$$

$$P-\frac{ds}{dx}=\frac{1}{x}, \text{ tehát: } X=\int\frac{dx}{x}=logx,$$

az adott függvény teljes egészlete tehát lesz:

$$u=\frac{1}{2}log(x+y)+logx-\sqrt{x^2+y^2}+C.$$

(4-dik Példa.) Legyen az adott külzeléki függvény e következő:

$$du=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+adx+2bydy;$$

ha ezt is y szerint egészeljük, lesz:

$$u=by^2+X,$$

X állandónak meghatározására pedig áll:

$$X=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+a\int dx=log(x+\sqrt{1+x^2})+ax,$$

s így az adott függvény teljes egészlete lesz:

$$u=by^2+ax+log(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

Hasonló módon $du=\frac{xydx-y^2dx}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}$ függvényből találjuk:

$$u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}+C.$$

54.) **(Három változóval bíró külzeléki függvények egészelése.)** Ezen függvényekre nézve a külzeléki hánylatból ismeretes előttünk, hogy az ilyféle függvénynek teljes külzeléke mindig három részből áll, s ezen részek az x, y és z szerinti részlet-külzelékek által vannak képviselve, s így ha $U=f(x,y,z)$, akkor ennek teljes külzeléke e következő általános kifejezésben foglaltatik:

$$1.)\quad dU=Pdx+Qdy+Rdz,$$

hol tehát P, Q, és R által, az x, y és z szerinti külzeléki hányadosok terjesztetnek elő. Hogy pedig az előttünk álló kifejezés teljes külzeléke legyen valamely három változóval bíró függvénynek, e következő három feltételező egyenletnek kell állnia:

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx},\quad \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx},\quad \text{és}\quad \frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy},$$

mint a külzeléki hánylatban be volt bizonyítva.

Egy ilyféle függvény egészelése végett, megint azon részletes módra kell figyelnünk, mely szerint egy három változóval bíró függvény külzeltetik, s ennek folytán könnyü lesz egy ilyféle külzeléki függvénynek egészelése is; mert ha azt például x szerint egészeljük, és az előbbi szám módja szerint egy állandót csatolunk hozzá, mely y-nak függvénye, akkor az adott külzeléki függvény teljes egészlete már meglesz, mihelyt a megtalált kifejezéshez még egy állandót tudunk csatolni, mely állandó z-nek valamely függvénye. Az eddig mondottak e következő módon vitetnek véghez:

A fenebbi 1) alatti egyenlet x szerinti első részlet-külzeléke:

$$dU=Pdx$$

levén, ennek egészelése által kapjuk:

$$U=\int Pdx+Y,$$

hol Y a fen említett állandó, mely y-nak függvénye, s ennek az előbbi számban megtalált értékét helyettesítvén, lesz:

$$U=\int Pdx+\int dy\left(Q-\frac{du}{dy}\right),\quad \text{hol}\quad u=\int Pdx,$$

ezen kifejezéshez pedig még azon állandót is csatolván, mely z-nek függvénye, s melyet Z-vel jelölünk, áll még:

$$U=\int Pdx+\int dy\left(Q-\frac{du}{dy}\right)+Z.$$

Z-nek meghatározására, külzeltessék z szerint az előttünk álló egyenlet, s nyerni fogjuk:

$$\frac{dU}{dz}=\int dx.\frac{dP}{dz}+\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{d^2u}{dydz}\right)+\frac{dZ}{dz},$$

s mivel $\frac{dU}{dz}=R$, ezen egyenletből ered:

$$\frac{dZ}{dz}=R-\int dx.\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{d^2u}{dydz}\right),$$

s így egészelés által:

$$Z=\int dz\left[R-\int dx.\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{d^2u}{dydz}\right)\right],$$

mely értéknek helyettesítése adja:

$$2.)\quad U=\int Pdx+\int dy\left(Q-\frac{du}{dy}\right)+$$

$$\int dz\left[R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{d^2u}{dydz}\right)\right]+C,$$

hol C a közönséges állandó; ez pedig azon általános minta, mely szerint mindig egészelhetők a három változóval bíró külzeléki függvények; még csak azt kell megmutatnunk, hogy az

$$3.)\quad R-\int dx.\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{d^2u}{dydz}\right) \text{ kifejezés}$$

tisztán csak z-nek függvénye, tehát sem x-et sem y-t nem foglal magában; mi végre ezen kifejezést először x szerint kell külzelni, s nyerni fogjuk:

$$\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{d^2Q}{dxdz}-\frac{d^3u}{dxdydz}\right);$$

hogy ezen kifejezésnek első két tagja megsemmisíti egymást könnyü belátni, hogy pedig az utolsó tag szinte $=0$, következik abból, hogy $\frac{du}{dx}=P$ miatt $\frac{d^3u}{dxdydz}=\frac{d^2P}{dydz}$, s ebből már láthatni, hogy a fenebbi kifejezésnek utolsó tagja szinte elenyésző, a kérdéses 3) alatti kifejezés tehát semmi x-et nem foglal magában.

Hogy pedig ugyanazon kifejezés y-t sem tartalmaz magában, annak y szerinti külzelése megmutatja, minek megtörténte után nyerni fogjuk :

$$\frac{dR}{dy} - \int dx.\frac{d^2P}{dydz} - \frac{dQ}{dz} + \frac{d^2u}{dydz};$$

s annak belátására, hogy ezen összeg is elenyésző, csak azt kell tekintetbe venni, hogy $\frac{du}{dx}=P$ miatt $\frac{d^2u}{dydz}=\int dx\frac{d^2P}{dydz}$ kell lenni, s így be van bizonyítva, hogy a fenebbi 3.) alatti kifejezés y-t sem foglal magában, s hogy ez tehát tisztán csak z-nek függvénye.

Ezen elmélet felvilágositására, szolgálnak e következő példák :

(1-ső Példa.) Legyen az egészelendő külzeléki függvény :

$$dU = -\frac{2xdx(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} + \frac{2ydy}{x^2+y^2} - \frac{2zdz}{x^2+z^2}.$$

Hogy ezen kifejezés egy három változóval bíró függvénynek teljes külzeléke, könnyü meggyöződhetni az által, hogy ez a fenebbi három feltételező egyenletnek teljesen megfelel. Ha tehát ezt x szerint akarnók egészelni, akkor az x szerinti első részlet-külzelék lesz :

$$dU = Pdx = -\frac{2xdx(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)},$$

minek egészelése által kapjuk :

$$U = -\int dx\frac{2x(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} + Y.$$

Hogy pedig ezt x szerint lehessen egészelni, szükség lesz dx-nek együtthatóját, mint való és okszerü tört függvényt, részlet-törteire bontani, mi végre e következő egyenlítés szolgál :

$$\frac{2x(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} = \frac{A+Bx}{x^2+y^2} + \frac{C+Dx}{x^2+z^2},$$

mely egyenletet 0-ra hozván, könnyen találtatik : $A=C=0$, és $D=2$, és $B=-2$, minek folytán áll :

$$\frac{2x(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} = \frac{2x}{x^2+z^2} - \frac{2x}{x^2+y^2},$$

mit dx-el szorozván és egészelvén, nyerjük :

$$U=2\int\frac{xdx}{x^2+y^2}-2\int\frac{xdx}{x^2+z^2}+Y, \text{ avagy :}$$

$$U=log(x^2+y^2)-log(x^2+z^2)+Y.$$

Y állandónak meghatározására, ezen egyenlet y szerinti külzeléke lesz :

$$\frac{dU}{dy}=\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy},$$

ha pedig az eredetileg adott függvény tekintetbe vétetik, látni fogjuk, hogy $\frac{dU}{dy}=\frac{2y}{x^2+y^2}$, minek folytán áll : $\frac{dY}{dy}=0$, következőleg $Y=0$, azaz: itt ezen állandónak nincs értéke, egészletünk tehát még így is áll :

$$U=log(x^2+y^2)-log(x^2+z^2)+Z,$$

hol Z a még meghatározandó állandó, e végre pedig ezen egyenlet z szerinti külzeléke lesz :

$$\frac{dU}{dz}=-\frac{2z}{x^2+z^2}+\frac{dZ}{dz},$$

és ha megint az eredetileg adott egyenlet tekintetbe vétetik látjuk, hogy áll : $\frac{dU}{dz}=-\frac{2z}{x^2+z^2}$, s ennek folytán $\frac{dZ}{dz}=0$, honnan $Z=0$, azaz : ezen utolsó állandónak sincs értéke, s így az adott külzelék teljes egészlete lesz :

$$U=log.\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}+C,$$

hol C a közönséges állandó.

(2 dik Példa.) Legyen adva e következő külzeléki függvény :

$$dU=-\frac{(x^2-y^2-z^2)dx}{(x^2+y^2+z^2)x}+\frac{x^2+(y-z)^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{dy}{z}+$$
$$\frac{(x^2+y^2-z^2)dz}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{ydz}{z^2}+\frac{dz}{z^3};$$

annak belátására, hogy itt is az egészelést bármely változó szerint szabad véghez vinni, egészeljük az elöttünk álló kifejezést z szerint, minek megtörténte után, az X és Y állandók leszenek meghatározandók. A fenebbi függvény z szerinti részletkülzeléke ez :

$$dU=dz\left[\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right],$$

minek egészlete így jelentendő ki:

$$U=\int dz\left[\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right]+X,$$

hol X az első meghatározandó állandó. Ennek egészelése végett, szükség lesz e következő függvényt részlet-törteire bontani:

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}=\frac{A}{z}+\frac{B+Cz}{x^2+y^2+z^2},$$

miből könnyü módon találjuk: $A=1$, $B=0$ és $C=-2$, minek következtében áll:

$$U=\int dz\left[-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right]+X,$$

s ennek folytán nyejük:

$$U=-log(x^2+y^2+z^2)+logz+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+X.$$

X állandónak meghatározására, külzeljük az előttünk álló egyenletet x szerint, s nyerjük:

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dX}{dx},$$

az eredeti egyenletből pedig kapjuk:

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)x}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{x}.$$

miből könnyü módon nyerjük:

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1}{x},\ \text{tehát}: X=logx,$$

egészletünk tehát így áll még:

$$U=-log(x^2+y^2+z^2)+logz+logx+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+Y;$$

hátra van még Y állandónak a meghatározása, mi végre y szerint külzelvén az utolsó egyenletet, áll:

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{z}+\frac{dY}{dy},\ \text{s mivel}:$$

$$\frac{dU}{dy}=\frac{x^2+(y-z)^2}{(x^2+y^2+z^2)z},\ \text{ennek helyettesitése adja}:$$

$\frac{dU}{dy}=0$, következőleg $Y=0$, s így teljesen áll:

$$U=-log(x^2+y^2+z^2)+logz+logx+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+C,$$

hol C a közönséges állandó.

(3-dik Példa.) Az adott külzeléki függvény e következő:

$$dU=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{zdx-xdz}{x^2+z^2}+zdz.$$

Ha itt x szerint történik az egészelés, meg levén győződve arról, hogy ez valamely függvénynek teljes külzeléke, áll:

$$U=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\int\frac{zdx}{x^2+z^2},$$

miből könnyen találjuk ezt:

$$U=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+arctg\frac{x}{z}+Y.$$

Y állandónak meghatározására, külzeltessék ez y szerint, s lesz:

$$\frac{dU}{dy}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{dY}{dy},$$

és az eredeti egyenletet tekintetbe vevén, nyerni fogjuk:

$$\frac{dY}{dy}=0,\ \text{tehát}\ Y=0,$$

azaz: ezen állandónak értéke nincs, s így egészletünk még így áll:

$$U=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+arctg\frac{x}{z}+Z,$$

Z-nek meghatározázára, külzeltessék ezen egyenlet z szerint, s lesz:

$$\frac{dU}{dz}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x}{z^2+x^2}+\frac{dZ}{dz};$$

és ha $\frac{dU}{dz}$-nek értéke az eredeti egyenletből vétetik, nyerni fogjuk:

$$\frac{dZ}{dz}=z,\quad \text{miből:}\quad Z=\frac{z^2}{2}\quad \text{következőleg:}$$

$$U=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+arctg\frac{x}{z}+\frac{z^2}{2}+C,$$

mint teljes egészlete az adott függvénynek.

Hasonló módon járván el, e következő példák értékei is könnyen nyerhetők, melyeknek kifejtését azonban a tanulóra bízzuk, úgymint:

$$du=\frac{ydx}{a-z}+\frac{xdy}{a-z}+\frac{xydz}{(a-z)^2}$$

függvényből, e következő egészletet kapjuk :

$$u=\frac{xy}{a-z}+C.$$

Továbbá :

$$du=(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$$

függvényből kapjuk :

$$u=xy+xz+yz+C.$$

Végre :

$$du=\frac{adx-bdy}{z}+\frac{(by-ax)dz}{z^2}$$

függvényből nyerjük :

$$u=\frac{ax-by}{z}+C.$$

55.) Az eddig megmutatott út, melyen több változóval bíró külzeléki függvények egészleteihez jutunk, egy kevéssé hosszas, azért is nem lesz érdektelen itt még megmutatni, miként rövidíthető meg ezen eljárás, új változók behozása által; mert az által, vagy egy olyféle külzeléki függvényt kapunk, melyben csak egy változó fordúl elő, s ennél fogva könnyen egészelhető ; vagy az adott külzeléki függvény oly két részre bontatik, melyek mindegyikében szinte csak egy változó mutatkozik, s így egészelése szinte könnyü. E következő esetekből látható lesz a tárgy mibenléte :

(1-ső eset.) Az egészelendő függvény legyen :

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2};$$

tétessék itt : $x=rcosv$, és $y=rsinv$, hol tehát r és v az újjon behozandó változók, akkor külzelés által kapjuk :

$$dx=drcosv-rdvsinv, \quad \text{és}$$
$$dy=drsinv+rdvcosv, \quad \text{következőleg :}$$

$ydx=rdrcosvsinv-r^2dvsin^2v$, és $xdy=rdrsinvcosv+r^2drcos^2v$ s így

$$ydx-xdy=-r^2dv, \quad \text{továbbá :}$$
$$x^2+y^2=r^2, \quad \text{következőleg}$$
$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-dv,$$

mely egyenletet egészelvén, lesz :

$$u=\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-v+C;$$

mivel pedig a fenebbi egyenletek osztása által kapjuk :

$\frac{y}{x}=tgv$, lesz $v=arctg\frac{y}{x}$ tehát :

$$u=\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-arctg\frac{y}{x}+C.$$

Hogy ezen egészlet tevöleges alakban állittassék elő, könnyü belátni, hogy áll :

$$arctg\frac{y}{x}+arctg\frac{x}{y}=\frac{\pi}{2},$$

mert tévén : $arctg\frac{y}{x}=\varphi$ és $arctg\frac{x}{y}=\varphi'$, lesz $\frac{y}{x}=tg\varphi$,

és $\frac{x}{y}=tg\varphi'$, mivel pedig áll :

$$tg(\varphi+\varphi')=\frac{tg\varphi+tg\varphi'}{1-tg\varphi tg\varphi'},$$

ha itt $tg\varphi$ és $tg\varphi'$ helyébe a fenebbi értékeket helyettesítjük, nyerni fogjuk : $tg(\varphi+\varphi')=\infty$, következöleg

$\varphi+\varphi'=arctg\infty=\frac{\pi}{2}$, s igy φ és φ' pótszögök,

s ennek folytán lesz : $-arctg\frac{y}{x}=arctg\frac{x}{y}$, következöleg

$$u=\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=arctg\frac{x}{y}+C,$$

mint az előbbiekben már megtaláltuk.

(2-dik eset.) Adva van e következő külzeléki függvény :

$$du=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right),$$

akkor itt is tévén : $y=rsinv$, és $x=rcosv$, lesz :

$$x^2+xy+y^2=r^2(1+sinvcosv) \text{ és } x^2+y^2=r^2,$$

továbbá : $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=-\frac{dv}{sinvcosv}$,

mely értékek helyettesítése adja :

$$u=\int\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)=$$

$$-\int\frac{dv(1+sinvcosv)}{sinvcosv}, \text{ avagy :}$$

$$u=-\int\frac{dv}{sinvcosv}-\int dv+C\,;$$

ezen egészletek elsejére a 34)-dik szám 19) alatti képletét alkalmazván, lesz :

$$u=-v-logtgv+C,$$

és ha v helyébe x és y által kifejezett érték tétetik, lesz :

$$u=\int\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)=arctg\frac{x}{y}+log\frac{x}{y}+C,$$

mint már ismeretes előttünk.

Hasonló módon, ugyanazon értékeket helyettesítvén x és y helyébe e következő kifejezésben :

$$u=\int\left[\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{dy}{y}\right], \text{ nyerni fogjuk :}$$

$$u=logr(1+cosv)+C=log(x+\sqrt{x^2+y^2})+C.$$

(3-dik eset.) Az egészelendő függvény legyen ez :

$$du=\frac{y^2dx+x^2dy}{a(x+y)xy+bx^2y^2}\,;$$

minthogy ez is teljes külzelék, egészelése végett tétessék : $x=\frac{1}{v}$ és $y=\frac{1}{w}$, akkor e következő kifejezést fogjuk nyerni :

$$du=-\frac{dv+dw}{b+a(v+w)},$$

mely kifejezés még így is írható :

$$du=-\frac{d.(v+w)}{b+a(v+w)},$$

mit helyettesítés által egészelvén, lesz :

$$u=-\frac{1}{a}log(b+a(v+w)),$$

és ha v és w helyébe x és y-ban kifejezett értékek tétetnek, nyerni fogjuk :

$$u=\int\frac{y^2dx+x^2dy}{a(x+y)xy+bx^2y^2}=\frac{1}{a}log\frac{cxy}{a(x+y)+bxy},$$

ha t. i. $\frac{1}{a}logc$ az állandót jelenti.

56.) **(Határozott egészletek.)** Itt azon függvények határozott egészleteiről lesz szó, melyekben két változó fordúl elő. E végre pedig, hogy azon eljárás megismertessék, mely ilyféle határozott egészletek meghatározásánál alkalmazandó, vegyük fel, hogy $\varphi(x,y)$ és $\psi(x,y)$ két olyféle függvény, melyre nézve e következő egyenlet áll:

$$\frac{d.\varphi(x,y)}{dy}=\frac{d.\psi(x,y)}{dx},$$

akkor ezen egyenlet állván, az 53)-dik szám feltételező 2) alatti egyenlete szerint, teljes egészlete lesz e következő külzeléki függvénynek:

$$1)\quad \varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy,$$

mely egészlet, minthogy szinte x és y-nak függvénye, ha $F(x,y)$ által jegyeztetik, áll:

$$2)\quad \int[\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy]=F(x,y)+C,$$

hol C a közönséges és tetszésszerinti állandó. Hogy már most ezen egészletet

$$x=a \text{ és } x=A, \text{ azután } y=b \text{ és } y=B,$$

határok között lehessen nyerni, mely határok között az adott függvények folytonosak, e következő egyenlet lesz használandó, melynek helyes volta könnyen belátható:

$$3)\quad \varphi(x,y)h+\psi(x,y)k=F(x+h,y+k)-F(x,y),$$

mely egyenletnek mindig kell állnia, míg x-nek növete $=h$ és y-nak növete $=k$ végtelen kicsiny mennyiségek. Ha ez egyenletbe x és y helyébe az a és A, s b és B határok között fekvő értékeket beiktatjuk, akkor az egyenletek e következő sorát fogjuk kapni:

$$\begin{array}{ll} x=a, & y=b, \\ x=a+h, & y=b+k, \\ x=a+2h, & y=b+2k, \\ x=a+3h, & y=b+3k, \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ x=a+nh, & y=b+nk \end{array}$$

úgy, hogy nh és nk által az egész a és A, s b és B közötti hézag ki van töltve; s akkor ezek összeadása által, a fenebbi 3) alatti egyenlet jobb része ebbe menend át:

$$F(a+nh,\ b+nk)-F(a,b),$$

bal része pedig végtelen kicsiny mennyiségek összegét állítandja elő, mely a kitett határok közötti egészletet annál pontosabban adandja, minél kisebbek a h és k növetek; mivel pedig:

$$a+nh=A, \quad \text{és} \quad b+nk=B,$$

a 3) alatti egyenletből e következő határozott egészletet kapjuk:

$$4) \quad \int_{a,b}^{A,B} [\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy]=F(A,B)-F(a,b),$$

hol az a és A határok x-re, a b és B határok pedig y-ra vonatkoznak. Ezen előttünk álló egyenlet tehát nem egyéb, mint a 2) alatti egyenletnek határozott egészlete, s alakjából világosan látjuk, hogy ezen egészlet ugyanazon szabályok szerint találtatik meg, melyeket már az egy változóval bíró függvényeknél alkalmaztunk, mely szabályok tehát bárhány változóval bíró függvényekre nézve is állanak.

A fenebbi 4) alatti egyenletnek egészlete azonban, egy változóra is visszavezethető; minthogy t. i. a fenebbi egyenletekre nézve megemlíttetett, hogy mind h mind k végtelen kicsiny mennyiségek, h tehát dx-re, k pedig dy-ra ment át, könnyü lesz e következő egyenletekből:

$$a+ndx=A \quad \text{és} \quad b+ndy=B,$$

a határozatlan n mennyiséget kiküszöbölni, minek végbe vitele után nyerni fogjuk:

$$(A-a)dy=(B-b)dx, \text{ s ebből:}$$

$$5) \quad \frac{dy}{dx}=\frac{B-b}{A-a}, \quad \text{és} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{A-a}{B-b},$$

most pedig a 4) alatti egyenletet e következő két módon írván:

$$u=\int_a^A \left[\varphi(x,y)+\psi(x,y)\frac{dy}{dx}\right]dx, \text{ és}$$

$$u=\int_b^B \left[\varphi(x,y)\frac{dx}{dy}+\psi(x,y)\right]dy,$$

mely egyenletek elseje csak x szerint, másika pedig y szerint egészelendő; ha $\frac{dy}{dx}$ és $\frac{dx}{dy}$ helyébe a fenebbi értékek tétetnek, lesz:

$$6) \quad u=\int_a^A \left[\varphi(x,y)+\frac{B-b}{A-a}\psi(x,y)\right]dx, \text{ és}$$

$$u=\int_b^B\left[\psi(x,y)+\frac{A-a}{B-b}\varphi(x,y)\right]dy,$$

mely egyenletek elsejében y-nak, másikában pedig x-nek azon értéke teendő, mely értékeket az 5) alatti egyenletekből lehet nyerni. Ha ezen egyenletek bármelyike egészeltetik, lesz :

$$7)\quad (A-a)y=(B-b)x+C,$$

hol C állandót az által kapjuk, hogy a 7) alatti egyenletben egyidejüleg vagy $x=a$ és $y=b$, vagy $x=A$ és $y=B$ tétetik; ezen helyettesítések bármelyike ezt adja :

$$C=Ab-Ba,$$

mi által a 7) alatti egyenlet ebbe megy át :

$$8)\quad y=\frac{B-b}{A-a}x+\frac{Ab-Ba}{A-a}, \text{ vagy : }$$

$$x=\frac{A-a}{B-b}y+\frac{Ab-Ba}{B-b}.$$

Ha tehát az egészelhető

$$\varphi(x,y)dx+\varphi(x,y)dy$$

függvény $x=a$-tól $x=A$-ig, és $y=b$-től $y=B$-ig lenne egészelendő, akkor a kivánt egészletre fogunk jutni, ha mindenekelőtt y és dy vagy x és dx

$$(A-a)y-(B-b)x=Ab-Ba$$

egyenletből kifejtetik, s ezen értékeket az 1) alatti kifejezésben helyettesítjük, és az első esetben $x=a$ és $x=A$, a második esetben pedig $y=b$ és $y=B$ határok között egészeljük. E következő példákból világos lesz az eljárás :

(1-ső Példa.) Legyen meghatározandó e következő határozott egészlet :

$$u=\int_{a,b}^{A,B}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2};$$

küszöböltessék ki e végre y és dy, akkor a fenebbi egyenletből áll :

$$y=\frac{B-b}{A-a}x+\frac{Ab-Ba}{A-a}, \text{ és } dy=\frac{B-b}{A-a}dx,$$

és ha rövidség okáért tétetik :

$$\frac{B-b}{A-a}=\alpha \text{ és } \frac{Ab-Ba}{A-a}=\beta, \text{ áll :}$$

$$y=\alpha x+\beta \text{ és } dy=\alpha dx,$$

mely értékeket a fenebbi egészletbe tévén, és csak az x-nek megfelelő határokat tartván meg, lesz:

$$u=\int_a^A \frac{(\alpha x+\beta)dx-\alpha x dx}{x^2+(\alpha x+\beta)^2},$$

avagy rövidebben:

$$u=\int_a^A \frac{\beta dx}{\beta^2+2\alpha\beta x+(1+\alpha^2)x^2},$$

mely egészletre az 5)-dik szám 1) alatti képletét alkalmazván, lesz:

$$\beta\int\frac{dx}{\beta^2+2\alpha\beta x+(1+\alpha^2)x^2}=arc.tg.\frac{\alpha\beta+(1+\alpha^2)x}{\beta},$$

mely kifejezés $x=A$ és $x=a$ határok között vételvén, lesz:

$$u=arctg\frac{(1+\alpha^2)A+\alpha\beta}{\beta}-arctg\frac{(1+\alpha^2)a+\alpha\beta}{\beta},$$

ezen két *arctg.* különbsége pedig, ha ismert mód szerint egybevonatik, nyerjük:

$$u=arctg\frac{(A-a)(1+\alpha^2)\beta}{\beta^2+[\alpha\beta+(1+\alpha^2)A][\alpha\beta+(1+\alpha^2)a]},$$

és kellő rövidítés után:

$$u=arc.tg\frac{(A-a)\beta}{\beta^2+\alpha\beta A+\alpha\beta a+(1+\alpha^2)Aa}$$

$$=arc.tg\frac{(A-a)\beta}{(\beta+\alpha A)(\beta+\alpha a)+Aa},$$

és ha most α és β-nak értékei tekintetbe vétetnek, áll:

$$\int_{a,b}^{A,B}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=arctg\cdot\frac{Ab-Ba}{Aa+Bb},$$

s ez a határozott egészlet keresett értéke, melyet azonban az általános $\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=arctg\frac{x}{y}$ egészletből is igen könnyü módon lehet nyerni, ha t. i. a jelen kifejezésben x és y helyébe először a felső A és B, azután pedig az alsó a és b határok tétetnek, ez által (az eredményeket egymásból kivonván) kapjuk:

$$\int_{a\,b}^{A,B}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=arctg\frac{A}{B}-arctg\frac{a}{b},$$

mely két *arc.tg.* különbsége egybe vonatván, a már fen megtalált eredményt fogjuk nyerni.

(2-dik Példa.) Ha hasonló módon e következő kifejezésből :

$$u=\int_{a,b}^{A,B}\frac{ydx-(x-\sqrt{x^2+y^2})dy}{y\sqrt{x^2+y^2}},$$

y és dy mennyiségek kiküszöböltetnek, vagy a mi még jobb, x és dx eltávolíttatik : akkor szintúgy járván el, mint az előbbi példában, e következő eredményre fogunk jutni :

$$u=log\cdot\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}},$$

s így az eddig előhozottakból könnyü felfogni, miként veendő két változóval biró függvény egészlete bizonyos adott határok között.

57.) **(Nem vonalos külzeléki függvények egészelése)** Nem vonalos külzeléki függvényeknek azok neveztetnek, melyekben a változó vagy változók külzelékei nem az első, hanem valamely magasb hatványon fordúlnak elő, itt csak azon nem vonalos külzeléki függvényekről lesz szó, melyek csak egy tagból állanak, s azért is egy tagu függvényeknek neveztetnek; ezek t. i. e következő alakokban fordúlnak elő :

$$f(x)dx^m,\quad f(x,y)dx^m dy^n,\quad f(x,y,z)dx^m dy^n dz^r\ldots\ldots$$

Azon nem vonalos egytagu külzeléki föggvények egészelése, melyekben csak egy változó jő elő, már az előbbiekben, még pedig a 38)-dik szám alatt adatott elő ; itt tehát csak azon függvények egészeléséről lehet szó, melyekben több változó kerül elő. E következő eset tárgyalása a dolog felvilágositására szolgáland : A fent előhozott

$f(x,y)dx^m dy^n$ külzeléki függvény t. i.

nyilván valamely $u=F(x,y)$ függvénynek fokonkénti részletes külzelése által eredőnek tekintendő, még pedig m-szer x szerint és n-szer y szerint, s így állnia kell e következő egyenletnek :

$$d^{m+n}u=f(x,y)dx^m dy^n,\text{ avagy : }\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}=f(x,y).$$

Ez egyenletből pedig az eredeti függvény könnyen kitalálható, mihelyt azt egyes változói szerint részletesen egészeljük ; mindegy bármely rendben vétetik elő az egészelés. Mivel pedig minden egyes egészeléshez egy tetszésszerinti állandó tartozik, azért a fenebbi kifejezés egészeléséből eredő u függvény $m+n$ tetszésszerinti állandóval fog bírni.

A kellő eljárás belátására, vegyük például egészelendőnek e következő külzeléki függvényt:

$$\frac{d^5u}{dx^3dy^2}=\frac{y}{x^4};$$

akkor ezen egyenletet dx-el szorozván, és x szerint egészelvén, lesz:

$$\frac{d^4u}{dx^2dy^2}=-\frac{y}{3x^3}+Y,$$

hol Y az első egészelésnek tetszésszerinti állandója, mely, mint könnyü belátni, y-nak valamely függvénye. Ha ezen utolsó egyenletet újra szorozzuk dx-el, és x szerint egészeljük, lesz:

$$\frac{d^3u}{dxdy^2}=\frac{y}{6x^2}+Yx+Y',$$

hol Y' a második egészelésnek tetszésszerinti állandója. Ezen egyenletet pedig ha dy-nal szorozzuk, és y szerint egészeljük, lesz:

$$\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{y^2}{12x^2}+x\int Ydy+\int Y'dy+X,$$

hol X a harmadik egészelésnek tetszésszerinti állandója, mely nyilván x-nek valamely függvénye. Mivel továbbá az ezen egyenlet jobb részében előforduló két egészlet csak y-nak függvénye lehet, ha azok elsejét Y'-el, másikát Y''-el jelöljük, áll:

$$\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{y^2}{12x^2}+xY'+Y''+X;$$

és ha végre ezen egyenletet $dxdy$-nal szorozzuk, és mind x mind y szerint egészeljük, nyerni fogjuk:

$$u=\int\int\left(\frac{y^2}{12x^2}+xY'+Y''+\mathrm{X}\right)dxdy,$$

mely egészelés, minthogy már könnyen véghez vihető, az adott külzelék egészlete teljesen megtaláltnak tekintendő. Az eddigi eljárásból egyszersmind könnyü belátni, miként és mily rendben egészelendő a

$$\frac{d^{m+n+r}u}{dx^m dy^n dz^r}=f(x,y,z) \text{ kifejezés};$$

itt t. i. látjuk, hogy az egészelést $(m+n+r)$-szer egymásután kell véghez vinni, még pedig m-szer x szerint, n-szer y szerint, és r-szer z szerint, és hogy a kijövő egészletben $(m+n+r)$ tetszésszerinti állandók fordúlandnak elő, melyek részint y és z-nek, részint x és z-nek, részint pedig x és y-nak függvényei lesznek.

58.) **(Kettős egészletek kifejtése.)** Ha $F(x,y)$ által azon, két változóval bíró függvényt jeleljük, mely részletesen egyszer x és egyszer y szerint külzelve, $f(x,y)dxdy$ eredményre vezet: akkor ezen két függvény között e következő egyenletnek kell állnia:

$$1.)\quad \frac{d^2F(x,y)}{dxdy}=f(x,y);$$

megfordítva tehát $F(x,y)$ függvényt, az adott $f(x,y)dxdy$ külzelékből kettős egészelés által fogjuk nyerni, mely egészelés nyilván egyszer x és egyszer y szerint véghezviendő; ezek folytán áll:

$$\int\!\!\int f(x,y)dxdy=F(x,y)+X+Y,$$

hol X azon állandó, mely y szerinti, Y pedig azon állandó, mely x szerinti egészelésnek megfelel. Ezen egészelés már az előbbiekből ismeretes előttünk, de mivel X és Y tetszésszerinti függvények, ezeknek meghatározásánál szabad lesz, bizonyos feltételeknek teljesülését követelni, melyeknek alá legyen vetve a kérdéses egészlet. Ezen fellételeket e következő módon lehet formulázni: Hogy például a fen adott egészlet 1-ször x-nek bizonyos értékére nézve, például $x=a$-ra nézve elenyésző legyen, 2-or, hogy az y-nak bizonyos értékére nézve, például $y=b$-re nézve szintén elenyésző legyen, bármely értékeket vennének is föl az X és Y mennyiségek.

Ha a tetszésszerinti X és Y függvényeket $\varphi(x)$ és $\psi(y)$ által jelöljük, hol tehát $\varphi(x)$ tisztán csak x-nek, $\psi(y)$ pedig tisztán csak y-nak függvénye: akkor a fenebbi egészlet még így is áll:

$$2.) \quad \iint f(x)dxdy = F(x,y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

és a fen kimondott feltétek szerint, e következő két egyenletet nyerni fogjuk :

$$0 = F(a,y) + \varphi(a,) + \psi(y), \quad \text{és}$$
$$0 = F(x,b) + \varphi(x) + \psi(b),$$

mely egyenletek elseje y-nak bármely érték ére nézve, másika pedig x-nek bármely értékére nézve áll, s ennél fogva, ha az elsőben $y=b$, a másikban pedig $x=a$ tétetik, mind két esetben nyerni fogjuk :

$$0 = F(a,b) + \varphi(a) + \psi(b),$$

ebből pedig és az előbbi két feltételező egyenletből, a tetszésszerinti $\varphi(a)$ és $\psi(b)$ függvények kiköszöbölhetők, mi által e következő egyenletre jutunk :

$$0 = F(a,y) + F(x,b) - F(a,b) + \varphi(x) + \psi(y);$$

ez pedig a fenebbi 2) alatti egyenletből kivonatván, ered :

$$3) \quad \iint f(x,y)dxdy = F(x,y) - F(a,y) - F(x,b) + F(a,b),$$

mely egyenlet a tetszésszerinti függvényektől meg van szabadítva, és a fen kimondott feltételeknek megfelel.

A fenebbi kettős egészlet tehát úgy érhető el, hogy az x szerinti egészelésnek végbe vitele után, a nyert egészlet $x=a$-ra nézve elenyésző legyen; s hasonlag az y szerinti egészelésnek végbe vitele után, a nyert egészlet $y=b$-re nézve szintén elenyésző legyen. Ennek mélyebb belátására, e következő példákat hozzuk elő :

(1-ső Példa.) Meghatározandó legyen e következő kettős egészlet :

$$u = \iint \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy,$$

azon kettős feltét alatt, hogy ezen egészlet mind $x=0$-ra nézve, mind $y=0$-ra nézve elenyészszék. Ha ezt legelőször x szerint egészeljük, nyerjük :

$$u = \int \left(x - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{xy^2}{b^2} + Y\right) dy + Y,$$

hol Y az egészelésnek állandója. Ezt pedig y szerint egészelvén, lesz :

$$u=xy-\frac{x^3y}{3a^2}-\frac{xy^3}{3b^2}+\int Ydy+\varphi(x),$$

hol $\varphi(x)$ a második egészelésnek állandója. Ha e kifejezésben $\int Ydy$ tag $\psi(y)$-nal felcseréltetik, áll :

$$u=xy-\frac{x^3y}{3a^2}-\frac{xy^3}{3b^2}+\varphi(x)+\psi(y),$$

itt pedig ha $x=0$, azután pedig $y=0$ tétetik, e következő két egyenletet nyerjük :

$$0=\varphi(0)+\psi(y), \quad \text{és} \quad 0=\varphi(x)+\psi(0),$$

s így ha ezen egyenletek elsejében $y=0$, vagy másikában $x=0$ tétetik, mindkét esetben áll :

$$0=\varphi(0)+\psi(0),$$

most pedig, ha az utolsó három egyenletből $\varphi(0)$ és $\psi(0)$ függvényeket kiküszöböljük, nyerni fogjuk :

$$0=\varphi(x)+\psi(y),$$

mely érték a fenebbi egyenletbe tétetvén, lesz :

$$u=xy-\frac{x^3y}{3a^2}-\frac{xy^3}{3b^2},$$

s ez a keresett egészlet.

(2-dik Példa.) Legyen meghatározandó :

$$u=\iint\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dxdy,$$

azon esetre, hogy x, y és z között álljon :

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

és hogy ezen egészlet mind $x=0$-ra nézve, mind $y=0$-ra nézve elenyésző legyen. Az utolsó egyenlet ezeket adja :

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}, \quad \text{és} \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z},$$

miknek helyettesítése által az adott egyenletben ehhez jutunk :

$$u=a\iint\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

s ennek y szerinti egészlete e következő :

$$u=a\int dx.arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}+\varphi(x),$$

hol $\varphi(x)$ a hozzá adandó tetszésszerinti függvény. Ezen még hátra levő egészlet részletesen meghatározható, de kényelmesebbnek tartjuk az adott egyenletbe tenni :

$$x = r\cos t \quad \text{és} \quad y = r\sin t,$$

hol tehát r és t a két bevezetendő új változó; ennek folytán, a kellő műtételek végbevitele után, egészletünk így áll:

$$u = a\int\int\frac{r.dr.dt}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

ezt pedig t szerint egészelvén, lesz,

$$u = a\int\frac{trdr}{\sqrt{a^2-r^2}} + \varphi(r),$$

ezt végre még egyszer egészelvén r szerint, nyerjük:

$$1.)\quad u = -\frac{at}{2}\sqrt{a^2-r^2} + a\varphi(r) + a\psi(t);$$

mivel pedig, ha $x=0$, t-nek bármely értékére nézve r szintén $=0$, és ha $y=0$, r-nek bármely értékére nézve t szintén $=0$, ha tehát $r=0$ tétetik, lesz:

$$0 = -\frac{at}{2} + \varphi(0) + \psi(t),$$

és ha t 0-nak vétetik, lesz:

$$0 = \varphi(r) + \psi(0),$$

s ennél fogva ezen utolsó két egyenletből, még pedig vagy az elsőből, ha benne $t=0$ tétetik, vagy a másikból, ha benne $r=0$ tétetik, ered:

$$0 = \varphi(0) + \psi(0),$$

ezt pedig ugyanazon két egyenlettel összekötvén, a $\varphi(0)$ és $\psi(0)$ függvények kimaradnak, s áll:

$$0 = -\frac{at}{2} + \varphi(r) + \psi(t),$$

mely egyenletet a-val szorozván, és a fenebbi 1) egyenletből kivonván, nyerjük:

$$u = \frac{a^2t}{2} - \frac{at}{2}\sqrt{a^2-r^2}.$$

Ámde tudjuk, hogy $t = arctg\frac{y}{x}$ és $r^2 = x^2+y^2$; x és y által kifejezett egészletünk tehát lesz:

$$u = \frac{a}{2}arctg\frac{y}{x}\,[a - \sqrt{a^2-x^2-y^2}].$$

59.) **(Határozott kéttős-egészletek.)** Azon feltét alatt, hogy az előbbi számban tárgyalt alapegyenlet:

$$\frac{d^2F(x,y)}{dxdy}=f(x,y) \text{ áll,}$$

ha ugyanazon szám 3) alatti egészletét, mely mint látjuk szintén kettős egészlet, $x=a$ és $x=A$, továbbá $y=b$ és $y=B$ határok között akarjuk venni, akkor az ismert szabályok szerint, e következő eredményre fogunk jutni:

$$\int_b^B\int_a^A f(x,y)dxdy=F(A,B)-F(a,B)-F(A,b)+F(a,b),$$

s így, minthogy x és y egymástól független változók, a határozott egészleteknél előadott törvények szerint, e következő egyenletek helyes volta is könnyen belátható:

$$\int_b^B\int_a^A f(x,y)dxdy=-\int_b^B\int_A^a f(x,y)dxdy=-\int_B^b\int_a^A f(x,y)dxdy.$$

Továbbá áll szintén:

$$\int_b^B\int_a^A f(x,y)dxdy=\int_a^A\int_b^B f(x,y)dydx,$$

s hasonlóképen áll:

$$\int_b^B\int_a^A f(x,y)dxdy=\int_B^b\int_A^a f(x,y)dxdy.$$

Ezeket tudván, hogy az alkalmazást is lássuk, meghatározandó legyen e következő kettős-egészlet:

$$\text{(1-ső Példa.)}\quad u=\int_0^{\sqrt{2bx}}\int_0^c zdxdy,$$

azon feltét alatt, hogy az x, y és z változók között álljon:

$$\frac{z^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2x.$$

Ezen egyenletből nyerjük: $z=\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{2bx-y^2}$, minek folytán a fen adott egészlet ebbe megy át:

$$u=\sqrt{\frac{a}{b}}\int_0^{\sqrt{2bx}}\int_0^c dxdy\sqrt{2bx-y^2};$$

ha itt először y szerint egészelünk, használván e végre a 21.)-dik szám III) alatti egyenletét, nyerni fogjuk:

$$\int dy\sqrt{2bx-y^2}=\frac{y\sqrt{2bx-y^2}}{2}+bx.\arcsin\frac{y}{\sqrt{2bx}};$$

ezt pedig $y=\sqrt{2bx}$ és $y=0$ határok között vevén, lesz :

$$\int_0^{\sqrt{2bx}} dy\sqrt{2bx-y^2}=bx.\frac{\pi}{2},$$

ennek folytán pedig a fenebbi egyenlet még így áll :

$$u=\frac{\pi}{2}\sqrt{ab}\int_0^c xdx=\frac{\pi}{4}c^2\sqrt{ab},$$

mely már a keresett határozott egészlet.

(2-dik Példa.) Meghatározandó legyen e következő egészlet :

$$u=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dxdy\sqrt{a^2-x^2},$$

ha ezt először egészeljük y szerint, lesz :

$\int dy=y$, ezt pedig $y=\sqrt{a^2-x^2}$ és $y=0$ határok között vévén, nyerjük :

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy=\sqrt{a^2-x^2},$$

ez által pedig egészletünk ebbe megy át :

$$u=\int_0^a dx(a^2-x^2)=a^2\int_0^a dx-\int_0^a x^2dx\text{, azaz :}$$

$$u=\frac{2}{3}a^3.$$

(3-dik Példa.) Legyen az adott egészlet :

$$u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{acost}\frac{rdrdt}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Ha itt először egészelünk r szerint, lesz :

$$\int\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=-\sqrt{a^2-r^2},$$

ezt pedig $r=acost$ és $r=0$ határok között vévén, nyerjük :

$$\int_0^{acost}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=-a\sqrt{1-cost^2}+a=a(1-sint),$$

minek folytán, egészletünk még így is áll :

$$u=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-sint)dt\text{, ámde :}$$

$$\int(1-sint)dt=\int dt-\int dtsint=t+cost\text{, következőleg}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)dt=\frac{\pi}{2}-1\text{, s így : } u=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Hasonló módon tárgyaltatik pedig e következő egészlet is :

$$u=\iint r dr dt\sqrt{a^2-r^2},$$

még pedig, ha az r szerinti egészlet $a\cos t$ és 0 határok között, a t szerinti egészlet pedig $\frac{\pi}{2}$ és 0 határok között vétetik, akkor e következő eredményre jutunk :

$$u=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

60.) **(Többtagu külzeléki függvények egészelése.)** A többtagu külzeléki függvények legegyszerübb alakja e következő :

$$1)\quad Adx^2+Bdxdy+Cdy^2\,;$$

ez már nem vonalos, hanem egy másodfoku külzeléki függvény, mely, mint látjuk, két, x és y változóktól függ, az A, B, és C együtthatók pedig szintén mind x mind y-nak függvényei.

Vegyük föl, hogy ezen előttünk álló külzeléki függvény, nem $F(x,y)$ függvénynek kétszeres egymásutáni külzelése altal támadt, hanem valamely vonalos külzeléki függvény teljes külzeléke; akkor az említett vonalos külzeléki függvény nyilván e következő alakban fordúlt elő:

$$2)\quad Pdx+Qdy\,,$$

hol tehát P és Q tényezők x és y-nak még ismeretlen függvényei. Ezen utolsó külzeléki függvény tehát más feltétnek nincsen alá vetve, mint csak annak, hogy külzelve, az 1) alatti külzeléki függvényt adja. Ha ezen külzelés valóban véghez vitetik, ered :

$$\frac{dP}{dx}dx^2+\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}\right)dxdy+\frac{dQ}{dy}dy^2,$$

mely kifejezés, hogy azonos legyen az adott 1) alatti kifejezéssel, e következő feltételező egyenleteknek kell állniok :

$$3)\quad \frac{dP}{dx}=A,\quad \frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}=B,\text{ és }\frac{dQ}{dy}=C;$$

ezen három feltételező egyenlet azonban egybevonható az által, ha az ismeretlen P és Q függvényeket belőle kiküszöböljük, mit ezen három egyenlet külzelése által lehet véghezvinni. Mert ha azok elsejét y, másikát pedig x szerint külzeljük, és az így nyert eredményeket egymásból kivonjuk, lesz:

$$\frac{d^2Q}{dx^2}=\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy},$$

ezen egyenlet pedig, ha még egyszer külzeltetik y szerint, a fenebbi 3) alatti egyenletek harmadika pedig kétszer külzeltetik x szerint, és a nyert eredmények megint kivonatnak egymásból, lesz Q eltávolítva, s áll:

$$4)\quad \frac{d^2A}{dy^2}-\frac{d^2B}{dxdy}+\frac{d^2C}{dx^2}=0,$$

s ez azon nevezetes feltételező egyenlet, melynek állnia kell, hogy az 1) alatti külzeléki kifejezés teljes külzeléke legyen a 2) alatti külzeléki kifejezésnek.

Hogy már most az 1) alatti külzeléki függvénynek egészletét lehessen nyerni, e következő eljárás lesz követendő: A 3) alatti egyenletek elseje egészeltessék x szerint, akkor P-re nézve e következő egyenletet fogjuk kapni:

$$5)\quad P=\int Adx+Y,$$

hol Y állandó y-nak valamely függvénye, mely állandót az által találjuk meg, ha ezen egyenletet külzeljük y szerint, s lesz:

$$\frac{dP}{dy}=\int\frac{dA}{dy}dx+\frac{dY}{dy},$$

és a 3) alatti egyenletek másodikának segítségével:

$$\frac{dQ}{dx}=B-\int\frac{dA}{dy}dx-\frac{dY}{dy},$$

ezen egyenletet pedig ha y szerint, a 3) alatti egyenletek harmadikát pedig x szerint részletesen külzeljük, és az így megnyert eredményeket egymásból kivonjuk, ered:

$$0=\frac{dB}{dy}-\frac{dC}{dx}-\int\frac{d^2A}{dy^2}dx-\frac{d^2Y}{dy^2},$$

mely egyenlet Y-nak meghatározására szolgál, áll ugyanis:

$$6)\quad \frac{d^2Y}{dy^2}=\frac{dB}{dy}-\frac{dC}{dx}-\int\frac{d^2A}{dy^2}dx.$$

Hogy pedig Y tisztán csak y-nak függvénye legyen, ezen utolsó egyenlet x szerinti külzelékének 0-nak kell lenni; mivel pedig ezen egyenlet jobb részének x szerinti külzeléke ez:

$$\frac{d^2B}{dxdy}-\frac{d^2C}{dx^2}-\frac{d^2A}{dy^2},$$

látjuk, hogy ez a 4) alatti egyenlet szerint valóban $=0$. Y-nak értéke így meglevén, az 5) alatti egyenletből P függvény ismeretessé válik, Q függvényre nézve pedig áll:

$$7)\quad dQ=\frac{dQ}{dx}dx+\frac{dQ}{dy}dy,$$

mely kifejezés szintén teljesen ismeretes, minthogy áll:

$$8)\quad \frac{dQ}{dx}=B-\int\frac{dA}{dy}dx-\frac{dY}{dy},$$

és a 3) alatti egyenletek utolsója szerint:

$$\frac{dQ}{dy}=C;$$

s így ebből mind azon szabályokat látjuk, melyek szerint egy másodfoku külzeléki függvény egészelhető azon esetre, ha az valamely vonalos külzeléki függvénynek teljes külzeléke.

Hasonló módon kell eljárni azon esetre is, ha az adott külzeléki függvény harmadfoku, melynek általános jelképe ez:

$$Adx^3+Bdx^2dy+Cdxdy^2+Ddy^3,$$

melyben az A, B, C és D tényezők megint mind x-nek mind y-nak függvényei, ennek egészelése pedig nyilván abban áll, hogy az egy másodfoku külzeléki függvényre visszavezetendő, minthogy csak egy olyannak külzeléséből eredhet. Ezen másodfoku függvénynek pedig e következő alakja van:

$$Pdx^2+Qdxdy+Rdy^2;$$

ezen függvénynek x és y szerinti külzeléséből, és a kijövő eredménynek összehasonlításából, a fen adott külzeléki függvénynyel, e következő feltételező egyenleteket fogjuk nyerni:

$$\frac{dP}{dx}=A,\quad \frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}=B,\quad \frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dx}=C,\ \text{és}$$

$$\frac{dR}{dy}=D,$$

melyeket szintén, részletes külzelések által egybe lehet vonni, s ezen egy feltételező egyenlet lesz:

$$\frac{d^3A}{dy^3}-\frac{d^3B}{dy^2dx}+\frac{d^3C}{dydx^2}-\frac{d^3D}{dx^3}=0,$$

melynek állnia kell, hogy az adott külzeléki függvény, teljes külzeléke legyen valamely másod foku külzeléki függvénynek. Egészlete pedig szintúgy találtatik meg, mint az előbbi esetben.

Felvilágosításul e következő példát hozzuk elő :

(Példa.) Az egészelendő függvény legyen :

$$dx^2+(x^2+y^2)dxdy+dy^2,$$

melyet az 1) alatti függvénynyel összehasonlítván, ezt találjuk :

$$A=1,\quad B=x^2+y^2 \text{ és } C=1,$$

mely értékek a 4) alatti feltételező egyenletnek megfelelnek ; áll ugyanis :

$$\frac{d^2A}{dy^2}=0,\quad \frac{d^2B}{dxdy}=0,\quad \text{és}\quad \frac{d^2C}{dx^2}=0,$$

ez tehát valamely vonalos külzeléki függvénynek teljes külzeléke. Továbbá az 5) alatti egyenlet szerint áll :

$$P=\int dx+Y=x+Y,$$

hogy pedig a 6) alatti egyenlet is teljesüljön, áll nyilván :

$$\frac{dB}{dy}=2y,\quad \frac{dC}{dx}=0,\quad \text{és mivel :}\quad \frac{d^2A}{dy^2}=0,$$

lesz : $\int\frac{d^2A}{dy^2}dx=0$, s így kapjuk :

$$\frac{d^2Y}{dy^2}=2y,$$

minek egészelése által nyerjük :

$$\frac{d^2Y}{dy}=2ydy,\quad \text{tehát}\quad \frac{dY}{dy}=y^2+a,\ \text{miből};$$

$$dY=y^2dy+ady,\ \text{következőleg}$$

$$Y=\frac{y^3}{3}+ay+b,$$

hol a és b a két egészelésnek tetszésszerinti állandói. A 8.) alatti egyenletet használván, kapjuk :

$$\frac{dQ}{dx}=x^2+y^2-y^2-a=x^2-a,\quad \text{és}\quad \frac{dQ}{dy}=1,$$

mind ezeknek folytán a 7) alatti egyenletből ered :

$$dQ = x^2dx - adx + dy, \text{ következőleg}$$

$$Q = \frac{x^3}{3} - ax + y + c,$$

hol c az egészelésnek állandója, áll tehát még :

$$P = \frac{y^3}{3} + ay + x + b,$$

s mind ezeket összeszedvén, a $Pdx + Qdy$ kifejezés ebbe megy át :

$$\left(\frac{y^3}{3} + ay + x + b\right)dx + \left(\frac{x^3}{3} - ax + y + c\right)dy,$$

mely azon vonalos külzeléki kifejezés, melynek új külzelése által a fen adott másod foku külzeléki függvényt fogjuk nyerni.

NEGYEDIK FEJEZET.

A KÜLZELÉKI EGYENLETEK EGÉSZELÉSE.

61.) **(Bevezetés.)** Külzeléki egyenletek alatt általánosan véve olyféle egyenleteket kell érteni, melyekben bizonyos $\xi, \eta, \varrho \ldots$ más $x, y, z \ldots$ változóktól függő változó mennyiségek s azoknak különféle külzeléki hányadosai fordúlnak elő. Itt tehát a $\xi, \eta, \varrho \ldots\ldots$ függő, az $x, y, z \ldots\ldots$ pedig független változóknak tekintendők, s így egy külzeléki egyenletnek legáltalánosabb alakja ez volna :

$$F.\left(x, y, z \ldots . \xi, \eta, \varrho \ldots . \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\xi}{dy} \ldots . \frac{d^2\xi}{dx^2} \ldots .\right)=0,$$

miből egyszersmind azt is látjuk, hogy minden külzeléki egyenletben legalább két változónak elő kell fordúlnia, még pedig úgy, hogy ha x és y ezen két változó, y mindig x-nek függvénye legyen.

Egy neme ezen egyenleteknek részlet-külzeléki egyenleteknek is neveztetnek (partielle differential Gleichungen), ha bennök, több változó szerint vett részlet-külzeléki hányadosok fordúlnak elő, mely esetben a legmagasb rendü külzeléki hányados, az egyenlet rendjét határozza meg. Végre vonalosnak neveztetik a külzeléki egyenlet azon esetre, ha a kérdéses egyenlet, a függő változók s azoknak külzeléki hányadosai szerint elrendeztetvén, az előkerülő tagokban a függő változók csak az első vagy semmi hatványon fordúlnak elő, a külzeléki hányadosok bármely rendüek lehetvén. Azon feltét alatt tehát, hogy a külzeléki egyenlet csak két azaz x és y változóval bír, egy n-dik rendü vonalos külzeléki egyenletnek általános alakja ez lesz :

$$X_n\frac{d^ny}{dx^n}+X_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots X_1\frac{dy}{dx}+X_0y=F(x),$$

hol X_n, X_{n-1}, $X_{n-2}\ldots\ldots X_0$ valamint $F(x)$ szinte x-nek valamely függvényei, melyekben tehát semmi y nem fordúl elő. Könnyü azonban belátni, hogy az épen bemutatott vonalos külzeléki egyenletnek alakja még így is állítható elő :

$$\frac{d^ny}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+A_3\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+\ldots\ldots$$

$$A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_ny=X,$$

melyben tehát A_1, A_2, A_3, ... A_n valamint X is x-nek függvényei, de állandó menyiségek is lehetnek.

A külzeléki egyenletek eredetét illetőleg, már a külzeléki hánylat 24)-dik száma alatt megmutattuk, hogy ha $f(x,y)=a$ függvényből az állandó a mennyiséget ki akarjuk küszöbölni, ez csak ezen egyenlet külzelése által történhető, az által pedig mindig egy első rendü külzeléki egyenlet nyeretik. Hasonlóképen ha $f(x,y,a)=0$ egyenletből az állandó a menyiséget ki akarnók küszöbölni, akkor ahhoz már két egyenlet lesz szükséges, még pedig maga az adott egyenlet, s ennek első külzeléki hányadosa, melyek egyikéből az a állándót kikeresvén, és a másikba helyettesitvén, e következő alaku első rendü külzeléki egyenletet fogjuk kapni :

$$F(x,y,y')=0,$$

hol $y'=\frac{dy}{dx}$ az első külzeléki hányados. Ha végre e következő egyenlet adatnék :

$$f(x,y,a,b)=0,$$

melyben, mint látjuk, két, a és b állandó fordúl elő, akkor ezeknek kiküszöbölésére, már egy külzelés nem lesz elégséges, hanem itt kétszeri egymásutáni külzelés lesz szükséges, mi által három egyenletet fogunk nyerni, melyek elégségesek a és b állandók eltávolítására, az által pedig e következő másod rendü külzeléki egyenletre fogunk jutni :

$$F(xy,y',y'')=0,$$

hol $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ a második külzeléki hányados, mely miatt maga az egyenlet is másod rendünek neveztetik. Az eddig mondottakból világosan következik, hogy ha az adott függvényben n állandó fordúlna elő, ezek kiküszöbölésére $(n+1)$ egyenlet is kivántatnék, melyek az adott függvény n-szeres egymásutáni külzelése által nyeretnek, s így ha általánosan véve, e következő függvény adatnék:

$$F(x,y,a,a_1,a_2,a_3 \ldots\ldots a_n)=0,$$

hol tehát $a, a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ az n állandó mennyiség, akkor ennek n-szeres külzelése, és ezen állandók kiküszöbölése által, e következő n-dik rendü külzeléki egyenletre fogunk jutni:

$$F(x,y,y',y'',y''', \ldots\ldots y^{(n)})=0,$$

hol $y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}$ az n-dik külzeléki hányados.

Azon külzeléki egyenletek egészelésének, melyekben csak két, x és y változó, s azoknak első y' lehozatja fordúl elő, czélja abban áll, hogy egy olyféle x és y közötti egyenlet fedeztessék fel, mely által az x és y változók egymástóli függése kellőleg terjesztessék elő, függetlenül az y' hányadostól. Ha tehát az adott egyenletben csak az első külzeléki hányados fordúl elő, az egyenlet tehát csak első rendü, akkor ennek egészelése végett csak egy egészelés lesz szükséges. De már kétszeres egymásutáni egészelés lesz szükséges, mihelyt az adott egyenletben az x és y közötti második külzeléki hányados kerül elő, s így általánosan véve, ha az adott külzeléki egyenletben a legmagasabb volna az n-dik külzeléki hányados, akkor a fen említett x és y közötti egyenlet megtalálására, n-szeres egymásutáni egészelés is volna szükséges, s mivel minden egyes egészelésnek egy állandó felel meg, az n-szeres egymásutáni egészelésnek megfelelő eredményben n állandó mennyiség fog találtatni, mint az a külzeléki egyenlet képezéséből is világosan következik.

Elmélet.

62.) **(A vonalos első rendü külzeléki egyenletek egészelése.)** Az előrebocsátott értelmezés szerint, egy első rendü és első foku külzeléki egyenletnek általános alakja ez:

$$1) \qquad X_1\frac{dy}{dx}+X_0y=F(x),$$

melyben X_1, X_0 és $F(x)$ tisztán csak x-nek függvényei. Ezen egyenlet pedig, teljes első rendü külzeléki egyenletnek mondatik, míg

$$2)\quad X_1\frac{dy}{dx}+X_0y=0$$

megrövidített első rendü külzeléki egyenletnek nevezendő, hol ezen két egyenlet közötti különbség világos.

Általánosabban egy első rendü és első foku külzeléki egyenlet e következő alakban terjeszthető elő :

$$3)\quad P+Q\frac{dy}{dx}=0,$$

melyben P és Q tényezők mind x-nek mind y-nak függvényei, ez tehát még igy is irható :

$$4)\quad Pdx+Qdy=0;$$

ezen egyenlet könnyen lenne egészelhető, mihelyt az a feltételező $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$ egyenletnek megfelelne; de miután mi azt itt fel nem teszszük, ezen egyenletnek egészelése nyilván csak attól függ, hogy a benne előforduló x és y változók egymástól elválasztassanak, mert ennek megtörténtével, e következő alaku egyenletre fogunk jutni :

$$Xdx+Ydy=0,$$

hol X tisztán csak x-nek, Y pedig tisztán csak y-nak függvénye, s így ennek egészelése könnyü, minthogy áll :

$$\int Xdx+\int Ydy=A,$$

melyben A az egészelésnek tetszésszerinti állandója. Ezen szétválasztás azonban sok esetben, nagy nehézségekkel van összekötve, mivel erre nézve semmi általános szabályok nem léteznek, sok esetben pedig a szétválasztás könnyü, mint azt a következő példákból fogjuk látni :

(1-ső Példa.) Adva van :

$$ydx-xdy=0,$$

itt, mint látjuk a szétválasztás könnyü, minthogy, ha ezen egyenlet mind két részét xy-nal elosztjuk, nyerni fogjuk :

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0,\ \text{tehát :}\ \int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}=C,\ \text{avagy :}$$

$$logx-logy=C,\ \text{és rövidebben :}$$

$$log\frac{x}{y}=C,$$

mely egyenlet már a keresett x és y közötti viszonyt terjeszti elő, és az adott külzeléki egyenlet egészletének tekinthető.

(2-dik Példa.) Legyen adva e következő külzeléki egyenlet:

$$\frac{dy}{dx}x-y+b=0;$$

akkor egészletének meghatározására áll:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-b}{x},$$

és ha x és y összrendezőket jelentenek, ezen egyenlet nyilván azon egyenes vonalhoz tartozandik, mely a metszéki tengelyt oly szög alatt metszi, melynek érintője $=\frac{dy}{dx}=a$, mit az utolsó egyenletbe helyettesítvén, nyerni fogjuk:

$$a=\frac{y-b}{x}, \text{ miből: } y=ax+b,$$

s ez az adott külzeléki egyenletnek egészlete, mivel ez által, az említett külzeléki egyenlet azonossá válik, továbbá a tetszésszerinti a állandót tartalmazza magában, mely az adott egyenletben nem foglaltatik, s ennek változtatása által azon részletes egészleteket fogjuk kapni (particulaere Integrale), melyek által az egyenesek egy egész rendszere terjesztetik elő, melyek mind b távolságban metszik egymást a kezdő ponttól számítva, de különféle szögöket képeznek a metszéki tengelylyel.

(3-dik Példa.) Legyen az egészelendő külzeléki egyenlet ez:

$$\frac{dy}{dx}=2x+a, \text{ avagy: } \frac{dy}{dx}-a-2x=0,$$

miből azonnal nyerjük: $dy-adx-2xdx=0$, következöleg

$$y-ax-x^2+b=0,$$

hol b megint a tetszésszerinti állandó. Ha itt is x és y összrendezőket jelentenek, akkor ezen egyenlet nyilván azon hajtalékhoz tartozik, melynek főtengelye az y-nok tengelyéhez párhúzamosan és $\frac{a}{2}$ távolságban fekszik, mint ezt ezen egyenletnek x szerinti feloldásából lehet látni.

(4-dik Példa.) Legyen egészelendő e következő első rendü külzeléki egyenlet:

$$5)\quad dy+Pydx+Qdx=0;$$

ez egyenletben y csak az első hatványon fordúl elő, P pedig és Q tisztán csak x-nek függvényei, mivel ezen egyenletet így is szabad írni:

$$\frac{dy}{dx}+Q+Py=0,$$

s ez az előbbi 1) alatti egyenlettel teljesen megegyezik. Ezen vonalos első rendü külzeléki egyenlet egészelése végett tétessék:

$$y=Xt,\ \text{tehát}\ dy=Xdt+tdX,$$

hol X x-nek határozatlan függvényét, t pedig egy új változót jelent, ennek helyettesítése az adott egyenletben ezt adja:

$$tdX+Xdt+PtXdx+Qdx=0;$$

mivel pedig X, mint fen említtetett, x-nek határozatlan függvénye, szabad lesz azt úgy választani, hogy külön-külön álljon:

$$1)\quad tdX+Qdx=0,\ \text{és}$$
$$2)\quad Xdt+PtXdx=0,$$

minek folytán az utolsó egyenletből nyerjük:

$$\frac{dt}{t}=-Pdx,\ \text{tehát:}\ logt=-\int Pdx,$$

és ha e a természetes logarithmusok alapszáma, lesz:

$$3)\quad t=e^{-\int Pdx},$$

ezen érték pedig a fenebbi 1) alatti egyenletbe tétetvén, ered:

$$dXe^{-\int Pdx}=-Qdx,\ \text{miből:}$$

$$dX=-Qe^{\int Pdx}.dx\quad \text{tehát}\quad 4)\quad X=-\int dx.Qe^{\int Pdx}+C,$$

és ha most t és X-nek megtalált értékei az $y=Xt$ egyenletben helyettesíttetnek, nyerni fogjuk:

$$y=e^{-\int Pdx}\left[-\int dxQe^{\int Pdx}+C\right],$$

mely általános kifejezés már az adott külzeléki egyenlet egészletének tekintendő, minthogy nyilván a keresett x és y közötti viszonyt terjeszti elő. Ezen általános minta segítségével e következő különleges eseteket lehet megfejteni.

(1-ször.) Adva van e következő egyenlet:

$$dy+xydx+axdx=0,$$

mely egyenletet az előbbi általános egyenlettel összehasonlítván, áll: $P=x$ és $Q=ax$, következőleg

$$\int Pdx=\int xdx=\frac{x^2}{2}, \quad \text{s így:} \quad t=e^{-\frac{x^2}{2}};$$

ezeknek folytán találjuk:

$$X=-\int axdx.e^{\frac{x^2}{2}}=-a\int xdx.e^{\frac{x^2}{2}},$$

minek egészelése végett tétessék: $\frac{x^2}{2}=z$, s lesz: $xdx=dz$,

tehát:

$$-a\int xdxe^{\frac{x^2}{2}}=-a\int dze^z=-ae^z=-ae^{\frac{x^2}{2}},$$

s ennek következtében áll:

$$y=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-ae^{\frac{x^2}{2}}+C\right)=-a+Ce^{-\frac{x^2}{2}},$$

mint az adott külzeléki egyenlet keresett egészlete.

(2-szor.) Legyen meghatározandó ezen egyenletnek egészlete

$$dy+ydx-x^2dx=0;$$

lesz nyilván:

$$P=1, \quad \text{és} \quad Q=-x^2, \text{ következőleg}$$

$$\int Pdx=\int dx=x, \quad \text{továbbá:} \quad X=\int x^2dx.e^x,$$

mely utolsó egészlet egy ismert képlet szerint tárgyaltatván, lesz:

$$\int x^2dxe^x=e^x(x^2-2x+2)=X,$$

s mind ezeknek folytán:

$$y=e^{-x}(x^2-2x+2)e^x+Ce^{-x},$$

avagy rövidebben:

$$y=x^2-2x+2+Ce^{-x},$$

mint az adott külzeléki egyenlet egészlete.

(3-szor.) Legyen adva e következő egyenlet:

$$dy+\frac{xydx}{1-x^2}-\frac{adx}{1-x^2}=0,$$

ennek összehasonlítása az általános egyenlettel, adja:

$$P=\frac{x}{1-x^2}, \quad \text{és} \quad Q=-\frac{ax}{1-x^2},$$

miből azonnal kapjuk:

$$\int Pdx=\int\frac{xdx}{1-x^2}=-log\sqrt{1-x^2},$$

ennek folytán áll szintén: mivel $\int Pdx = -log \sqrt{1-x^2} = log(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ tehát $e^{\int Pdx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$e^{\int Pdx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{és} \quad e^{-\int Pdx}=\sqrt{1-x^2},$$

s mind ezeknek helyettesítése által nyerjük:

$$y=\sqrt{1-x^2}\left(a\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+C\right);$$

mivel továbbá könnyü belátni, hogy áll: 70 lap V. egyen. kap.

$$a\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ax}{\sqrt{1-x^2}},$$

a kellő rövidítés megtörténte után lesz:

$$y=ax+C\sqrt{1-x^2},$$

s ez az adott külzeléki egyenlet egészlete.

(4-szer.) Hasonló módon kell eljárni e következő általános egyenlettel is:

$$y^{n-1}dy+Py^n dx+Qdx=0,$$

melyben P és Q megint csak x-nek függvényei. Ezen egyenlet könnyen visszavezethető az előbbi egyenlet alakjára, tévén t. i. $y^n=z$, lesz: $ny^{n-1}dy=dz$, avagy: $y^{n-1}dy=\frac{dz}{n}$, s ennek folytán az adott egyenlet e következő alakba megy át:

$$\frac{dz}{n}+Pzdx+Qdx=0,$$

mely minthogy a fenebbi általános egyenlettel azonos, egészelése szinte ugyanazon szabályok szerint véghez vihető.

(5-ször.) Az adott külzeléki egyenlet legyen:

$$dy-ydx-e^x dx=0,$$

akkor ezt a fenebbi 5) alatti egyenlettel összehasonlítván, áll:

$P=-1,\ Q=-e^x$, következőleg $\int Pdx=-\int dx=-x$,

s ennek folytán :

$$y=e^x\left(\int dx+C\right)=e^x(x+C).$$

Hasonló módon találjuk meg e következő egyenlet egészletét is:

$$dy+ydx-e^x dx=0,$$

melyre nézve áll :

$$y=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}.$$

Ha pedig a külzeléki egyenlet e következő alakban fordulna elő :

$$dy+ydxf(x)=0,$$

mely az előbbi 2) alatti egyenlettel ugyanaz, akkor ezt egészelése végett y-nal elosztván, áll :

$$\frac{dy}{y}+dxf(x)=du,\quad \text{tehát :}$$

$$logy+\int dxf(x)=u,\quad \text{avagy :}$$

$$logy+loge^{\int f(x)dx}=u,\ \text{mit így is írhatni :}$$

$$u=logy.e^{\int f(x)dx}$$

minthogy az adott kifejezés $\frac{1}{y}$ szorzóval szoroztatván egészelhetővé vált. Ha például adatnék :

$$dy+yx^2dx=0,\quad \text{lesz :}$$

$$\frac{dy}{y}+x^2dx=0,\quad \text{tehát :}\quad logy+\frac{x^3}{3}=C,\ \text{miből :}$$

$$y=Ae^{-\frac{x^3}{3}},$$

hol A a tetszésszerinti állandó, melynek változtatásától függenek a részlet-egészletek értékei.

Végre helyettesítés által, e következő egyenletet lehet egészelni :

$$dy+f\left(\frac{y}{x}\right)dx=0;$$

mert ha itt az $\frac{y}{x}=z$ helyettesítés vitetik véghez, mely esetben lesz : $y=xz$, következőleg $dy=xdz+zdx$, akkor az adott egyenlet ebbe megy át :

$$xdz+zdx+f(z)dx=0, \text{ avagy :}$$
$$xdz+dx(z+f(z))=0, \text{ miből :}$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{dz}{z+f(z)}=0, \text{ tehát : } \quad logx+\int\frac{dz}{z+f(z)}=C.$$

Lássuk e következő példák megfejtését :

(1-ső Példa.) Az egészelendő egyenlet legyen ez :

$$\frac{xydy+y^2dx}{x^2y^2+a^4}=\frac{d.f(y)}{a^2},$$

akkor ezt még így is szabad írni :

$$\frac{y(xdy+ydx)}{x^2y^2+a^4}=\frac{d.f(y)}{a^2},$$

mivel pedig : $xdy+ydx=d.(xy)$, áll még :

$$\frac{y.d.(xy)}{x^2y^2+a^4}=\frac{d.f(y)}{a^2},$$

ide pedig $xy=az$ tétetvén, lesz $d.(xy)=adz$, és $x=\frac{az}{y}$, miknek helyettesítéséből ered :

$$\frac{adz}{a^2+z^2}=\frac{df(y)}{y}, \text{ avagy } \quad y\left(\frac{df(y)}{y}-\frac{adz}{a^2+z^2}\right)=0, \text{ miből :}$$

$$\int\frac{d.f(y)}{y}-arctg.\frac{z}{a}=C;$$

a még hátra levő egészlet, minthogy $f(y)$ tisztán y-nak függvénye, ha $f(y)$ adatik, könnyen egészelhető.

(2-dik Példa.) Adva van e következő egyenlet :

$$bydx-\frac{a^3dx}{x}=aydy, \text{ avagy :}$$

$$y(bdx-ady)=\frac{a^3dx}{x},$$

ebben pedig teendő : $bx-ay=az$, minthogy $(bdx-ady)=d.(bx-ay)$, s áll : $bdx-ady=adz$, miből :

$$dy=\frac{bdx-adz}{a} \quad \text{tehát} \quad y=\frac{bx-az}{a},$$

s ennek folytán :

$$bxdz-azdz=\frac{a^3dx}{x};$$

itt továbbá teendő : $zdz=a^2\frac{ds}{s}$, s lesz :

$$bxdz=a^3\left(\frac{ds}{s}+\frac{dx}{x}\right)=a^3\left(\frac{xds+sdx}{sx}\right), \text{ avagy :}$$

$$bxdz=a^3.\frac{d(xs)}{xs};$$

végre $xs=v$ tétetvén, lesz : $x=\frac{v}{s}$, s ered :

$$\frac{bvdz}{s}=a^3.\frac{dv}{v}, \text{ avagy } \frac{bdz}{s}=a^3.\frac{dv}{v^2};$$

mivel pedig s változó z-nek függvénye, mint a fenebbi egyenletből látható, a változók itt elválasztottaknak tekintendők, s így az egészelés lehetséges.

63.) **(Az egészelő szorzónak felfedezése.)** Minthogy két változóval bíró külzeléki egyenletek mindig e következő alakban fordúlnak elő :

$$1).\quad Pdx+Qdy=0,$$

ennek egészelésénél szükségképen két eset állhat be : ez t. i. vagy két változóval bíró függvénynek teljes külzeléke, s ez esetben a feltételező $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$ egyenletnek felel meg, és az előrebocsátott szabályok szerint lesz egészelhető ; vagy pedig valamely két változóval bíró függvénynek nem teljes külzeléke ez, mely esetben a fen előhozott feltételező egyenletnek sem felel meg, és mint tiszta külzeléki egyenlet lesz egészelendő. Itt pedig nem gyéren azon eset fordúl elő, hogy ámbár az adott külzeléki egyenlet valamely függvénynek nem teljes külzeléke, létezik mind a mellett egy olyféle szorzó, melylyel az adott egyenlet szoroztatván, teljes külzelékké válik, s így az ismert szabályok szerint egészelhető, és a dolog úgy tekinthető, mintha ezen szorzó, az adott függvény külzelésénél valami módon elveszett volna. Hogy az eddig mondottakat annál jobban meg lehessen érteni, az adott és külzelendő függvény legyen :

$$\frac{y}{x}=a,$$

akkor teljes külzeléke lesz :

$$=\frac{xdy-ydx}{x^2}=0,$$

s ez nyilván teljes külzelék; de mivel ezen egyenlet még így is irható :

$$xdy-ydx=0,$$

ez már teljes külzelék nem lesz, minek oka nyilván abban áll, hogy az $\frac{1}{x^2}$ szorzó eltünt; mihelyt azonban az utolsó egyenlet ezen szorzóval szoroztatik, azonnal teljes külzelékké válik, és könnyen egészelhető. Még világosabbá válik a dolog, ha az adott egyenletet így irjuk :

$$y-ax=0, \text{ miből : } dy-adx=0,$$

mely kifejezés nyilván teljes külzelék; de mihelyt belőle az állandó a szorzót kiküszöböljük, nyerni fogjuk :

$$ydx-xdy=0,$$

s ez már nem teljes külzelék, valamint az előbbi sem.

Az eddig mondottakból következik, hogy ha az adott és két változóval bíró függvényben egy állandó szorzó fordúl elö, és ezen szorzót az adott függvény s ennek első külzeléki hányadosa között kiküszöböljük, akkor az így eredő külzeléki egyenlet már nem lesz teljes külzeléke valamely függvénynek. Még e következő példa ennek felvilágosítására szolgálhat :

Az adott függvény : $y^2-2a(x+y)=0$,
ha ezt külzeljük, nyerni fogjuk :

$$ydy-a(dx+dy)=0;$$

mivel pedig az adott egyenletből kapjuk :

$$a=\frac{y^2}{2(x+y)},$$

ennek helyettesítése az utolsó egyenletben adja :

$$ydy-\frac{y^2(dx+dy)}{2(x+y)}=0,$$

avagy rövidebben :

$$2) \quad (2x+y)dy-ydx=0,$$

mely kifejezés már nem teljes külzeléke valamely függvénynek; ha azonban a fen talált $a=\frac{y^2}{2(x+y)}$ egyenletet külzeljük, e következő eredményre fogunk jutni:

$$0=[(2x+y)dy-ydx]\frac{y}{2(x+y)},$$

mely kifejezés már teljes külzelék, miről az ismert feltételező egyenlet segítségével meg lehet győződni; az utolsó kifejezésből tehát látjuk, hogy $\frac{y}{2(x+y)}$ az úgynevezett egészelő szorzó, minthogy ha vele a fenebbi 2) egyenletet szorozzuk, az nyilván egészelhetővé válik.

Meglévén így ezen tárgyról a kellő fogalom, csak az van még hátra, megmutatni, vajjon ezen egészelő szorzó minden előforduló esetben meghatározható-e vagy nem, és ha lehetséges azt meghatározni, mi módon kell e tárgyban eljárni? Legyen e végre e következő általános egyenlet adva:

$$Pdx+Qdy=0,$$

melyről felteszszük, hogy nem teljes külzelék, de olyanra átváltoztatható, mihelyt azt bizonyos μ szorzóval szorozzuk; akkor

$$\mu Pdx+\mu Qdy=0 \text{ kifejezés}$$

már teljes külzeléke lesz valamely függvénynek, ha pedig az, akkor μP és μQ az x és y szerinti első külzeléki hányadosok lesznek s ezen egyenletnek kell állnia:

$$\frac{d.(\mu P)}{dy}=\frac{d.(\mu Q)}{dx},$$

és ha az itt kijelentett külzelés valóban véghez vitetik, lesz:

$$\frac{Pd\mu}{dy}+\mu\cdot\frac{dP}{dy}=Q\frac{d\mu}{dx}+\mu\frac{dQ}{dx},$$

s miután μ szorzó kerestetik, áll szintén:

$$3). \quad P\cdot\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dx}+\mu\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0.$$

Ha már most lehetséges volna, μ szorzót ezen egyenletből minden esetre nézve meghatározni, akkor minden első rendü és első foku külzeléki egyenletet, teljes külzelékre átváltoztatni lehetséges volna, s így annak egészelése semmi nehézséggel sem járna. Mivel azonban az sok esetben nem csak nehéz, hanem sokszor lehetetlen, különösen pedig, ha μ szorzó mindkét változótól függ: azért a fenebbi képletnek hasznát venni csak könnyebb esetekben lehetséges, mely esetek akkor állnak be, ha μ szorzó csak egy változótól, például x-től függ, mert akkor μ-nek y szerinti külzeléke lesz elenyésző, és a fenebbi 3) egyenlet ebbe megy át:

$$Q\frac{d\mu}{dx}=\mu\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right), \text{ miből:}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{dx}{Q}\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right);$$

miből továbbá következik az is, hogy dx-nek szorzója tisztán csak x függvényének tekintendő, s így szabad tenni

$$4)\qquad \frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=X, \text{ következőleg}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=Xdx, \text{ és } log\mu=\int Xdx,$$

s így az ismert eljárás szerint:

$$\mu=e^{\int \mathrm{X}d\mathrm{x}},$$

hol e a természetes logarithmusok alapszáma. Ha pedig μ szorzó csak y-nak függvénye volna, akkor μ-nek x szerinti külzeléke lesz elenyésző, és a fenebbi 3) egyenlet így állna:

$$P\frac{d\mu}{dy}=\mu\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right), \text{ miből:}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{dy}{P}\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right),$$

s mivel dy-nak tényezője tisztán csak y-nak függvénye, szabad lesz tenni:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)=Y, \text{ következőleg}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=Ydy, \text{ és } log\mu=\int Ydy, \text{ avagy:}$$

$$\mu=e^{\int \mathrm{Y}d\mathrm{y}}.$$

Példa gyanánt tekintessék e következő egyenlet:

$xdy-ydx=0$; áll: $Q=x$ és $P=-y$, következőleg

$$\frac{dQ}{dx}=1, \text{ és } \frac{dP}{dy}=-1,$$

a fenebbi 4) egyenlet szerint tehát nyerni fogjuk:

$$X=-\frac{2}{x},$$ s ennek folytán :

$$log\mu=-2\int\frac{dx}{x}+logC,$$ avagy :

$$log\mu=-logx^2+logC=log\frac{C}{x^2},$$ tehát $\mu=\frac{C}{x^2}$,

s valóban, ha a fen adott külzeléki egyenletet ezen szorzóval szorozzuk, nyerni fogjuk : $\frac{(ydx-xdy)C}{x^2}$, s ez, mint tudjuk, már $C\frac{y}{x}$ függvénynek teljes külzeléke.

Legyen adva továbbá még e következő egyenlet :

$$dx+(adx+2bydy)\sqrt{1+x^2}=0,$$

melyben áll :

$$P=1+a\sqrt{1+x^2},$$ és $Q=2by\sqrt{1+x^2}$, miből :

$$\frac{dP}{dy}=0,$$ és $\frac{dQ}{dx}=\frac{2bxy}{\sqrt{1+x^2}}$, következőleg

$$X=-\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx}=-\frac{x}{1+x^2},$$

s ennek folytán nyerjük :

$$log\mu=-\int\frac{xdx}{1+x^2}=-log\sqrt{1+x^2}=log\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

végre $\mu=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, mely kifejezéssel ha a fen adott egyenletet szorozzuk, lesz :

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+adx+2bydy=0,$$

s ez már teljes külzelék egészlete nyilván ez :

$$ax+by^2+log(x+\sqrt{1+x^2})=C,$$

hol C a tetszésszerinti állandó.

Nem lesz felesleges, még egy pár olyféle esetet előhozni, melyekben μ szorzó mind x- mind y-nak függvénye ; az általános egyenletet így írván :

$$\mu(Pdx+Qdy)=du,$$

azon feltét alatt t. i. hogy ezen egyenlet bal része u függvénynek teljes külzeléke, akkor ebből ered :

$$\frac{du}{\mu}=0,$$

mely egyenlet áll, akár $du=0$, tehát $u=C$, akár $\frac{1}{\mu}=0$. Például vegyük fel :

$$xdy-ydx=0\text{, avagy :}$$

$$xy\left(\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}\right)=xy.d.(logy-logx)=xy.du,$$

miből : $\frac{1}{\mu}=xy$, tehát $u=\frac{1}{xy}$, azaz, hogy az adott külzelék egészelhető legyen, azt csak $\frac{1}{xy}$ szorzóval kell szorozni, lesz tehát :

$$u=logy-logx=C,\quad\text{avagy : } \frac{y}{x}=C,\quad\text{mint előbb.}$$

Legyen adva még $dy\sqrt{x}-dx\sqrt{y}=0$ egyenlet; akkor ezt így is írhatni :

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}(dy\sqrt{x}-dx\sqrt{y})=\frac{dy}{\sqrt{y}}-\frac{dx}{\sqrt{x}}=du,\quad\text{tehát}$$

$$u=2(\sqrt{y}-\sqrt{x})=C,\quad\text{miből :}$$

$$y=(C+\sqrt{x})^2,$$

itt tehát $\frac{1}{\mu}=\sqrt{x}\sqrt{y}$, következőleg $\mu=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$, mely szorzóval az adott egyenletet szorozván, az egészelhetővé válik.

Ha pedig e következő egyenlet lenne egészelendő :

$$dy-ydxlogy=0,$$

akkor könnyü belátni, hogy ha ezt $\frac{1}{ylogy}$ szorzóval szorozzuk, ez nyilván egészelhetővé válik; minthogy áll :

$$\frac{dy}{ylogy}-dx=\frac{d.logy}{logy}-dx=0,$$

és ezt valóban egészelvén, lesz :

$$log.logy=x+C,\quad\text{miből :}$$

$$logy=e^{x+C}=C'.e^x.$$

64.) **(Az egynemü külzeléki egyenletek egészelése.)** Egynemü külzeléki egyenleteknek azok neveztetnek, melyeknek minden tagjában, az x és y változók kitevőinek összege ugyanaz, így e következő kifejezésben:

$$x^2dx+xydy+y^2dy=0,$$

látjuk, hogy x és y változók kitevőinek összege minden tagban $=2$, s ennélfogva ezen külzeléki egyenlet egynemünek tekintendő. Egészelése szintén x és y változók elválasztásától függ, melyet $y=xt$ helyettesítés által mindig lehet eszközölni, ezen helyettesítés t. i. adja:

$$x^2dx+x^2t(xdt+tdx)+x^2t^2(xdt+tdx)=0,$$

mely kifejezésben t egy új változót jelent, melynek értéke $=\frac{y}{x}$. Ezen utolsó kifejezés még így is írható:

$$dx(1+t^2+t^3)+xdt(t+t^2)=0, \quad \text{miből:}$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{(t+t^2)dt}{1+t^2+t^3}=0,$$

mely kifejezésnek könnyü egészelése által kapjuk:

$$logx+\int\frac{(t+t^2)dt}{1+t^2+t^3}=C,$$

hol C a tetszésszerinti állandó. Mivel az itt előforduló egészlet az előbbi szabályok szerint könnyen meghatározható: ha ennek megtörténte után t helyébe x és y által kifejezett érték helyettesíttetik, az adott egyenletnek teljes egészlete meglesz.

Ugyanazt általánosan véve is meg lehet állapítni, még pedig úgy, hogy az adott külzeléki egyenlet ez legyen:

$$Pdx+Qdy=0,$$

mely egyenlet egynemü lesz azon esetre, ha x és y-nak P és Q által jelölt függvényei egynemüek és ugyanazon fokuak lesznek, mely esetben szabad lesz tenni:

$$P=x^\alpha\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{és} \quad Q=x^\alpha\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

mi által egyenletünk e következőbe megy át:

$$x^\alpha.\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+x^\alpha\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy=0,$$

itt pedig $y=xt$ tétetvén, lesz $dy=xdt+tdx$, s ennek folytán az utolsó egyenlet így áll:

$$\varphi(t)dx+\psi(t)(xdt+tdx)=0, \quad \text{avagy:}$$

$$dx+\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}(xdt+tdx)=0,$$

mivel pedig szabad tenni : $\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=f(t)$, áll még :

$$dx[1+tf(t)]+xf(t)dt=0\text{, miből :}$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{f(t)dt}{1+tf(t)}=0,$$

és ha $f(t)$ helyébe az eredeti érték visszahelyeztetik, lesz :

$$\frac{dx}{x}+\frac{\psi(t)dt}{\varphi(t)+t\psi(t)}=0,$$

hol látjuk, hogy a változók már szétválasztvák, s így az egészelés sem jár semmi nehézséggel, áll ugyanis :

$$logx+\int\frac{\psi(t)dt}{\varphi(t)+t\psi(t)}=C,$$

s ez az adott egyenletnek általános egészlete, melyet teljesen meg lehet határozni, mihelyt $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ függvények helyébe határozott kifejezések tétetnek ; az egészelés megtörténte után, megint t helyébe x és y-ban kifejezett érték helyettesíthető. Lássuk e következő példák tárgyalását :

(1-ső Példa.) Az adott egyenlet e következő :

$$(x-2y)dx+ydy=0,$$

melyben $y=tx$ tétetvén, lesz $dy=xdt+tdx$, s áll :

$$(x-2tx)dx+xt(xdt+tdx)=0\text{, avagy :}$$

$$dx(1-2t+t^2)+xtdt=0\text{, miből :}$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{1-2t+t^2}=0,$$

hol a változók már elválasztvák, egészelvén tehát lesz :

$$logx+\int\frac{tdt}{1-2t+t^2}=A,$$

hol A az egészelésnek tetszésszerinti állandója. További eljárás végett, áll :

$$\int\frac{tdt}{1-2t+t^2}=\int\frac{tdt}{(1-t)^2},$$

mivel pedig tudjuk, hogy áll :

$$\frac{t}{(1-t)^2}=\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{1-t},$$

ennek helyettesítése adja :

$$\int\frac{tdt}{(1-t)^2}=\int\frac{dt}{(1-t)^2}-\int\frac{dt}{1-t}=\frac{1}{1-t}+log(1-t),$$

s így áll e következő egyenlet :

$$logx+\frac{1}{1-t}+log(1-t)=A,$$

és ha t helyébe $\frac{y}{x}$ érték visszahelyeztetik, lesz :

$$logx+\frac{x}{x-y}+log\frac{x-y}{x}=A,$$

mit ekkép is lehet írni :

$$\frac{x}{x-y}+log(x-y)=A,\text{ miből : } log(x-y)=A-\frac{x}{x-y},$$

és ha e a természetes logarithmusok alapszáma, lesz még :

$$x-y=e^{A}.e^{-\frac{x}{x-y}},\text{ avagy : } x-y=A'e^{-\frac{x}{x-y}},$$

mint az adott külzeléki egyenlet általános egészlete.

(2-dik Példa.) Legyen az adott külzeléki egyenlet ez:

$$(x^2+xy-2y^2)dx+(y^2-3x^2)dy=0,$$

melyben a fen említett helyettesités véghezvitetvén, a kellő összevonás megtörténte után nyerni fogjuk :

$$\frac{dx}{x}+\frac{(t^2-3)dt}{t^3-2t^2-2t+1}=0,$$

miből egészelés által kapjuk :

$$logx+\int\frac{(t^2-3)dt)}{t^3-2t^2-2t+1}=A.$$

Hogy az itt előforduló egészlet meghatároztassék, azt kell megjegyeznünk, hogy ezen kifejezés nevezője $(t+1)$ szorzót foglalja magában, melylyel ha az osztás véghez vitetik, (t^2-3t+1) másodfoku szorzót fogunk nyerni, s így áll még :

$$\int\frac{(t^2-3)dt}{t^3-2t^2-2t+1}=\int\frac{(t^2-3)dt}{(t+1)(t^2-3t+1)};$$

mivel pedig könnyü belátni, hogy áll :

$$t^2-3t+1=\left(t-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\text{ áll szintén :}$$

$$\frac{t^2-3}{t^3-2t^2-2t+1}=-\frac{2}{5(t+1)}+$$

$$\frac{7-\sqrt{5}}{5(2t-3-\sqrt{5})}+\frac{7+\sqrt{5}}{5(2t-3+\sqrt{5})},$$

mely egyenletet dt-vel szorozván és egészelvén, nyerjük :

$$\int\frac{(t^2-3)dt}{t^3-2t^2-2t+1}=\frac{2}{5}log(t+1)+\frac{7}{10}log(t^2-3t+1)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}log\frac{2t-3+\sqrt{5}}{2t-3-\sqrt{5}},$$

az adott külzeléki egyenletnek t-ben kifejezett egészlete tehát lesz :

$$logx+\frac{2}{5}log(t+1)+\frac{7}{10}log(t^2-3t+1)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}log\frac{2t-3+\sqrt{5}}{2t-3-\sqrt{5}}=logA,$$

hol A a tetszésszerinti állandó. E kifejezésben ha t helyébe x és y-ban kifejezett érték tétetik, ered :

$$\frac{2}{5}log\frac{y+x}{x^2}+\frac{7}{10}log(y^2-3xy+x^2)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}log\frac{2y-3x+x\sqrt{5}}{2y-3x-x\sqrt{5}}=logA,$$

mely egyenlet végre még így is terjeszthető elő :

$$\left(\frac{y+x}{x^2}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot(y^2-3xy+x^2)^{\frac{7}{10}}\cdot\left(\frac{2y-3x+x\sqrt{5}}{2y-3x-x\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}=A,$$

s ez az adott egyenlet teljes egészletének tekintendő.

(3-ik Példa.) Legyen egészelendő e következő egyenlet :

$$xdy-ydx=dx\sqrt{x^2+y^2};$$

ebben ha y helyébe a fen említett érték tétetik, ered :

$$xdt=dx\sqrt{1+t^2}\text{, miből :}$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=0\text{, következőleg}$$

$$logx-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=A\text{, avagy :}$$

$$logx-log(t+\sqrt{1+t^2})=logA,$$

minthogy könnyü belátni, hogy az állandónak itt szintén logarithmusnak kell lenni. Ha pedig még t helyébe is az eredeti értéket helyettesítjük, nyerni fogjuk :

$$logx-log\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=logA\text{, avagy :}$$

$$logx^2-log(y+\sqrt{x^2+y^2})=logA,$$

mit így is írhatni :

$$log\cdot\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}=logA,$$

s ennek folytán áll szintén :

$$\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}=A,$$

itt pedig a végszerütlenséget a nevezőből eltüntetvén, nyerni fogjuk :

$$-y+\sqrt{x^2+y^2}=A, \text{ avagy : } \sqrt{x^2+y^2}=A+y,$$

miből : $x^2-2Cy=C^2$,

s ez az adott külzeléki egyenlet teljes egészlete.

(4-dik Példa.) Legyen adva általánosan :

$$(ax+by)dx+(cx+ky)dy=0;$$

minthogy ez is egynemü külzeléki egyenlet, $y=xt$ helyettesítés adja :

$$xdx(a+bt+ct+kt^2)+x^2dt(c+kt)=0, \text{ avagy :}$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{dt(c+kt)}{a+(b+c)t+kt^2}=0,$$

minek egészlete lesz :

$$logx+\int\frac{dt(c+kt)}{a+(b+c)t+kt^2}=A;$$

a még hátra levő egészlet meghatározására, tétessék :

$$a+(b+c)t+kt^2=0,$$

nyerni fogjuk ebből

$$t=-\frac{b+c}{2k}\pm\frac{1}{2k}\sqrt{(b+c)^2-4ak};$$

t-nek ezen két értékét, ha α és β-val jelöljük, lesz $t=\alpha$ és $t=\beta$, tehát $t-\alpha=0$ és $t-\beta=0$ azon két egyszerü szorzó, melyekre a kérdéses egészlet nevezője bontható ; s most írhatjuk :

$$\frac{c+kt}{a+(b+c)t+kt^2}=\frac{c+kt}{(t-\alpha)(t-\beta)}=\frac{A}{t-\alpha}+\frac{B}{t-\beta},$$

miből könnyü módon találjuk ezt :

$$A=\frac{c+k\alpha}{\alpha-\beta}, \quad \text{és} \quad B=\frac{c+k\beta}{\beta-\alpha},$$

mind ezeknek folytán tehát áll :

$$\frac{dx}{x}+\frac{Adt}{t-\alpha}+\frac{Bdt}{t-\beta}=0,$$

mit egészelvén, kapjuk :

$$logx+Alog(t-\alpha)+Blog(t-\beta)=C, \text{ avagy :}$$

$$logx+Alog\frac{(y-\alpha x)}{x}+Blog\frac{y-\beta x}{x}=C.$$

Ha már most még az is tekintetbe vétetik, hogy $A+B=k$ akkor az utolsó egyenlet ebbe megy át :

$$logx^{1-k}+log(y-\alpha x)^{A}+log(y-\beta x)^{B}=C,$$

és ha $k=1$, ezen egészletet így is lehet írni :

$$(y-\alpha x)^{A}.(y-\beta x)^{B}=C.$$

65.) **(Az $(a+mx+ny)dx+(b+px+qy)dy=0$ egyenlet egészelése.)** Ezen egyenletnek első megtekintéséből láthatni, hogy ez nem egynemü, tehát egynemü egyenletek egészelési szabálya szerint sem egészelhető; lehetséges azonban ezt egynemüvé átalakítni, még pedig e következő helyettesítés által:

$$x=t+\alpha, \text{ és } y=u+\beta, \text{ lesz } dx=dt \text{ és } dy=du,$$

t és u két új változót jelentvén. Ezeknek helyettesítése a fen adott egyenletben, azt e következő alakra hozandja :

$$(a+mt+m\alpha+nu+n\beta)dt+(b+pt+p\alpha+qu+q\beta)du=0\,;$$

már pedig könnyü belátni, hogy az α és β mennyiségek mindig úgy választhatók, hogy külön-külön álljon :

$$a+m\alpha+n\beta=0. \text{ és } b+p\alpha+q\beta=0,$$

mely egyenletek elégségesek α és β mennyiségek meghatározására, ugyanis a kiküszöbölési mód szerint találjuk :

$$\alpha=\frac{bn-aq}{mq-np}, \text{ és } \beta=\frac{ap-mb}{mq-np},$$

ha pedig ezen értékekkel bírnak az α és β mennyiségek, a fenebbi egyenlet e következőbe megy át :

$$(mt+nu)dt+(pt+qu)du=0,$$

mely, mint látjuk, már egynemü, tehát az előbbi szabályok szerint egészelhető; az egészelés megtörténte után pedig u és t helyébe x és y-ban kifejezett értékek teendők.

Egyetlen egy esetet mégis tekintetbe kell vennünk, mely akkor áll be, ha α és β-nak értékeiben $mq=np$ volna, mi állván, mind α mind β végtelenné válik, ezen értékek tehát nem

volnának használhatók; azonban ez esetben áll szintén : $q=\frac{np}{m}$,
s ennek folytán :

$$px+qy=\frac{p}{m}(mx+ny),$$

minek helyettesítése által, az adott egyenlet ebbe megy át :

$$adx+bdy+(mx+ny)\left(dx+\frac{p}{m}dy\right)=0,$$

melyben a változók szétválasztása, e következő helyettesítés által vitetik véghez :

$$mx+ny=z, \quad \text{s lesz} \quad y=\frac{z}{n}-\frac{mx}{n}, \quad \text{tehát :}$$

$$dy=\frac{dz}{n}-\frac{mdx}{n},$$

minek helyettesítése által kapjuk :

$$adx+b\frac{dz}{n}-\frac{mbdx}{n}+z\left(dx+\frac{pdz-mpdx}{mn}\right)=0,$$

miből kevés összevonás után nyerjük :

$$dx+\frac{dz(bm+pz)}{amn-m^2b+(mn-mp)z}=0,$$

hol a változók már szétválasztvák, tehát az egészelés is könyynyen véghez vihető. Azon esetre, ha $mn=mp$, az utolsó kifejezés ebbe megy át :

$$dx+\frac{bmdz+pzdz}{amn-m^2b}=0, \quad \text{tehát} \quad x+\frac{bmz+\frac{1}{2}pz^2}{amn-m^2b}=C,$$

hol csak z helyébe x és y-ban kifejezett érték teendő, s meglesz az egészlet, ezen esetre nézve. Példa gyanánt, vegyük egészelendőnek e következő egyenletet :

$$(1+2x+3y)dx+(2+3x+4y)dy=0, \text{ áll ;}$$

$$a=1,\ m=2,\ n=3,\ b=2,\ p=3 \text{ és } q=4,$$

mely értékek folytán kapjuk : $\alpha=-2$, és $\beta=1$, ha tehát az adott egyenletben tétetik : $x=t-2$, és $y=u+1$, nyerni fogjuk :

$$(2t+3u)dt+(3t+4u)du=0,$$

mely egyenlet; az előbbi szám 4-dik példájában előhozott egyenlettel ugyanaz, és ezen egyenletek összehasonlításából következik :

$$a=2,\ b=3,\ c=3,\ \text{és}\ k=4,$$

továbbá t és u teendő x és y helyébe, ha tehát itt $u=vt$, s így $du=vdt+tdv$, akkor ezeknek helyettesítése adja:

$$\frac{dt}{t}+\frac{dv(3+4v)}{2(1+3v+2v^2)}=0,$$

s ennek egészelése által

$$logt+\frac{1}{2}\int\frac{dv(3+4v)}{1+3v+2v^2}=C;$$

mivel pedig látjuk, hogy $(3+4v)$ nem egyéb, mint a nevező első külzeléki hányadosa, tévén $1+3v+2v^2=s$, lesz:

$$ds=dv(3+4v),$$

következőleg

$$\frac{1}{2}\int\frac{dv(3+4v)}{1+3v+2v^2}=\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s}=\frac{1}{2}logs,$$

s így nyerni fogjuk:

$$logt+\frac{1}{2}log(1+3v+2v^2)=logC,\ \text{avagy:}$$

$$t\sqrt{1+3v+2v^2}=C,$$

mivel pedig: $t=x+2$, és $u=y-1$, tehát $v=\frac{y-1}{x+2}$, áll még:

$$\sqrt{(x+2)^2+3(y-1)(x+2)+2(y-1)^2}=C,$$

s ez azon eredeti viszony x és y között, melynek folytán a fölvett külzeléki egyenlet áll.

66.) **(Nem egynemü első rendü és első foku egyenletek egészelése.)** Az egyenletek ezen osztályában csak azokat fogjuk tekintetbe venni, melyeknek egészelése könnyebb, ezek pedig azok, melyek csak két tagból állanak, és e következő általános alakban fordúlnak elő:

$$Au^az^cdz=Bu^kz^\delta du,$$

melyből osztás által nyerjük:

$$Az^{c-\delta}dz=Bu^{k-a}du,\ \text{miből}\ A\int z^{c-\delta}dz-B\int u^{k-a}du=C,$$

avagy:

$$A.\frac{z^{c-\delta+1}}{c-\delta+1}-B.\frac{u^{k-a+1}}{k-a+1}=C,$$

miből tehát látjuk, hogy ilyféle kéttagu egyenletek egészelése semmi nehézséggel nem jár; de nem úgy áll a dolog, ha az adott egyenletben három tag fordúl elő, mint azt a következő általános alakból lehet látni :

$$Au^a z^c dz + Bu^\delta z^k du = Du^v z^w du,$$

hol tehát u függő, z pedig független változónak tekintendő. Mielőtt ezen egyenlet egészeléséről valamit mondani lehessen, szükség lesz azt egyszerübb alakra hozni, mi az által elérhető, ha annak mind két részét $Au^a z^c$-vel elosztjuk ; ezen osztás eredménye lesz :

$$1) \quad z^{c-w}dz + \frac{B}{A}u^{\delta-a}z^{k-w}du = \frac{D}{A}u.^{v-a}du,$$

most pedig tétessék :

$$\frac{z^{c-w+1}}{c-w+1} = \frac{y}{c-w+1}, \text{ továbbá } \frac{u^{\delta-a+1}}{\delta-a+1} = \frac{x}{\delta-a+1},$$

$$\text{s lesz : } \quad z = y^{\frac{1}{c-w+1}}, \text{ és } \quad u = x^{\frac{1}{\delta-a+1}},$$

s ezen két érték folytában

$$z^{k-w} = y^{\frac{k-w}{c-w+1}}, \text{ és } u^{\delta-a} = x^{\frac{\delta-a}{\delta-a+1}},$$

ezekből pedig nyerjük :

$$du = \frac{dx}{\delta-a+1}.x^{-\frac{\delta-a}{\delta-a+1}},$$

miket a fenebbi 1) alatti egyenletben helyettesítvén, lesz :

$$\frac{dy}{c-w+1} + \frac{B}{A}.\frac{dx}{\delta-a+1}.y^{\frac{k-w}{c-w+1}} = \frac{D}{A(\delta-a+1)}x^{\frac{v-\delta}{v-a+1}}dx,$$

ha pedig itt rövidség okáért tétetik :

$\frac{B(c-w+1)}{A(\delta-a+1)} = b$, $\frac{D(c-w+1)}{A(\delta-a+1)} = a'$, és $\frac{k-w}{c-w+1} = n$, végre $\frac{v-\delta}{v-a+1} = m$, akkor az utolsó egyenlet ebbe megy át :

$$2) \quad dy + by^n dx = a'x^m dx,$$

ez pedig azon legszerübb alak, melyre három tagból álló, nem egynemü külzeléki egyenletek vissza-vezethetők, és ha ezt egészelni tudnók, a kérdéses nemü egyenletek egészelése teljesen ki volna merítve; mivel azonban az eddig nem sikerült még, itt csak némely különleges eseteket lehet tárgyalni, melyek egyike akkor áll be, ha $n=2$, minthogy ez esetben áll :

$$3)\quad dy+by^2dx=a'x^m dx,$$

mely egyenlet Riccati egyenletének neveztetik, mivel Riccati tudós volt az első, a ki ezen egyenlet egészelését több esetben tanította; ezen esetek legegyszerübbike az, ha $m=0$, melyben áll :

$$dy+by^2dx=a'dx, \text{ miből}$$

$$dx(a'-by^2)=dy, \text{ következőleg}$$

$$dx=\frac{dy}{a'-by^2},$$

mely külzelék ismert alaku lévén, nyerjük :

$$x=\frac{1}{2\sqrt{a'b}}\cdot log\frac{\sqrt{a'}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a'}-y\sqrt{b}},$$

mely egyenlet x-et y-nak függvényében adja ; ha tehát megfordítva y-t akarnók x-nek függvényében, akkor áll :

$$2x\sqrt{a'b}=log\frac{\sqrt{a'}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a'}-y\sqrt{b}},$$

következőleg, ha e a természetes logarithmusok alapszáma, lesz :

$$e^{2x\sqrt{a'b}}=\frac{\sqrt{a'}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a'}-y\sqrt{b}},$$

miből könnyü módon ezt találjuk :

$$y=\frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{e^{2x\sqrt{a'b}}-1}{e^{2x\sqrt{a'b}}+1},$$

mely kifejezés tehát az adott egyenlet egészletének tekintendő.

Ha pedig a Riccati egyenlete így állana :

$$4)\quad dy=(by^2+ax^m)dx,$$

akkor $m=0$ esetre nézve nyerni fogjuk :

$$dx=\frac{dy}{a+by^2},$$

miből egészelés által találjuk :

$$x=\frac{1}{\sqrt{ab}}arctg\cdot\frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+C;$$

itt megint az x y-nak függvényében van kifejezve; ha tehát megfordítva y-t x által akarnók kifejezni, akkor áll:

$$x\sqrt{ab}-C=arctg\frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ tehát } \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=tg(x\sqrt{ab}-C), \text{ miből}$$

$$y=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}tg(x\sqrt{ab}-C).$$

A Riccati egyenletének más esete akkor áll elő, ha

$$y=z^n, \text{ tehát } dy=nz^{n-1}dz,$$

minek helyettesítése által kapjuk:

$$nz^{n-1}dz=bz^{2n}dx+ax^m dx,$$

ez pedig azon esetre lesz egynemü, tehát egészelhető, ha áll:

$$n-1=2n=m, \text{ miből } n=-1, \text{ és } m=-2,$$

miknek helyettesítése e következő egyenletre vezet:

$$z^2dz+bz^2dx+ax^2dx=0,$$

mely egyenlet, mint látjuk, már egynemü, tehát egészelhető.

A Riccati egyenletének harmadik esete akkor áll be, ha

$$y=\frac{1}{bx}+\frac{z}{x^2} \text{ tétetik, minek folytán lesz:}$$

$$dy=-\frac{dx}{bx^2}+\frac{dz}{x^2}-\frac{2zdx}{x^3},$$

mit a 3) alatti egyenletbe tévén, nyerni fogjuk:

$$5.)\quad dz+\frac{bz^2dx}{x^2}=ax^{m+2}dx,$$

mely egyenlet nyilván azon esetre válik egynemüvé, ha benne $m=-2$ tétetik, mivel a változók kitevőinek összege minden tagban $=0$. Továbbá könnyü belátni, hogy az előttünk álló egyenlet akkor is egészelhetővé válik, ha $m=-4$ tétetik, mely esetben e következő egyenletre jutunk:

$$dz+\frac{bz^2dx}{x^2}=\frac{adx}{x^2}, \text{ miből}$$

$$\frac{dx}{x^2}+\frac{dz}{bz^2-a}=0,$$

hol a változók már szétválasztvák, az egészelés tehát könnyü.

A fenebbi 5) alatti egyenlet még így is írható:

$$x^2dz=-bz^2dx+ax^{m+4}dx,$$

itt pedig $x=\frac{1}{u}$ tétetvén, lesz $dx=-\frac{du}{u^2}$, s áll:

$$dz=(bz^2-au^{-m-4})du,$$

ha tehát a Riccati egyenlete egészelhető azon esetre, ha m helyébe bizonyos μ szám tétetik, egészelhető lesz akkor is, ha $m=-\mu-4$ tétetik, mert ennek helyettesítése adja:

$$dz=(bz^2-au^{\mu})du,$$

melyben a változókat igen könnyen szét lehet választani.

Ha az eredeti $dy=(by^2+ax^m)dx$ egyenletet, még azon esetre is megvizsgáljuk, ha benne $y=-\frac{1}{z}$, tehát $dy=\frac{dz}{z^2}$ tétetik, lesz:

$$dz=bdx+az^2x^mdx,$$

itt pedig $x^{m+1}=u$, tehát $x^mdx=\frac{du}{m+1}$ tétetvén, minthogy

$x^m=u^{\frac{m}{m+1}}$, nyerni fogjuk:

$$dz=\frac{az^2du}{m+1}+\frac{b}{m+1}u^{-\frac{m}{m+1}}du,$$

miből nyilván következik, hogy ha a Riccati egyenlete $m=\mu$ esetre nézve egészelhető, egészelhető lesz akkor is, ha $m=-\frac{\mu}{\mu+1}$ tétetik; mert ha ezen érték tétetik az előttünk álló egyenletben m helyébe, akkor a $-\frac{m}{m+1}$ kítevő μ-vé válik. Mivel pedig az előbbiekben bebizonyítottuk, hogy a Riccati egyenlete $m=-4$ értékre nézve egészelhető, szintén egészelhető lesz az $m=\frac{4}{-4+1}=-\frac{4}{3}$ értékre nézve; ha pedig ez áll, akkor ezen egyenlet az $m=\frac{4}{3}-4=-\frac{8}{3}$ értékre nézve szintén egészelhető, s így következik, hogy az említett egyenlet

$m=-\frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{8}{3}+1}=-\frac{8}{5}$ értékre nézve szintén egészelhető. Ezen okoskodás, mint láttuk, azon elven alapszik, hogy ha a Riccati egyenlete $m=\mu$-re nézve egészelhető, akkor az $m=\mu-4$ és $m=\frac{-\mu}{\mu+1}$-re nézve is egészelhető lesz; ha pedig ezen okoskodást folytatjuk, könnyü meggyőződhetni, hogy a Riccati egyenlete akkor is egészelhető lesz, ha benne m helyébe e következő sornak bármely tagját írjuk:

$$0, -2, -4, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{7} \ldots\ldots$$

Különös eset gyanánt vegyük tekintetbe e következő külzeléki egyenletet:

$$dy = y^2 dx + 2x^{-\frac{8}{3}} dx,$$

hol tehát $m = -\frac{8}{3}$ a fenebbi sornak 5-dik tagja; ha ezt

$dz = (bz^2 + au^{-m-4})du$ egyenlettel összehasonlítjuk, áll:

$a=2$, $b=1$, $m+4=\frac{8}{3}$, tehát $m=-\frac{4}{3}$, ezeket pedig a:

$dy=(by^2+ax^m)dx$ egyenletbe tévén, lesz:

$$dy = y^2 dx + 2x^{-\frac{4}{3}} dx,$$

ezen egyenletet pedig összehasonlítván a következő egyenlettel:

$$dz = \frac{az^2 du}{m+1} + \frac{b}{m+1} u^{-\frac{m}{m+1}} du, \text{ áll:}$$

$$\frac{b}{m+1} = 2, \quad \frac{a}{m+1} = 1, \text{ és } \frac{m}{m+1} = \frac{4}{3}, \text{ következőleg}$$

$$b=-6,\ a=-3, \text{ és } m=-4,$$

s ezt megint a $dy=(by^2+ax^m)dx$ egyenletbe helyettesítvén, ered:

$$dy = -6y^2 dx - 3x^{-4} dx,$$

mely egyenletet megint a $dz=(bz^2+au^{-m-4})du$ egyenlettel összehasonlítván, áll:

$$b=-6,\ a=-3 \text{ és } m=0, \text{ mit az}$$

$$dy=(by^2+ax^m)dx$$

egyenlettel összehasonlítván, e következő egyenletre jutunk:

$$dy = -6y^2 dx - 3dx, \text{ miből}$$

$$\frac{dy}{1+2y^2} = -3dx,$$

melynek egészlete ez:

$$x = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} y\sqrt{2} + C.$$

Az eddig mondottakból látjuk, hogy a Riccati egyenletének, avagy három tagu külzeléki egyenleteknek egészelése, csak kevés esetben vihető véghez, különösen pedig ha y változót csak algebrai, kitevőleges, vagy logarithmusi függvények által akarjuk kifejezni.

67.) **(Első rendü és felsőbb foku külzeléki egyenletek egészelése.)** Másodfokunak neveztetik a külzeléki egyenlet akkor, ha a benne előforduló első külzeléki hányados legmagasabb hatványa a második. Miből már világosan következik, hogy 3-dik, 4-dik, vagy általánosan véve n-dik foku külzeléki egyenletnek azt kell nevezni, melyben az első külzeléki hányados legmagasabb hatványa a 3-dik, 4-dik vagy általánosan véve az n-dik. Ezek folytán, egy első rendü és másod foku külzeléki egyenlet mindig e következő alakban fordúl elő:

1) $dy^2+Pdxdy+Qdx^2=0$, avagy:

2) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+P\cdot\frac{dy}{dx}+Q=0$,

melyben P és Q vagy állandó vagy változó tényezők lehetnek. Minthogy ezen egyenlet egészelésének értelme szintén csak abban áll, hogy azon x és y közötti viszony határoztassék meg, melynél fogva a felvett 1) alatti egyenlet álljon: itt azonnal látjuk, hogy a kivánt egészlet nyerése végett, csak $\frac{dy}{dx}$ hányados, mely tisztán x-nek függvénye, meghatározandó, mit igen könnyen el lehet érni az által, ha a fen adott 2) alatti egyenlet $\frac{dy}{dx}$ hányadosra nézve másodfoku vegyes egyenletnek tekintetik, és belőle ezen hányados az ismert szabály szerint kikerestetik. Minthogy továbbá ismeretes előttünk, hogy egy ilyféle egyenletből mindig két értéke van az ismeretlen mennyiségnek: ha ezen értékek egyikét v-vel, másikát pedig v'-el jegyezzük, áll e következő két egyenlet:

$$\frac{dy}{dx}=v \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dx}=v', \text{ avagy:}$$

$$\frac{dy}{dx}-v=0, \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dx}-v'=0,$$

ez pedig azon egyszerü két szorzó lenne, melyek szorzása által az eredetileg adott egyenlet nyeretik. Az előttünk álló egyenletek adják:

$$dy=vdx \text{ és } dy=v'dx\text{, következőleg}$$
$$y=\int vdx+C\text{, és } y=\int v'dx+C'\text{,}$$

mely egészletek könnyen meghatározhatók, ha v és v' vagy állandó mennyiségek, vagy x-nek függvényei; az így nyert egészletek mindegyike pedig, az adott egyenlet egészletének tekintendő.

Hasonló módon kell eljárni akkor is, ha e következő harmadfoku és első rendü egyenlet egészletéről volna szó:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)+R=0\text{,}$$

hol tehát megint P, Q és R tényezők vagy állandó mennyiségek, vagy x-nek függvényei. Ezen $\frac{dy}{dx}$-re nézve 3-ad foku egyenletet szintén csak ezen hányadosra nézve kell feloldani, s tudván egyszersmind azt, hogy ezen hányadosnak szükségképen három értéke lesz, ha ezen értékeket t, t' és t''-el jegyezzük, állnia kell:

$$\frac{dy}{dx}=t\text{, } \frac{dy}{dx}=t'\text{, és } \frac{dy}{dx}=t''\text{, miből}$$
$$\frac{dy}{dx}-t=0\text{, } \frac{dy}{dx}-t'=0\text{, és } \frac{dy}{dx}-t''=0\text{,}$$

ez pedig azon három egyszerü szorzó, melyek szorzása által az eredetileg adott egyenletet kapjuk. Ugyanazon egyenletekből pedig e következő egészletek erednek:

$$y=\int tdx+C\text{, } y=\int t'dx+C' \text{ és } y=\int t''dx+C''\text{,}$$

mely egészletek könnyen meghatározhatók, ha t, t' és t'' mennyiségek x-nek függvényében adatnak; ezen egészletek mindegyike pedig, az adott egyenlet egészletének tekintendő, valamint ezen egészletek szorzata szintén az adott egyenlet egészlete lesz. Különböztetésül az egyszerü egészletek részletes egészleteknek is neveztetnek, míg ezen egészletek szorzata, az adott egyenlet általános egészletének mondatik. Továbbá látjuk, hogy a fenebbi egészletek mindegyikében egy tetszésszerinti állandó fordúl elő, egy harmadfoku és első rendü egyenlet egészletében tehát három tetszésszerinti állandó fordúl elő.

Az eddig mondottakból egyszersmind könnyü belátni, hogy még magasb foku és első rendü külzeléki egyenletek egészlete miként határozható meg, úgy, hogy ha az adott egyenlet n-dik foku volna, akkor annak n részletes egészlet és ugyanannyi tetszésszerinti állandó felelne meg, melyek az általános egészletben mind előfordúlnak.

Következő példák a tárgy felvilágosítására szolgálnak:

(1-ső Példa.) Az adott másod foku külzeléki egyenlet legyen

$$dy^2-adx^2=0\text{, avagy : }\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-a=0,$$

melyben $\frac{dy}{dx}=p$ tétetvén, áll : $p^2-a=0$, miből $p=\pm\sqrt{a}$, avagy :

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{a}\text{, és }\frac{dy}{dx}=-\sqrt{a}\text{, honnan,}$$

$$dy=dx\sqrt{a}\text{, és }dy=-dx\sqrt{a}\text{, következöleg}$$

$$y=x\sqrt{a}+c\text{, és }y=-x\sqrt{a}+c',$$

hol c és c' a két tetszésszerinti állandó. Ezen kifejezések mindegyike az adott egyenlet részletes egészletének tekintendő; ha pedig ezekből szorzók alakíttatnak, akkor ezen szorzók szorzata az adott egyenlet általános egészletét nyújtja, s áll :

$$(y-x\sqrt{a}-c)(y+x\sqrt{a}-c')=0\,;$$

ha itt a kijelentett szorzás véghez vitetik, nyerni fogjuk :

$$y^2-ax^2-y(c+c')+x\sqrt{a}(c'-c)+cc'=0,$$

melynek kétszeres egymásutáni külzelése által, az adott külzeléki egyenletet nyerjük, mint lennie is kell.

(2-dik Példa.) Legyen egészelendő :

$$dy^3+dx^3=0\text{, avagy :}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+1=0\text{, azaz : }p^3+1=0,$$

ha p-nek fenebbi értéke megtartatik. Ezen egyenlet gyökeinek meghatározására, e következő ismert minta szolgál :

$$x=a\left(\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}.\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}\right),$$

minek segítségével nyerjük :

$$p=-1\,,\ p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\,,\ \text{és}\ p=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\,,$$

s ennek folytán e következő három külzeléki egyenletet kapjuk:

$$dy=-dx\,,\ dy=\frac{dx}{2}+\frac{dx}{2}\sqrt{-3}\,,\ \text{és}\ dy=\frac{dx}{2}-\frac{dx}{2}\sqrt{-3}\,,$$

mikből ezen egészleteket nyerjük:

$$y=-x+c,\quad y=\frac{x+x\sqrt{-3}}{2}+c'\ \text{ és }\ y=\frac{x-x\sqrt{-3}}{2}+c''\,,$$

mely kifejezések mindegyike az adott egyenlet részlet-egészletének tekintendő; az ezekből eredő szorzók e következők:

$$y+x-c=0,\quad y-\frac{x+x\sqrt{-3}}{2}-c'=0,\quad \text{és}$$

$$y-\frac{x-x\sqrt{-3}}{2}-c''=0,$$

melyek szorzata, e következő általános egészletet adja:

$$(y+x-c)\left(y-\frac{x+x\sqrt{-3}}{2}-c'\right)$$
$$\left(y-\frac{x-x\sqrt{-3}}{2}-c''\right)=0,\ \text{avagy}$$

$$y^3+x^3-y^2(c+c'+c'')+xy[c+c'(b-1)+c''(a-1)]+$$
$$x^2(bc^2-c+ac'')+y(cc'+cc''+c'c'')+x(c'c''-cc'b-cc''a)$$
$$-cc'c''=0\,,$$

hol rövidség okáért tétetett:

$$a=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\ \text{ és }\ b=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\,,$$

mihez járul még, hogy $ab=1$ és $a+b=1$; végre a fenebbi egyenlet még így is írható:

$$y^3+x^3-Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex-F=0,$$

ha t. i. az állandó tényezők rendben A, B, C, D, E és F-el jegyeztetnek; ez pedig az adott egyenlet általános egészlete, melynek háromszoros egymásutáni külzelése által, magát az adott egyenletet nyerjük. Az eddig tárgyalt esetek nyilván a legegyszerűbbek és legkönnyebbek, mivel az adott külzeléki egyenletben sem x sem y nem fordúlt elő.

(3-dik Példa.) Az egészelendő egyenlet legyen

$$y.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}=y,\quad \text{avagy}\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{2x}{y}\,\frac{dy}{dx}=1\,;$$

ezen utolsó egyenletből könnyü módon ezt kapjuk :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}, \text{ miből}$$

$$ydy=-xdx\pm dx\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{ydy+xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pm dx,$$

mely egyenlet bal része nyilván helyettesítés által egészelhető, tévén t. i. $x^2+y^2=u$, lesz $xdx+ydy=\frac{du}{2}$, következőleg

$$\int\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}=\sqrt{x^2+y^2}, \text{ s így}$$

$$\pm x\pm c=\sqrt{x^2+y^2};$$

mivel pedig itt két eset fordúl elő, ha az állandókat megkülönböztetjük egymáztól, áll :

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+c, \quad \text{és} \quad \sqrt{x^2+y^2}=-x-c', \text{ miből :}$$

$$(\sqrt{x^2+y^2}-x-c)(\sqrt{x^2+y^2}+x+c')=0,$$

s ez az adott egyenletnek teljes egészlete, melyet, ha $c=c'$, még így is lehet írni :

$$y^2=2cx+c^2.$$

(4-dik Példa.) Az adott egyenlet legyen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-(x^2+xy+y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$+(x^3y+x^2y^2+xy^3)\frac{dy}{dx}-x^3y^3=0.$$

Itt azonnal látjuk, hogy ezen egyenlet utolsó tagja az x^2, y^2 és xy szorzókat foglalja magában, melyek mindegyike, az adottt egyenletbe tétetvén $\frac{dy}{dx}$ helyébe, annak eleget tesz; lesznek tehát

$$\frac{dy}{dx}=x^2, \quad \frac{dy}{dx}=y^2 \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dx}=xy$$

ezen egyenlet gyökei, mikből e következő három egyszerü szorzó kapható :

$$\frac{dy}{dx}-x^2=0, \quad \frac{dy}{dx}-y^2=0, \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dx}-xy=0,$$

melyek szorzása által, magát az eredeti egyenletet fogjuk nyerni. A fenebbi egyenletek egészelése által pedig ered :

$$y=\frac{1}{3}x^3+c,\quad y=e^{\frac{x^2}{2}}+c',\quad \text{és}\quad y=-\frac{1}{x}+c'',$$

mely értékekből, e következő általános egészletet kapjuk :

$$\left(y-\frac{1}{3}x^3-c\right)(y-e^{\frac{x^2}{2}}-c')\left(y+\frac{1}{x}-c''\right)=0.$$

(5-dik Példa.) Adva van e következő egyenlet :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+bx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{a^2-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{bx}{a^2-x^2}=0,$$

melyben $\frac{1}{a^2-x^2}=n$ tétetvén, áll még :

$$p^3+bxp^2-np-nbx=0,$$

ha t. i. $\frac{dy}{dx}=p$ iratik. Ezen egyenlet még így is írható :

$$p^2(p+bx)-n(p+bx)=0 \quad \text{avagy} \quad (p+bx)(p^2-n)=0,$$

miből nyerjük e következő három egyenletet :

$$p+bx=0,\quad p+\sqrt{n}=0,\quad \text{és}\quad p-\sqrt{n}=0,\quad \text{avagy :}$$

$$\frac{dy}{dx}=-bx,\quad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{n},\quad \text{és}\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{n},\quad \text{vagy is}$$

$$dy=-bxdx,\quad dy=-\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \text{és}\quad dy=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

mind ezekből pedig e következő három egészletet kapjuk :

$$y-c=-\frac{bx^2}{2},\quad y-c'=-arcsin\frac{x}{a},\quad \text{és}\quad y-c''=arc.sin\frac{x}{a},$$

miből, ha az állandók egyenlőknek vétetnek, e következő általános egészlet következik :

$$(y-c)^3=\frac{bx^2}{2}arc.sin^2\frac{x}{a}.$$

68.) **(Esetek, melyekben az adott egyenletben $\frac{dy}{dx}$-en kivül, még vagy x vagy y fordúl elő.)** Ha itt is $\frac{dy}{dx}$ hányados p-nek vétetik, és azt teszszük föl, hogy p hányadoson kivül még x is fordúl elő az adott egyenletben: akkor ezen egyenlet egészelése végett, vagy x változó p-nek, vagy p x-nek függvényében lesz kifejézendő, mi ha sikerül, már az x és y közötti viszony meg lesz találva; mint e következő példából fogjuk látni. ; Legyen adva t. i.

$$xdx+ady=b\sqrt{dx^2+dy^2};$$

akkor ezen egyenlet még így is írható :

$$x+\frac{ady}{dx}=b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ avagy}$$

$$x+ap=b\sqrt{1+p^2},$$

miből x könnyen kitalálható, áll t. i.

$$x=b\sqrt{1+p^2}-ap,$$

s így x p-nek függvényében van kifejezve ; mivel pedig

$$dy=pdx, \quad \text{lesz} \quad y=\int pdx=px-\int xdp,$$

hol ha x helyébe a fenebbi érték tétetik, lesz :

$$y=-ap^2+bp\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}ap^2-b\int dp\sqrt{1+p^2};$$

mivel pedig p tisztán csak x-nek függvénye, következik, hogy az előttünk álló egyenlet által, a kérdéses x és y közötti viszony kellőleg ki van fejezve.

Ha azonban az adott egyenlet oly természetü volna, hogy sem x-et p-nek, sem p-t x-nek függvényében könnyen nem lehetne kifejezni : akkor e bajon mindig lehet segítni egy új u változónak behozása által, melynek függvényében mind x mind p kifejezendő ; minek megtörténte után, már az egészelés véghez vihető lesz, mint e következő példából fogjuk látni : Legyen adva t. i.

$$x^3dx^3+dy^3=axdx^2dy, \quad \text{avagy :}$$

$$x^3+p^3=apx,$$

mely egyenletből, mint látjuk, sem x p-nek, sem p x-nek függvényében könnyen ki nem fejezhető ; tévén azonban $p=ux$, az adott egyenlet ebbe megy át :

$$x^3+u^3x^3=aux^2, \text{ avagy}$$

$$x+u^3x=au, \quad \text{miből} \quad x=\frac{au}{1+u^3}, \quad \text{következőleg}$$

$$p=\frac{au^2}{1+u^3},$$

s így mind p mind x u-nak függvényében van kifejezve ; ezen egyenletek elsejéből kapjuk :

$$dx = \frac{adu(1-2u^3)}{(1+u^3)^2},$$

mivel pedig $dy = pdx$, a kellő értékek helyettesítése ezt adja:

$$dy = \frac{a^2u^2du(1-2u^3)}{(1+u^3)^3},$$

ebből pedig egészelés által

$$y = a^2\int\frac{u^2du}{(1+u^3)^3} - 2a^2\int\frac{u^5du}{(1+u^3)^3},$$

a 20)-dik szám II) alatti képlete segítségével kapjuk:

$$2a\int\frac{u^5du}{(1+u^3)^3} = \frac{2a^2u^3}{3(1+u^3)^2} + 2a^2\int\frac{u^2du}{(1+u^3)^3},$$

s ennek folytán nyerni fogjuk:

$$y = \frac{2a^2u^3}{3(1+u^3)^2} - a^2\int\frac{u^2du}{(1+u^3)^3};$$

az utolsó egészletben pedig ha $1+u^3=z$ tétetik, lesz $u^2du = \frac{dz}{3}$, s ennek folytán

$$y = \frac{a^2(4u^3+1)}{6(1+u^3)^2};$$

mivel pedig $u = \frac{p}{x}$, tehát tisztán csak x-nek függvénye, következik, hogy az utolsó egyenlet által az x és y közötti viszony pontosan ki van fejezve.

Fejtsük meg még e következő példát, melyben y változó is fordúl elő, úgymint:

$$ydx - \sqrt{dx^2+dy^2} = 0.$$

Ezt így is szabad írni:

$$y - \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = 0, \text{ avagy}$$

$$y - \sqrt{1+p^2} = 0, \text{ miből}$$

$$y = \sqrt{1+p^2}, \quad \text{tehát} \quad y^2 = 1+p^2, \text{ és } p^2 = y^2-1,$$

honnan

$$p = \sqrt{y^2-1}, \quad \text{avagy} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2-1}, \text{ ebből pedig}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}},$$

minek egészlete már ismeretes; áll t. i.

$$x = log(y + \sqrt{y^2 - 1}) + C,$$

miből y változó x által is könnyen kifejezhető.

69.) **(Esetek, melyekben az adott külzeléki egyenlet, mind a három, x, y és p változót magában foglalja.)** Ez esetben az adott külzeléki egyenlet legkönnyebben tárgyaltatik akkor, ha az x és y kitevőinek öszege minden tagban ugyanaz; mert ez esetben az egyenlet egynemü lesz, s így mint tudjuk, könnyen egészelhető. Azon feltét alatt tehát, hogy az adott egyenletben mind x és y, mind p benne foglaltatik, és az x és y kitevőinek összege minden tagban ugyanaz, tétessék $y = xu$, s lesz: $dy = udx + xdu$; akkor ennek helyettesítése által az adott egyenletből, x el fog tüntetni, a hátra maradó egyenletnek pedig csak u és p között lesz helye, miből tehát vagy u p-nek, vagy p u-nak függvényében meghatározható; minthogy t. i. áll:

$$dy = pdx, \text{ áll szintén:}$$

$$udx + xdu = pdx, \text{ miből}$$

$$dx(p - u) = xdu, \text{ következőleg } \frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u}, \text{ s így}$$

$$1) \quad logx = \int \frac{du}{p - u} + C,$$

mely egyenlet segítségével x u-nak függvényében fejeztetik ki; mivel pedig $y = ux$, ha x-nek értékét ide helyettesítjük, y is u által kifejezve lesz. E következő példák az eljárást felvilágosítják:

(1-ső Példa.) Adva van e következő egyenlet:

$$ydx - x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0.$$

Ezen egyenlet egészelése végett, meg kell jegyeznünk, hogy ha a fenebbi 1) alatti egyenletben (melyet egészelésre fogunk használni)

$$p - u = z, \text{ tehát } dp - du = dz \text{ tétetik, lesz:}$$

$$du = dp - dz, \text{ s így áll:}$$

$$\int \frac{du}{p - u} = \int \frac{dp - dz}{z} = -\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dp}{z}, \text{ avagy}$$

$$2) \quad logx = -log(p - u) + \int \frac{dp}{p - u}.$$

Ez meglevén, ha már most az adott egyenletben $y=ux$ tétetik, és az is tekintetbe vétetik, hogy $p=\frac{dy}{dx}$: az egyenlet ebbe megy át :

$$u-\sqrt{1+p^2}=0 \text{ avagy } u=\sqrt{1+p^2}$$

mit a fenebbi 2) egyenletben helyettesítvén, lesz :

$$logx=-log(p+u)+\int\frac{dp}{p-\sqrt{1+p^2}},$$

mely utolsó egészletnek mind számlálóját mind nevezőjét $(p+\sqrt{1+p^2})$-vel szorozván, nyerni fogjuk :

$$logx=-log(p-u)-\int dp(p+\sqrt{1+p^2}) \text{ avagy}$$

$$logx=-log(p-u)-\frac{p^2}{2}-\int dp\sqrt{1+p^2},$$

az utolsó egészlet pedig a 21)-dik szám III) alatti mintája szerint tárgyaltatván, lesz :

$$\int dp\sqrt{1+p^2}=\frac{p}{2}\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ következőleg}$$

$$logx=-log(p-u)-\frac{p^2}{2}-\frac{p}{2}\sqrt{1+p^2}$$

$$-\frac{1}{2}log(p+\sqrt{1+p^2})+C;$$

mivel pedig $-log(p-u)-\frac{1}{2}log(p+\sqrt{1+p^2})=$

$$-log(p-u)-\frac{1}{2}log(p+u)$$

$$=log(p+u)-\frac{1}{2}log(p+u)=\frac{1}{2}log(p+u), \text{ következőleg}$$

$$logx=\frac{1}{2}log(p+\sqrt{1+p^2})-\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{2}p^2+C;$$

mivel pedig $y=ux=x\sqrt{1+p^2}$, tehát $u=\frac{y}{x}$, ha x helyébe a most megtalált érték tétetik, azon egyenletet fogjuk nyerni, mely által a keresett x és y közötti viszony terjesztetik elő.

(2-dik Példa.) Legyen egészelendő ezen egyenlet :

$$ydx-xdy=nx\sqrt{dx^2+dy^2},$$

mely egyenletet így is szabad írni :

$$y-px=nx\sqrt{1+p^2},$$

és ha $y=ux$ tétetik, ered :

1) $u-p=n\sqrt{1+p^2}$, következőleg

$$u=p+n\sqrt{1+p^2},$$

u-nak ezen értékét, ha a fenebbi 2) egyenletben helyettesítjük, nyerni fogjuk :

$$logx=-logn\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{n}\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ avagy :}$$

$$logx=-logn\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{n}log(p+\sqrt{1+p^2})+logC,$$

mely logarithmusokat egybe vonván, lesz :

$$x=\frac{C}{n\sqrt{1+p^2}}(\sqrt{1+p^2}-p)^{\frac{1}{n}},$$

és ha rövidség okáért : $\frac{C}{n}$ mint állandó szorzó, $=a$ tétetik lesz :

2) $$x=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}(\sqrt{1+p^2}-p)^{\frac{1}{n}},$$

mivel pedig $y=ux$, áll szintén :

3) $$y=\frac{a(p+n\sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2}}(\sqrt{1+p^2}-p)^{\frac{1}{n}}.$$

Hogy pedig ezen egyenletből p mennyiséget lehessen kiküszöbölni, az 1) alatti egyenletből kapjuk :

4.) $u^2-2up+p^2=n^2+n^2p^2$, miből :

$$p=\frac{u-n\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n^2}, \text{ következőleg}$$

$$1+p^2=\frac{n^2u^2-2nu\sqrt{u^2+1-n^2}+u^2+1-n^2}{(1-n^2)^2}, \text{ és}$$

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{-nu+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n^2}, \text{ miből továbbá kapjuk :}$$

$$\sqrt{1+p^2}-p=\frac{-u+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n};$$

mivel pedig a fenebbi 2) egyenletet így is írhatni :

$$\frac{x\sqrt{1+p^2}}{a}=(\sqrt{1+p^2}-p)^{\frac{1}{n}},$$

ha az eddig megtalált értékeket helyettesítjük, lesz :

$$\frac{x(-nu+\sqrt{u^2+1-n^2})}{a(1-n^2)}=\left(\frac{-u+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

s már látjuk, mivel $u=\frac{y}{x}$, hogy az előttünk álló egyenlet a keresett x és y közötti viszonyt terjeszti elő, ha u helyébe ezen értéket akarjuk helyettesíteni. Egy különös eset áll itt elő, melyre nézve ha $n=1$, a fenebbi 4) egyenlet ebbe megy át :

$$p=\frac{u^2-1}{2u}, \text{ tehát : } \sqrt{1+p^2}=\frac{u^2+1}{2u}, \text{ következőleg}$$

$$x=\frac{2a}{u^2+1}=\frac{2ax^2}{x^2+y^2}, \text{ mit így is irhatunk :}$$

$$x^2+y^2=2ax,$$

ez pedig a keresett x és y közötti viszony, mely által az $ydx-xdy=x\sqrt{dx^2+dy^2}$ egyenlet egészlete állíttatik elő.

(3-dik Példa.) Legyen az adott egyenlet :

$$xdy^3+ydx^3=dxdy\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

ha itt is $\frac{dy}{dx}=p$ tétetik, akkor ezen egyenlet még így is áll :

$$p^3x+y=p\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{1+p^2}},$$

itt pedig $y=ux$ tétetvén, lesz :

$$p^3+u=p\sqrt{u}\sqrt{1+p^2},$$

mely egyenletből u változó p-nek függvényében lesz kifejezendő, mi végre tétessék : $\sqrt{u}=z$, tehát $u=z^2$ s áll :

$$p^3+z^2=pz\sqrt{1+p^2}, \text{ miből :}$$

$$z=\frac{p}{2}\sqrt{1+p^2}+\frac{p}{2}\sqrt{1-4p+p^2}, \text{ avagy :}$$

$$\sqrt{u}=\frac{p}{2}\sqrt{1+p^2}+\frac{p}{2}\sqrt{1-4p+p^2}, \text{ következőleg}$$

$$u=\frac{p^2}{2}+\frac{p^4}{2}-p^3+\frac{p^2}{2}\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)}, \text{ minek folytán}$$

$$p-u=p\left(1-\frac{p}{2}+p^2-\frac{p^3}{2}\right)-\frac{p^2}{2}\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

$$=\frac{p}{2}(1+p^2)(2-p)-\frac{p^2}{2}\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

mely érték meglévén, ha megint a fen kitett egyenlet vétetik tekintetbe, lesz :

$$\frac{dp}{p-u}=\frac{dp}{\frac{p}{2}(1+p^2)(2-p)-\frac{p^2}{2}\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)}},$$

mely kifejezés szétbontása végett, jó lesz annak mind számlálóját mind nevezőjét a nevező tagjainak összegével szorozni, minek végbevitele után kapjuk :

$$\frac{dp}{p-u}=\frac{dp[(1+p^2)(2-p)+p\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)}}{2p(1+p^2)(1-p+p^2)},$$

mely kifejezés e következő két tagra oszlik :

$$\frac{dp}{p-u}=\frac{dp(2-p)}{2p(1-p+p^2}+\frac{dp\sqrt{1-4p+p^2}}{2\sqrt{1+p^2}(1-p+p^2)},$$

s ezen egyenlet mindkét részének egészlete lesz :

$$\int\frac{dp}{p-u}=\frac{1}{2}\int\frac{dp(2-p)}{p(1-p+p^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dp\sqrt{1-4p+p^2)}}{\sqrt{1+p^2}(1-p+p^2)};$$

ezen egyenlet jobb részének első egészlete ugyan könynyen meghatározható, mivel ez, mint látjuk, okszerü külzeléki függvény ; de nem úgy áll a dolog ugyanazon résznek második egészletével, melynek meghatározása nagy nehézségekkel jár, azért czélszerü lesz, azt minél rövidebb alakra hozni, mi végre e következő helyettesítés szolgál :

$$\frac{\sqrt{1-4p+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}=q,$$

ebből nyerni fogjuk :

$$p=\frac{2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}}{1-q^2},$$

miből külzelés által kapjuk :

$$dp=\frac{4qdq[2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}]}{(1-q^2)^2\sqrt{4-(1-q^2)^2}};$$

továbbá p értékének helyettesítése és a kellő rövidítések megtörténte után kapjuk :

$$1-p+p^2=\frac{(3+q^2)(2+\sqrt{4-(1-q^2)^2})}{(1-q^2)^2},$$

mely értékeket a fenebbi egészletekbe tévén, lesz :

$$\frac{1}{2}\int\frac{dp\sqrt{1-4p+p^2}}{\sqrt{1+p^2}(1-p+p^2)}=2\int\frac{q^2dq}{(3+q^2)\sqrt{4-(1-q^2)^2}},$$

mely kifejezés, mint látjuk, már valamivel egyszerübb, mind a mellett egészelésre még mindig nehéz, úgy, hogy azt sem logarithmusok, sem pedig körméreti függvények által nem lehet eszközölni; egészelése tehát egyedül csak attól függ, hogy a nevezőben előforduló gyök alatti mennyiség sorba fejtessék, s ezen sornak minden tagja külön egészeltessék. Ezen példának kifejtése hosszu számításokat kivánván, azt a kezdő figyelmébe ajánljuk.

(4-dik Példa.) Miután ismeretes előttünk, hogy

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}\ \text{egyenlet}$$

azon görbe vonalnak hosszát adja, melyre nézve x és y az épszögü összrendezők : itt e következő nevezetes kérdés, szintén egy külzeléki egyenletre vezet, melynek egészlete meghatározandó : Azon x és y közötti viszony meghatározandó, melyre nézve álljon : $s=\sqrt{2xy}$. Azon külzeléki egyenletet, mely ezen feladatnak megfelel, úgy fogjuk, nyerni ha $s=\sqrt{2xy}$ kifejezést külzeljük, s így áll :

$$ds=\frac{ydx+xdy}{\sqrt{2xy}},$$

és ds helyébe a fen adott érték tétetvén, a keresett külzeléki egyenlet lesz :

$$1)\qquad \frac{ydx+xdy}{\sqrt{2xy}}=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

és ha megint $\frac{dy}{dx}=p$, áll :

$$\frac{y+px}{\sqrt{2xy}}=\sqrt{1+p^2},$$

mely egyenletben $y=ux$ teendő, minek folytán lesz :

$$\frac{u+p}{\sqrt{2u}}=\sqrt{1+p^2},\ \text{tehát :}$$

$$u+p=\sqrt{2u}\sqrt{1+p^2},$$

s ezen egyenletből p meghatározandó, mivégre áll :

$$u^2+2up+p^2=2u+2p^2u\,,\ \text{avagy :}$$

$$p^2-\frac{2up}{2u-1}=\frac{u^2-2u}{2u-1},$$

miből nyerjük ;

$$p=\frac{u+(1-u)\sqrt{2u}}{2u-1},\ \text{következőleg}$$

$$p-u=\frac{(1-u)\sqrt{2u}(\sqrt{2u}+1)}{2u-1}=\frac{(1-u)\sqrt{2u}}{\sqrt{2u}-1},$$

itt pedig megint a fenebbi általános egyenletet használván, lesz :

$$logx=\int\frac{du}{p-u}=\int\frac{du(\sqrt{2u}-1)}{(1-u)\sqrt{2u}}=\int\frac{du}{1-u}-\int\frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}},$$

avagy :

$$logx=-log(1-u)-\int\frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}},$$

mely utolsó egészlet meghatározására tétessék : $u=v^2$, s lesz : $du=2vdv$, s ennek folytán áll :

$$\int\frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}}=\sqrt{2}\cdot\int\frac{dv}{1-v^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}log\frac{1+v}{1-v},$$

és ha v helyébe az érték visszahelyeztetik, lesz :

$$logx=-log(1-u)-\frac{1}{\sqrt{2}}log\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}+loga\,,$$

hol a az állandó logarithmusát jelenti. Ezen egyenlet azonban még így is írható :

$$logx=log\frac{a}{1-u}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

áll tehát szintén :

$$x=\frac{a(1-\sqrt{u})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{(1-u)(1+\sqrt{u})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}},$$

és ha $u=\frac{y}{x}$ érték behozatik, lesz :

$$x=\frac{ax}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ avagy :}$$

$$1=\frac{a}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}};$$

mivel továbbá $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, ezen egyenlet még e következőbe megy át :

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=a.\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}},$$

avagy rövidebben írván,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}=a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1},$$

mely egyenlet a feladat feltételeinek eleget tesz.

70.) **(Még más esetnek megvizsgálása.)** Azon feltétel alatt, hogy most is mint ezelőtt

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$$

valamely görbe vonalnak hosszát jelenti, melyhez az épszögü x és y összrendezők tartoznak ; vegyük fel még azt is, hogy valamely x, y és s változók közötti egynemü egyenlet adatik, és tegyük feladatunkká, a véges x és y közötti egyenletet meghatározni.

Ezen feladat általános megfejtésére könnyü belátni, hogy ha egy ilyféle egyenletben $y=ux$ és $s=vx$ tétetik, x változó elmarad, s egy u és v közötti egyenlet nyeretni fog, melyből vagy u v-nek, vagy v u-nak függvényében kifejezhető. Az itt adott két egyenletből könnyen nyerjük :

$$dy=udx+xdu \quad \text{és} \quad ds=vdx+xdv,$$

továbbá áll :

$$dy=pdx, \quad \text{és} \quad ds=dx\sqrt{1+p^2},$$

áll tehát szintén :

$$pdx=udx+xdu, \quad \text{és} \quad dx\sqrt{1+p^2}=vdx+xdv,$$

mely két egyenletből már könnyü módon kapjuk :

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}, \quad \text{és} \quad \frac{dx}{x}=\frac{dv}{\sqrt{1+p^2}-v}, \text{ következőleg}$$

$$1)\quad \frac{du}{p-u}=\frac{dv}{\sqrt{1+p^2}-v},$$

minthogy pedig minden u és v közötti egyenletből, vagy u v-nek vagy v u-nak függvényében meghatározható, könnyü lesz szinte du-t dv által kifejezni; fölvévén tehát, hogy $dv=qdu$, akkor ennek helyettesitése által, az utolsó egyenlet ebbe megy át:

$$\frac{1}{q(p-u)}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}-v},\text{ miből:}$$

$$qp-qu=\sqrt{1+p^2}-v,\text{ avagy:}$$

$$(v-qu)+qp=\sqrt{1+p^2},$$

mit négyzetre emelvén és rendezvén, lesz:

$$p^2-p\cdot\frac{2q(v-qu)}{1-q^2}=\frac{(v-qu)^2-1}{1-q^2},$$

ezen egyenletből pedig kapjuk:

$$p=\frac{q(v-qu)+\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1-q^2},\text{ következőleg}$$

$$p-u=\frac{qv-u+\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1-q^2},$$

a fenebbi általános képlet szerint tehát lesz:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{du(1-q^2)}{qv-u+\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}.$$

Hogy pedig ezen képletet annál könnyebben lehessen egészelni, jó lesz azt $((qv-u)-\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2})$ különbséggel mind szorozni mind osztani; ered akkor:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du[qv-u-\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}]}{1+u^2-v^2},$$

mely kifejezés e következő két tagra oszlik:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du(qv-u)}{1+u^2-v^2}-\frac{du\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1+u^2-v^2},$$

mivel pedig $qdu=dv$, ezen egyenlet még így is írható:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{udu-vdv}{1+u^2-v^2}-\frac{du\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1+u^2-v^2},$$

minek egészelése által kapjuk:

$$2)\quad logx=loga-log\sqrt{1+u^2-v^2}-\int\frac{du\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1+u^2-v^2}.$$

Ez már azon általános egyenlet, melynek segítségével bármely, például adott eset megfejthető; könnyü azonban belátni, hogy ha ezen kifejezésnek utolsó egészlete logarithmusok által egészelhető volna, akkor az x és y közötti viszony betüszámtani lesz. Legyen például:

$$s^2 = y^2 + nx^2,$$

ha itt a fen emlitett helyettesítés véghez vitetik, nyerni fogjuk:

$$v^2 = u^2 + n, \text{ tehát: } v = \sqrt{u^2+n}, \text{ miből: }$$

$$dv = \frac{udu}{\sqrt{u^2+n}}, \text{ és } \frac{dv}{du} = q = \frac{u}{\sqrt{u^2+n}},$$

ebből továbbá kapjuk:

$$v - qu = \frac{n}{\sqrt{u^2+n}}, \text{ továbbá: }$$

$$q^2 - 1 = -\frac{n}{u^2+n}, \text{ végre: } 1 + u^2 - v^2 = 1 - n;$$

mind ezeket a 2) alatti képletbe helyettesitvén lesz:

$$\log x = \log a - \log \sqrt{1-n} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+n}};$$

mivel pedig az utolsó egészlet ismert alaku, áll még:

$$\log x = \log \frac{a}{\sqrt{1-n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \log(u + \sqrt{u^2+n}),$$

hol az állandó $\frac{a}{\sqrt{1-n}}$ mennyiség logarithmusát b vel jegyezvén, lesz:

$$\log \frac{x}{b} = \log(u + \sqrt{u^2+n})^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}}, \text{ következőleg}$$

$$\frac{x}{b} = [u + \sqrt{u^2+n}]^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}},$$

és $u = \frac{y}{x}$ értéket helyettesitvén, nyerni fogjuk:

$$\frac{x}{b} = \left[\frac{y + \sqrt{y^2+nx^2}}{x}\right]^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}},$$

mely egyenletben már a keresett x és y közötti viszonyt látjuk, s ez nyilván betüszámtani, ha $\frac{n}{n-1}$ teljes négyzet; tévén tehát:

$$\frac{n}{n-1}=m^2, \quad \text{lesz}: \quad n=\frac{m^2}{m^2-1},$$

mit helyettesítvén, áll még:

$$\frac{x}{b}=\left[\frac{y+\sqrt{y^2+\frac{m^2x^2}{m^2-1}}}{x}\right]^{\mathrm{m}},$$

mely kifejezést még így is szabad írni:

$$x^{\mathrm{m}+1}=b\left(y+\sqrt{y^2+\frac{m^2x^2}{m^2\pm1}}\right)^{\mathrm{m}},$$

miből könnyü módon y-t is meglehet x-nek függvényében taláni, áll ugyanis:

$$y=\frac{(m^2-1)x^{\frac{2}{\mathrm{m}}}-m^2b^{\frac{2}{\mathrm{m}}}}{2(m^2-1)b^{\frac{1}{\mathrm{m}}}x^{\frac{1-\mathrm{m}}{\mathrm{m}}}};$$

mely már a keresett x és y közötti viszony.

71.) Itt még azon esetet is meg kell vizsgálnunk, mely akkor áll be, ha az adott x, y, és p közötti külzeléki egyenletben y változó csak az első hatványon fordúl elő; ez esetben sikerül az egészelés, ha az adott egyenletből y-nak értéke, x és p által kifejezve kikerestetik, mivel pedig $dy=pdx$, könnyü belátni, hogy y-nak megtalált értékét külzelvén, és ez egyenletben helyettesítvén, egy új de csak x és p közötti külzeléki egyenletet fogunk nyerni, melyet előbbiek szerint könnyen lehet egészelni. E következő példákból látni fogjuk az eljárást:

(1-ső Példa.) Az adott külzeléki egyenlet legyen:

$$ydx-xdy=a\sqrt{dx^2+dy^2},$$

melyet dx-el elosztván, nyerni fogjuk:

$$1) \quad y-px=a\sqrt{1+p^2}, \quad \text{miből}:$$

$$y=px+a\sqrt{1+p^2},$$

hol p-nek jelentése ismeretes. Ha ezen egyenletet külzeljük és dy-t pdx-el felcseréljük, ered:

$$pdx = pdx + xdp + \frac{apdp}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ avagy :}$$

$$dp\left(x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0,$$

mely egyenlet nyilván, e következő kettőre oszlik :

$$dp = 0, \text{ és } x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0,$$

ezek elsejének egészlete $p = \alpha$, másikát pedig így is írhatni :

$$x = -\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

ezekből pedig, összeköttetésben a fenebbi 1) alatti egyenlettel kapjuk :

$$y = \alpha x + a\sqrt{1+\alpha^2},$$

p-nek függvényében pedig nyerjük :

$$y = -\frac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}} + a\sqrt{1+p^2} = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}$$

ki van fejezve tehát mind x mind y p által, mely két érték négyzetre emeltetvén és összeadatván lesz :

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

mely egyenlet azonban, minthogy a tetszésszerinti állandót nem foglalja magában, az adott egyenlet teljes egészletének nem tekinthető, ellenben az : $y = \alpha x + a\sqrt{1+\alpha^2}$ az említett egyenlet teljes egészlete lesz, mivel benne a tetszésszerinti α állandót látjuk.

(2-dik Példa.) Legyen adva e következő egyenlet :

$$ydx - xdy = \frac{a(dx^2 + dy^2)}{dx},$$

melyet mindenkelőttt dx-el elosztván nyerni fogjuk :

$$y - px = a(1+p^2), \text{ miből}$$

$$y = px + a(1+p^2),$$

ezt pedig külzelvén, és a nyert értéket $dy = pdx$ egyenletbe tevén lesz :

$$xdp + 2apdp = 0 \text{ avagy } dp(x + 2ap) = 0, \text{ miből}$$

$$dp = 0, \text{ és } x + 2ap = 0 \text{ tehát } p = c \text{ és } x = -2ap,$$

mely utolsó egyenletből kapjuk : $p = -\frac{x}{2a}$, s így könnyü módon nyeretik :

$$y=cx+a(1+c^2) \text{ és } y=a(1-p^2),$$

hol p helyébe x-ben kifejezett értéket tevén, lesz :

$$y=a-\frac{x^2}{4a} \quad \text{avagy} \quad 4ay=4a^2-x^2,$$

ez azonban az adott külzeléki egyenletnek nem teljes egészlete, mivel benne megint hiányzik a tetszésszerinti állandó.

(3-dik Példa.) Egészelendő legyen :

$$ydx-xdy=a\sqrt[3]{dx^3+dy^3};$$

$dy=pdx$ miatt, ezen egyenlet ebbe megy át :

$$ydx-pxdx=adx\sqrt[3]{1+p^3} \quad \text{avagy :}$$

$$1) \quad y=px+a\sqrt[3]{1+p^3},$$

mely egyenlet külzelése által kapjuk :

$$dp\left(x+\frac{ap^2}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}}\right)=0,$$

miből ered külön-külön :

$$dp=0, \text{ tehát } p=c \quad \text{és} \quad x=-\frac{ap^2}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}},$$

és az előbbi 1) egyenletet tekintetbe vevén, lesz :

$$y=cx+a\sqrt[3]{1+c^3}, \quad \text{továbbá}$$

$$y=-\frac{ap^3}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}}+a\sqrt[3]{1+p^3},$$

mely egyenletet összzevonván, lesz :

$$y=\frac{a}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}},$$

ebből pedig kapjuk :

$$(1+p^3)^2=\frac{a^3}{y^3}, \quad \text{következőleg} \quad p^3=\frac{a\sqrt{a}-y\sqrt{y}}{y\sqrt{y}};$$

továbbá osztás által nyerjük :

$$\frac{x}{y}=-p^2, \quad \text{tehát} \quad p^6=-\frac{x^3}{y^3};$$

mivel pedig áll :

$$p^6=\left(\frac{a\sqrt{a}-y\sqrt{y}}{y\sqrt{y}}\right)^2,$$

áll szintén :

$$\left(\frac{a\sqrt{a}-y\sqrt{y}}{y\sqrt{y}}\right)^2=\frac{x^3}{y^3},$$

miből következik :

$$x^3+(a\sqrt{a}-y\sqrt{y})^2=0,$$

mint a keresett x és y közötti viszony.

(4-dik Példa.) Az adott egyenlet e következő :

$$ydx-nxdy=a\sqrt{dx^2+dy^2},\ \text{avagy}$$

$$y=npx+a\sqrt{1+p^2},\ \text{következőleg}$$

$$dy=npdx+nxdp+\frac{apdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

s mivel $dy=pdx$, áll még :

$$dx+\frac{nx}{n-1}\frac{dp}{p}=\frac{a}{1-n}.\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

ha pedig $p^{\frac{n}{n-1}}$ mennyiséggel ezen egyenlet mind két részét szorozzuk, lesz :

$$p^{\frac{n}{n-1}}dx+\frac{nx}{n-1}p^{\frac{n}{n-1}-1}.dp=\frac{a}{1-n}.\frac{p^{\frac{n}{n-1}}dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ha ezen egyenletet figyelemmel megtekintjük, azonnal látni fogjuk, hogy bal része nem egyéb, mint $xp^{\frac{n}{n-1}}$ szorzat külzeléke, s ennek folytán egészelés által nyerjük :

$$xp^{\frac{n}{n-1}}=\frac{a}{1-n}\int\frac{p^{\frac{n}{n-1}}dp}{\sqrt{1+p^2}}+C.$$

Mivel pedig ezen kifejezés nem minden esetre nézve egészelhető, csak némely olyféle eseteket fogunk tekintetbe venni, melyekben az egészelés véghezvihető, úgymint :

(1-ször.) Ha $n=\frac{3}{2}$ akkor áll : $p^3x=-2a\int\frac{p^3dp}{\sqrt{1+p^2}}$.

(2-szor.) Ha $n=\frac{5}{4}$ akkor áll : $p^5x=-4a\int\frac{p^5dp}{\sqrt{1+p^2}}$.

(3-szor.) Ha $n=\frac{7}{6}$ akkor áll : $p^7x=-6a\int\frac{p^7dp}{\sqrt{1+p^2}}$.

Altalánosan véve tehát teendő : $n=\frac{2m+1}{2m}$, mivel ezen kifejezés valamennyi előbbi esetet magában foglalja, csak m helyébe rendben 1, 2, 3, 4 . . . . értékeket kell tenni. Ha az előttünk álló egészletekre a 20)-dik szám II) alatti mintáját alkalmazzuk, ered :

$$p^3x=-\frac{2a}{3}\sqrt{1+p^2}(p^2-2)+C,$$

$$p^5x=-\frac{4a}{5}\sqrt{1+p^2}\left(p^4-\frac{4}{3}p^2+\frac{2.4}{1.3}\right)+C,$$

$$p^7x=-\frac{6a}{7}\sqrt{1+p^2}\left(p^6-\frac{6}{5}p^4-\frac{4.6}{3.5}p^2-\frac{2.4.6}{1.3.5}\right)+C,$$

mely kifejezésekből könnyü észrevenni azon szabályt, mely szerint ezen egészletek képeztetnek, egyszersmind pedig x könnyen meghatározható p-nek függvényében.

MÁSOD ÉS FELSŐBB RENDŰ DE ELSŐ FOKU KÜLZELÉKI EGYENLETEK ÉGÉSZELÉSE.

72.) Másod rendünek neveztetik a külzeléki egyenlet akkor, ha benne az y és x közötti második külzeléki hányados fordúl elő, ki nem zárván azt, hogy benne az első külzeléki hányados is előkerüljön. Első foku pedig egy ilyféle egyenlet akkor lesz, ha a megemlített második külzeléki hányados csak az első hatványon fordúl elő. Ezeknek következtében tehát egy másod rendü és első foku külzeléki egyenletnek általános alakja ez lesz :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P.\frac{dy}{dx}+Q=0,$$

ez pedig, mint látjuk, nem egyéb, mint egy másod rendü vonalos külzeléki egyenlet. Itt tehát azon szabályokat fogjuk kifejteni, melyek szerint az ily alaku külzeléki egyenletek egészelhetők.

Ha itt is rövidség és kényelmesség okáért, $\frac{dy}{dx}=p$, tétetik lesz, ha dx állandónak vétetik, $dp=\frac{d^2y}{dx}$, következőleg $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$, mely hányados ha q-val jegyeztetik, lesz :

$q=\frac{dp}{dx}$, és a másod rendü és első foku külzeléki egyenletek egészelése nyilván abban fog állni, hogy az adott x, y, p és q közötti egyenletből, az ismeretlen x és y közötti viszony meghatároztassék. Ezen egyenletek figyelmes megtekintéséből már világosan lehet látni, hogy e tárgy egész kiterjedésében, elég nagy nehézségü ; azért is czélszerü lesz, itt a legkönnyebb esetekkel kezdeni, melyek e következők :

(1-ször.) Ha az adott egyenlet csak q hányadost, és még x-nek valamely függvényét foglalja magában ;

(2-szor.) Ha az adott egyenlet csak q hányadost, és még y-nak valamely függvényét foglalja magában ; és :

(3-szor.) Ha az adott egyenletnek p és q hányadosok között van helye. Mint 4-dik esetet még azt is fel lehetne hozni, ha $q=c$, de ezen eset az előbbiekben már tárgyaltatott.

(1-ső eset.) Legyen X x-nek valamely függvénye, és álljon e következő egyenlet :

$$q=\frac{d^2y}{dx^2}=X;$$

akkor áll szintén :

$$qdx=Xdx,$$

s mivel $qdx=dp$, lesz :

$$p=\int Xdx+C,$$

minthogy pedig $p=\frac{dy}{dx}$, áll

$$dy=dx\int Xdx+Cdx, \quad \text{következőleg}$$

$$y=\int dx\int Xdx+Cx+C';$$

ez pedig teljes egészlete az adott külzeléki egyenletnek, mivel az, mint látjuk, két, C és C' tetszésszerinti állandót foglal magában, mint annak lennie is kell; minthogy minden második külzeléki hányados csak az által ered, ha az adott függvényt kétszer egymásután külzeljük, mely alkalommal minden egyes külzelésnél elmaradhat egy állandó ; megfordítva is tehát, ha egy másod rendü külzelék egészelendő, annak teljes egészlete, csak kétszeres egymásutáni egészelés által megtalálható, minden egyes egészeléshez pedig egy tetszésszerinti állandó járul még. Mivel azonban ezek az első esetben előforduló külzelékek már a 38)-dik szám alatt kellőleg tárgyaltattak, azokat itt még egyszer elővenni feleslegesnek tartjuk.

(2-dik eset.) Ezen esetnek a feladata az, hogy ha P tényező p-nek valamely függvénye, és $q=P$ egyenlet áll, az x és y közötti viszonyt ezen egyenletből meghatározzuk.

Itt azonnal látjuk, hogy mivel $q=\frac{dp}{dx}$, lesz $dp=Pdx$, következőleg $dx=\frac{dp}{P}$, miből következik :

$$1)\quad x=\int\frac{dp}{P}+C.$$

Mivel továbbá $dy=pdx$, áll szinte $dy=\frac{pdp}{P}$, tehát

$$2)\quad y=\int\frac{pdp}{P}+C'.$$

Ezen két egyenlet által nyilván mind x mind y p-nek függvényében van kifejezve, s mivel ezekben két, C és C' tetszésszerinti állandó fordúl elő, ezek az adott egyenlet teljes egészletének tekintendők. Ha a fenebbi egyenletekben P állandónak vétetik, s azt k-val jegyezzük, nyerni fogjuk :

$$x=\frac{p}{k}+C, \quad \text{és} \quad y=\frac{p^2}{2k}+C',$$

az első egyenlet adja :

$$p=k(x-C),$$

mely érték a másikba tétetvén, lesz :

$$y=\frac{k}{2}(x-C)^2+C'=\frac{kx^2}{2}-kCx+\frac{C^2k}{2}+C'$$

avagy :

$$y=\frac{kx^2}{2}+Cx+D,$$

mely a keresett teljes x és y közötti viszony, minthogy két tetszésszerinti állandóval bír.

Hogy az 1) és 2) alatti egyenleteknek az alkalmazását is lássuk, egészelendő legyen e következő egyenlet:

(1-ső Példa.)

$$ad^2y=dxdy,$$

mely egyenletet így is szabad írni :

$$a.\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx};$$

itt pedig p-nek és q-nak felvett értékeit behozván, lesz :

$$aq=p, \quad \text{miből} \quad q=\frac{p}{a},$$

ámde az előbbiek szerint áll $P=q$, lesz tehát szintén $P=\frac{p}{a}$, miket az általános 1) és 2) alatti egyenletekbe tévén, ered :

$$x=a\int\frac{dp}{p}+C=alogp+C, \quad \text{és}$$

$$y=a\int dp+C'=ap+C', \quad \text{miből}$$

$$p=\frac{y-C'}{a}, \text{ mit } p \text{ helyébe tévén, lesz :}$$

$$x=alog\frac{y-C'}{a}+C,$$

mely kifejezés az adott egyenlet teljes egészlete, mivel két tetszésszerinti állandóval van ellátva.

(2-dik Példa.) Adva legyen e következő egyenlet :

$$a=\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{dxd^2y},$$

mely egyenlet még így is írható :

$$a=\frac{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{d^2y};$$

továbbá p és q-nak értékeit behozván, minthogy

$$dp=qdx=\frac{d^2y}{dx};$$

egyenletünk így áll :

$$a=\frac{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{dp}.dx,$$

ebből pedig kapjuk :

$$dx=\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{és } dy=pdx \text{ miatt :}$$

$$dy=\frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

s ezen egyenletek egészelése által kapjuk :

$$x=A-a\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \text{és}\quad y=B-a\int\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

hol A és B a két tetszésszerinti állandó. Ezen egészletek mind kettője ismert alaku levén, nyilván áll :

$$x=A-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\quad \text{és}\quad y=B+\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Mivel azonban az x és y közötti viszony kerestetik, szükség lesz ezen egyenletekből p-t kiküszöbölni, mi végre áll :

$$A-x=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\quad \text{és}\quad y-B=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

mely egyenleteket négyzetre emelvén, kevés összevonás után nyerni fogjuk :

$$\frac{a^2-(A-x)^2}{(A-x)^2}=\frac{(y-B)^2}{a^2-(y-B)^2},$$

miből könnyü módon e következő eredeti egyenletet találjuk :

$$(y-B)^2+(A-x)^2=a^2,$$

mely egyenlet, minthogy két tetszésszerinti állandót foglal magában, az adott külzeléki egyenlet teljes egészletének tekinthető. Mivel pedig az adott külzeléki egyenlet ismert jelentésü, minthogy a külzeléki hánylat alkalmazásából tudjuk, hogy az nem egyebet, mint a görbületi sugárt állítja elő, mely az érintkezési kör sugarának is neveztetik: a most nyert egyenlet nem lehet egyéb, mint ezen kör egyenlete, melyben az A és B állandók ugyanazon kör középpontjának összrendezői, mint már tudva van előttünk.

(3-dik Példa.) Legyen az adott egyenlet :

$$\frac{dsdy}{d^2x}=\frac{adx}{dy}.$$

Ez egyenletben ds alatt valamely görbe vonal elemének a hosszát kell érteni, s ezt állandónak veszszük, tudván hogy áll: $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Hogy az adott egyenletnek megfelelő x és y közötti viszony meghatároztassék, látjuk, hogy ha p a jelentését megtartja, ezen egyenlet jobb része lesz $=\frac{a}{p}$; hogy pedig ds, dy és d^2x mennyiségek szintén p-nek a függvényében fejeztessenek ki, mindjárt látjuk, hogy :

$$ds = dx\sqrt{1+p^2}, \text{ és } dy = pdx;$$

hogy pedig d^2x határoztassék meg, a $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ egyenlet külzelendő, el nem felejtvén, hogy ds állandónak vétet ett, minek folytán áll:

$$0 = d^2x\sqrt{1+p^2} + \frac{pdpdx}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ miből}$$

$$d^2x = -\frac{pdpdx}{1+p^2},$$

mind ezeket az adott egyenletbe helyettesítvén, lesz:

$$-\frac{dx(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{dp} = \frac{a}{p},$$

miből nyerjük:

$$dx = -\frac{adp}{p(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

és $dy = pdx$ miatt:

$$dy = -\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

m ely egyenleteket egészelvén, lesz:

$$x = A - a\int\frac{dp}{p(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ és } y = A' - a\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

az utolsó egészletet már ez előtt megtaláltuk, áll tehát:

$$y = A' - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Az első egészlet meghatározására pedig tétessék $p = \frac{1}{v}$, s lesz

$dp = -\frac{dv}{v^2}$, s ennek folytán

$$dx = \frac{av^3dv}{v(v^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{av^2dv}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mit így is lehet írni:

$$dx = \frac{adv}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{adv}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

miből egészelés által kapjuk:

$$x = A - \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} + a\log(v + \sqrt{1+v^2}),$$

és ha v helyébe értékét vissza-helyettesítjük, lesz:

$$x=A-\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}+a\log\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p};$$

így tehát mind x mind y p-nek függvényében volna kifejezve, és ha ezen két egyenletből p-t kiküszöböljük, a keresett x és y közötti viszonyt fogjuk nyerni, s így az egészelés megtörténtnek tekintendő.

(3-dik eset.) Ezen eset akkor áll be, ha $q=\frac{d^2y}{dx^2}$ második külzeléki hányados y-nak valamely függvénye, mely függvény ha Y-al jegyeztetik, áll :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Y,$$

mely kifejezés már ismeretes előttünk, mert $2dy$-nal szorozván ezen egyenlet mind két részét, nyerni fogjuk :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int Ydy+A,$$

hol A az egészelésnek állandója, ebből pedig kapjuk :

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{A+2\int Ydy}},$$

mely egyenlet egészlete ez :

$$x=A'+\int\frac{dy}{\sqrt{A+2\int Ydy}},$$

ez pedig az adott külzeléki egyenletnek teljes egészlete, mivel két tetszésszerinti állandóval bír, egyszersmind pedig a keresett x és y közötti viszonyt állítja elő. Példa gyanánt legyen :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{ay}},$$

akkor ezt $2dy$-al szorozván, lesz :

$$\frac{2dyd^2y}{dx^2}=\frac{2dy}{\sqrt{ya}},$$

miből egészelés által nyerjük :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=A+2\int\frac{dy}{\sqrt{ay}},$$

miből az előbbiek szerint kapjuk :

$$x=\sqrt[4]{a}\int\frac{dy}{\sqrt{A\sqrt{a}+4\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt[4]{a}}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{n\sqrt{a}+\sqrt{y}}}+A',$$

ha t. i. $\frac{A}{4}=n$ tétetik.

Ha itt az egészelés kieszközlésére iratik : $\sqrt{y}=z$, tehát $y=z^2$ és $dy=2zdz$, továbbá rövidség okáért $n\sqrt{a}=b$, lesz :

$$\int\frac{dy}{\sqrt{n\sqrt{a}+\sqrt{y}}}=2\int\frac{zdz}{\sqrt{b+z}}=\frac{4}{3}(z-2b)\sqrt{b+z},$$

és ha z helyett y-ban kifejezett érték tétetik, lesz :

$$x=\frac{2\sqrt[4]{a}}{3}(\sqrt{y}-2n\sqrt{a})\sqrt{n\sqrt{a}+\sqrt{y}}+A', \text{ miből :}$$

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a}}-A'=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2n\sqrt{a})\sqrt{n\sqrt{a}+\sqrt{y}}, \text{ avagy}$$

$$\frac{x-A'\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2n\sqrt{a})\sqrt{n\sqrt{a}+\sqrt{y}},$$

és ha $A'\sqrt[4]{a}=-k$ tétetik, ered :

$$\frac{3(x+k)}{2\sqrt[4]{a}}=(\sqrt{y}-2n\sqrt{a})\sqrt{n\sqrt{a}+\sqrt{y}},$$

mit négyzetre emelvén, nyerni fogjuk :

$$\frac{9(x+k)^2}{4\sqrt{a}}=y\sqrt{y}-3ny\sqrt{a}+4n^3a\sqrt{a},$$

mely már a keresett x és y közötti viszony. Több példát itt előhozni felesleges volna, minthogy ezen alaku egészlet úgy is már a 38)-dik szám alatt kellőleg tárgyaltatott.

73.) **(Azon külzeléki egyenletek egészélése, melyekben p és q hányadosokon kivül még x is fordúl elő.)** A külzeléki egyenletek ezen nemét csak úgy lehet egészelni, ha ügyes helyettesítés által, azt első rendü és első foku külzeléki egyenletre visszahozzuk. Minthogy t. i. a kérdéses egyenlet p, q és x változókat foglalja magában, és $q=\frac{dp}{dx}$: ha ezen értéket q helyébe írjuk az adott egyenletben, q hányados nyilván el fog tűnni, és a hátramaradó egyenlet csak x és p változókat fogja tartalmazni magában; s első rendü lesz, melynek egészelése ha sikerül, vagy x p-nek, vagy p x-nek függvényében fog nyeretni, mivel pedig $p=\frac{dy}{dx}$, ennek helyettesítése és új egészelése által, a keresett x és y közötti viszony fog megtaláltatni.

Tegyük fel tehát, hogy p hányados x-nek függvényében találtatott meg, úgy hogy áll $p=X$, akkor $dy=pdx$ miatt áll: $dy=Xdx$, tehát:

$$1) \quad y=\int Xdx+A,$$

mely egyenlet már az x és y közötti viszonyt terjeszti elő.

Ha pedig azt teszszük föl, hogy x változó p-nek függvényében találtatott volna meg, úgy hogy $x=P$ legyen, értvén P alatt p-nek valamely függvényét, akkor áll: $dx=dP$, tehát $pdx=pdP$, mivel pedig $dy=pdx$, lesz szintén

$$dy=pdP, \text{ miből:}$$

$$y=\int pdP+A',$$

mely egyenletet részletesen egészelvén, áll még:

$$2) \quad y=P.p-\int Pdp+A'.$$

Ha pedig azon eset állna be, hogy sem x-et p-nek, sem p-t x-nek függvényében könnyen nem lehetne meghatározni, akkor mind a két változót valamely harmadik u változónak függvényében kell kifejezni úgy, hogy ha $x=U$ és $p=U'$, értvén U és U' alatt u-nak függvényeit, akkor lesz $dx=dU$, és $dy=pdx$ miatt lesz:

$$dy=U'dU, \text{ miből:}$$

$$y=\int U'dU+C,$$

mely egészlet teljesen meghatározható. Következő példák az ez esetbeni eljárást felvilágosítják:

(1-ső Példa.) Az egészelendő egyenlet e következő:

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}=X,$$

hol X x-nek valamely függvénye. Ezen egyenletet mindenekelőtt így szabad írni:

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=X, \text{ s mivel } q=\frac{dp}{dx}, \text{ lesz még:}$$

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}\cdot dx=X,$$

miből könnyü módon kapjuk :

$$\frac{dx}{X}=\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ következőleg}$$

$$\int\frac{dx}{X}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}};$$

mivel pedig X x-nek függvénye, ezen egyenlet bal része is könnyen meghatározható; tegyük fel tehát, hogy

$$\int\frac{dx}{X}=V, \text{ akkor áll :}$$

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=V, \text{ miből : } p=V\sqrt{1+p^2}, \text{ tehát :}$$

$$p=\frac{V}{\sqrt{1-V^2}},$$

s mivel $p=\frac{dy}{dx}$, áll :

$$y=\int\frac{Vdx}{\sqrt{1-V^2}}+C,$$

mely egészlet teljesen meghatározható, és az x és y közötti viszonyt terjeszti elő. Például legyen : $X=a\sqrt{x}$, lesz :

$$\int\frac{dx}{X}=\frac{2\sqrt{x}}{a}=V, \text{ következőleg}$$

$$y=\int\frac{2dx\sqrt{x}}{\sqrt{a^2-4x}}+C=\int\frac{2xdx}{\sqrt{a^2x-4x^2}}+C,$$

és ha $\frac{a^2}{4}=b$ iratik, lesz :

$$y=\int\frac{xdx}{\sqrt{bx-x^2}}+C,$$

mely egészlet a 24)-dik szám VII) alatti képlete szerint teljesen meghatározható, tehát a keresett x és y közötti viszonyt terjeszti elő :

(2-dik Példa.) Adatik e következő egyenlet :

$$dx(dx^2+dy^2)+xdyd^2y=ad^2y\sqrt{dx^2+dy^2},$$

mely egyenlet $d^2y=dpdx$ miatt így is írható :

$$dx(1+p^2)+xpdp=adp\sqrt{1+p^2}, \text{ avagy :}$$

$$dx\sqrt{1+p^2}+\frac{xpdp}{\sqrt{1+p^2}}=adp,$$

ezen egyenlet pedig azonnal egészelhető, minthogy látjuk, hogy annak bal része, $x\sqrt{1+p^2}$ szorzatnak teljes külzeléke, áll tehát:

$$x\sqrt{1+p^2}=ap+b, \text{ miből:}$$

$$1) \quad x=\frac{ap+b}{\sqrt{1+p^2}},$$

hol b a tetszésszerinti állandó, és ezen egyenlet által x változó p-nek függvényében terjesztetik elő. Hogy pedig y-t is meghatározni, s így p-t kiküszöbölni lehessen, áll:

$$y=\int pdx, \quad \text{avagy:} \quad y=px-\int xdp,$$

hol x helyébe a fenebbi értéket tévén, lesz:

$$y=\frac{ap^2+bp}{\sqrt{1+p^2}}-\int\frac{(ap+b)dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

mit így is írhatni:

$$y=\frac{ap^2+bp}{\sqrt{1+p^2}}-a\int\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}-b\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

mely egészletek ismeretesek lévén, áll:

$$y=\frac{ap^2+bp}{\sqrt{1+p^2}}-a\sqrt{1+p^2}-b\log(p+\sqrt{1+p^2}),$$

mit rövidebben így is lehet írni:

$$2) \quad y=\frac{bp-a}{\sqrt{1+p^2}}-b\log(p+\sqrt{1+p^2}).$$

Hogy végre az x és y közötti viszonyt meg lehessen határozni, p-nek értéke kikeresendő, lesz az 1) alatti egyenletből, lesz pedig:

$$p=\frac{ab+x\sqrt{b^2+a^2-x^2}}{x^2-a^2}, \text{ minek folytán áll:}$$

$$bp-a=\frac{\sqrt{b^2+a^2-x^2}(bx+a\sqrt{b^2+a^2-x^2})}{x^2-a^2};$$

hasonló módon találjuk meg szintén:

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{bx+a\sqrt{b^2+a^2-x^2}}{x^2-a^2}, \text{ végre:}$$

$$p+\sqrt{1+p^2}=\frac{b+\sqrt{b^2+a^2-x^2}}{x-a},$$

s mind ezeknek helyettesitése adja:

$$y=\sqrt{b^2+a^2-x^2}-b\log\frac{b+\sqrt{b^2+a^2-x^2}}{x-a},$$

s ez a keresett x és y közötti viszony.

(3-dik Példa.) Legyen egészelendő:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot a^2\sqrt{a^2+x^2}+a^2\frac{dy}{dx}=x^2,$$

mely egyenletet még így kell írni:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},$$

mivel pedig áll:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx} \text{ és } \frac{dy}{dx}=p, \text{ áll még:}$$

$$dp+\frac{pdx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^2dx}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},$$

itt azonnal látjuk, hogy $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ külzelék $(x+\sqrt{a^2+x^2})$ függvény külzeléke, ha tehát ezzel szorozzuk az utolsó egyenlet mind két részét, lesz:

$$dp(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{pdx(x+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^2dx(x+\sqrt{a^2+x^2})}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},$$

mi által ezen egyenlet bal része egészelhetővé vált, minthogy az nyilván $p(x+\sqrt{a^2+x^2})$ szorzat külzeléke, áll tehát:

$$p(x+\sqrt{a^2+x^2})=\int\frac{x^2dx(x+\sqrt{a^2+x^2})}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C,$$

hol C a tetszésszerinti állandó; ezen egyenlet még így is irható:

$$p(x+\sqrt{a^2+x^2})=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x^3}{3a^2}+C,$$

az ismert minta szerint továbbá áll:

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^2\sqrt{a^2+x^2}}{3}-\frac{2a^2}{3}\sqrt{a^2+x^2},$$

s ennek folytán kapjuk:

$$p(x+\sqrt{a^2+x^2})=\frac{(x^2-2a^2)\sqrt{x^2+a^2}+x^3}{3a^2}+C;$$

ha ezen egyenletet $(x-\sqrt{a^2+x^2})$ különbséggel szorozzuk, lesz:

$$a^2p=\frac{[(x^2-2a^2)\sqrt{a^2+x^2}+x^3](\sqrt{a^2+x^2}-x)}{3a^2}+$$
$$C\sqrt{a^2+x^2}-Cx,$$

minek rövidítése után áll még :

$$a^2p=\frac{-x^2-2a^2+2x\sqrt{a^2+x^2}}{3}+C\sqrt{a^2+x^2}-Cx;$$

mivel végre $p=\frac{dy}{dx}$, könnyü módon nyerjük :

$$y=-\frac{x^3}{9a^2}-\frac{2}{3}x-\frac{Cx^2}{2a^2}+\frac{2}{3a^2}\int xdx\sqrt{a^2+x^2}+$$
$$\frac{C}{a^2}\int dx\sqrt{a^2+x^2}+C',$$

hol C' a második egészelésnek állandója. Minthogy az itt előfordúló két egészlet könnyen meghatározható, a kérdéses x és y közötti viszony teljesen megtaláltnak tekintendő. Ha az állandók elenyészőknek vétetnek, akkor áll :

$$9a^2y+6a^2x+x^3=2(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2},$$

mely szinte egy de nem teljes x és y közötti viszony.

(4-dik Példa.) Az adott külzeléki egyenlet legyen :

$$(a^2dy^2+x^2dx^2)d^2y=nxdx^3dy,$$

melyet dx^3-al elosztván, $dp=\frac{d^2y}{dx}$, és $dy=pdx$ állván, lesz még:

$$(a^2p^2+x^2)dp=npxdx,$$

ez pedig nyilván x-re és p-re nézve egynemü egyenlet, melyben tehát $x=pu$ tétetvén, lesz $dx=pdu+udp$, s áll :

1.) $(a^2+u^2)dp=npudu+nu^2dp$, miből :

$$\frac{dp}{p}=\frac{nudu}{a^2+(1-n)u^2},$$

minek egészelése adja :

$$logp=n\int\frac{udu}{a^2+(1-n)u^2}+C;$$

mivel pedig ezen egészlet értéke szinte logarithmus, az állandó szinte logarithmus lesz, s így áll :

$$logp=\frac{n}{2(1-n)}log[a^2+(1-n)u^2]+logC,$$

miből, minthogy a logarithmusok egyenlősége a számok egyenlőségét is maga után vonja, áll :

$$p=C[a^2+(1-n)u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}}, \text{ és } x=pu \text{ miatt :}$$

$$2.)\quad x=Cu[a^2+(1-n)u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}},$$

mely egyenlet x-et adja u-nak függvényében, hogy tehát y is u-nak függvényében határoztassék meg, tudjuk hogy áll :

$$dy=pdx, \quad \text{tehát}$$

$$y=px-\int xdp \ldots\ldots (3)$$

mivel pedig

$$px=C^2u[a^2+(1-n)u^2]^{\frac{n}{1-n}}, \quad \text{továbbá}$$

$$dp=Cn.udu[a^2+(1-n)u^2]^{\frac{3n-2}{2(1-n)}},$$

ezeknek helyettesítése adja :

$$4.)\quad y=C^2u[a^2+(1-n)u^2]^{\frac{n}{1-n}}-C^2n\int u^2du[a^2+(1-n)u^2]^{\frac{2n-1}{1-n}},$$

mely egyenlet y-t adja u-nak függvényében, míhelyt az utolsó egészlet meghatározható. Azon esetre ha $n=1$, az 1) alatti egyenlet átmegy :

$$\frac{dp}{p}=\frac{udu}{a^2}\text{-re} \quad \text{miből} \quad logp=\frac{u^2}{2a^2}+logc,$$

avagy

$$log\frac{p}{c}=\frac{u^2}{2a^2}, \quad \text{miből} \quad u=a\sqrt{2log\frac{p}{c}}, \quad \text{tehát}$$

$$x=ap\sqrt{2log\frac{p}{c}}.$$

Az y változó pedig a 2) alatti egyenlet szerint lesz :

$$y=ap^2\sqrt{2log\frac{p}{c}}-a\sqrt{2}\int pdplog.\frac{p}{c},$$

s így mind x mind y p-nek függvényében van kifejezve, mely két egyenletből ha p-t kiküszöböljük, meg lesz a keresett x és y közötti egyenlet. Ha a 2) és 4) alatti egyenletekben $n=\frac{1}{2}$ tétetik, lesz :

$$x=Cu\left(a^2+\frac{1}{2}u^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{továbbá}$$

$$y=C^2u\left(a^2+\frac{1}{2}u^2\right)-\frac{C^2u^3}{6}=C^2u\left(a^2+\frac{2}{3}u^2\right),$$

mi által tehát ezen kifejezések betüszámtaniakká váltak, s ugyanaz áll be e következő esetekben is:

$$n=\frac{2}{3},\ n=\frac{3}{4},\ n=\frac{4}{5},\ \ldots\ \text{s. i. t.}$$

(5-dik Példa.) Adva van e következő egyenlet:

$$adxdy^2+x^2dxd^2y=nxdy\sqrt{dx^4+a^2(d^2y)^2}.$$

Ha a behozott p és q-nak értékei tekintetbe vétetnek, ezen egyenletet még is lehet írni:

$$ap^2+x^2q=npx\sqrt{1+a^2q^2},$$

mely egyenlet x és p változókra nézve egynemü; tévén tehát $p=ux$, mind p mind x el fog tünni, s áll:

$$1)\quad au^2+q=nu\sqrt{1+a^2q^2};$$

mivel pedig $dp=udx+xdu$, továbbá $dp=qdx$, áll szintén:

$$qdx=udx+xdu,$$

miből következik:

$$2)\quad \frac{dx}{x}=\frac{du}{q-u};$$

hogy pedig ezen egyenlet jobb része tisztán csak u-nak függvényében fejeztessék ki, q-nak az értéke a fenebbi 1) alatti egyenletből kiveendő lesz, mely egyenletet ha négylegeljük, nyerni fogjuk:

$$q^2-\frac{2au^2q}{n^2a^2u^2-1}=\frac{a^2u^4-n^2u^2}{n^2a^2u^2-1},$$

miből kevés összevonás után kapjuk:

$$q=\frac{au^2+uu\sqrt{1-a^2n^2u^2+a^4u^4}}{a^2n^2u^2-1},$$

ennek folytán továbbá áll:

$$q-u=\frac{u(1+au-a^2n^2u^2)+nu\sqrt{1-a^2n^2u^2+a^4u^4}}{a^2n^2u^2-1},$$

ezen érték pedig ha a fenebbi 2) egyenletbe helyettesíttetik, lesz:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u}\cdot\frac{a^2n^2u^2-1}{1+au-a^2n^2u^2+n\sqrt{1-a^2n^2u^2+a^4u^4}},$$

mely egyenlet, hogy egészelésre alkalmasabb legyen, jó lesz bal részének mind számlálóját mind nevezőjét

$$(1+au-a^2u^2n^2)-n\sqrt{1-a^2n^2u^2+a^4u^4}$$

különbséggel szorozni, mely alkalommal a nevező a négyzetek különbségét adja, ezt pedig jó lesz ezen szorzókra bontani:

$$(1-a^2n^2u^2)^2+2au(1-a^2n^2u^2)+a^2u^2-n^2(1-a^2n^2u^2)-n^2a^4u^4$$
$$=(1-a^2n^2u^2)[a^2u^2(1-n^2)+1-n^2+2au]$$
$$=(a^2n^2u^2-1)[n^2-1-2au+a^2u^2(n^2-1)],$$

miknek következtében a fenebbi egyenlet még így áll:

$$3)\qquad \frac{dx}{x}=\frac{du}{u}.\frac{(1+au-a^2n^2u^2)-n\sqrt{1-a^2n^2u^2+a^4u^4}}{n^2-1-2au+(n^2-1)a^2u^2}.$$

Ezen egyenlet pedig ha egészeltetik, nyerni fogjuk x-et u-nak függvényében; mivel pedig $p=ux$, lesz p szintén u-nak függvénye, továbbá $dy=pdx$ miatt, tehát $y=\int pdx$, lesz szintén $y=\int uxdx$, mi tisztán x-nek függvénye levén, az x és y közötti viszony meg lesz találva. Különös eset áll elő ezen egyenletnél akkor, ha $n^2=2$, tehát $n=\sqrt{2}$, melyben a fenebbi 3) egyenlet ebbe megy át:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u}.\frac{1+au-2a^2u^2-(1-a^2u^2)\sqrt{2}}{(1-au)^2};$$

mivel pedig $1+au-2a^2u^2=(1+2au)(1-au)$, áll még:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u}.\frac{1+2au-(1-au)\sqrt{2}}{1-au},$$

mely kifejezés számlálóját még így is szabad írni:

$$1+3au-au-\sqrt{2}-2au\sqrt{2}+au\sqrt{2}$$
$$=(1-au)(1-\sqrt{2})+au(3-2\sqrt{2}),$$

s így a fenebbi egyenlet még így is áll:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du(1-\sqrt{2})}{u}+\frac{adu(3-2\sqrt{2})}{1-au},$$

mely egyenlet egészlete e következő:

$$logx=(1-\sqrt{2})logu-(3-2\sqrt{2})log(1+au)+logC$$

avagy:

$$logx=logu^{1-\sqrt{2}}-log(1-au)^{3-2\sqrt{2}}+logC,\quad \text{miből}$$
$$xu^{\sqrt{2}-1}(1-au)^{3-2\sqrt{2}}=C,$$

ez pedig az x és u közötti egyenlet, melyből a keresett x és y közötti viszony könnyen megtaláltatik.

74.) (Egyenletek, melyekben p és q hányadosokon kivül még y is fordúl elő.) Ilyemü külzeléki egyenletek egészelése legjobban eszközölhető az által, ha azokat bizonyos ügyes helyettesítés által első rendü egészletekre visszahozzuk, minek megtörténte után, az egészelés már könnyebbé válik. Ezen egyenletek legegyszerübb alakja ez :

$$1)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=0,$$

melyben A és B állandó mennyiségeket jelent. Hogy ezt első rendü egyenletre szállítsuk le, tudjuk hogy áll: $dy=pdx$ és $q=\frac{dp}{dx}$, továbbá áll szintén $dx=\frac{dy}{p}$, tehát $q=\frac{pdp}{dy}$; s már látjuk, hogy ha ezen értékeket a fen adott egyenletbe helyettesítjük, ez úgy fog átalakíttatni, hogy az y és p között csak első rendü lesz, tehát vagy p y-nak, vagy y p-nek függvényében könnyen kifejezhető; még pedig ha y p-nek függvényében könnyebben volna kifejezhető, akkor tehetjük $y=P$, értvén P alatt p-nek valamely függvényét, s lesz $dy=dP$; mivel pedig $dx=\frac{dy}{p}$, áll még: $dx=\frac{dP}{p}$, tehát

$$x=\int\frac{dP}{p},\quad \text{avagy}\quad x=\frac{P}{p}+\int\frac{Pdp}{p^2},$$

mi által tehát x adatik p-nek függvényében.

Ha azonban könnyebb volna, p-t y-nak függvényében kifejezni, akkor írhatjuk : $p=Y$, értvén Y alatt y-nak valamely függvényét, s ekkor $dx=\frac{dy}{p}$ miatt lesz :

$$dx=\frac{dy}{Y},\quad \text{miből}\quad x=\int\frac{dy}{Y}+C,$$

s így x megvan y-nak függvényében. Ha pedig a dolog úgy állna, hogy sem p t y-nak, sem y-t p-nek függvényében könynyen nem lehetne kifejezni : akkor szükség lesz egy új u változónak behozása, mi által könnyíttetni fog az egészelés. Azon feltét alatt tehát, hogy az adott 1) alatti egyenlet lenne egészelendő, akkor azt nyilván még így is szabad írni :

$$q+Ap+By=0,$$

hol q helyébe a fen talált érték tétetvén, lesz :

$$\frac{pdp}{dy}+Ap+By=0,\quad \text{avagy}$$

$$pdp+Apdy+Bydy=0,$$

mely egyenlet p és y között nem csak első rendü, hanem egyszersmind egynemü is, tehát $p=uy$ helyettesítés által egészelhető, áll t. i. $dp=udy+ydu$, minek helyettesítése adja :

$$dy(u^2+Au+B)+uydu=0, \quad \text{miből}$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{udu}{u^2+Au+B}=0,$$

minek folytán egészelés által kapjuk :

$$logy+\int\frac{udu}{u^2+Au+B}=C.$$

Hogy a még hátra-levő egészlet meghatároztassék, vegyük fel, hogy $(u+m)$ és $(u+n)$ azon két egyszerü szorzó, melyek szorzásából az (u^2+Au+B) szorzat ered, s lesz nyilván $A=m+n$ és $B=mn$, és ha az $\frac{u}{(u+m)(u+n)}$ törtet részlettörteire bontjuk, nyerni fogjuk :

$$logy+\frac{m}{m-n}\int\frac{du}{u+m}-\frac{n}{m-n}\int\frac{du}{u+n}=C, \text{ következőleg}$$

$$logy+\frac{m}{m-n}log(u+m)-\frac{n}{m-n}log(u+n)=logC,$$

mely kifejezésből könnyü módon kapjuk :

$$y=C(u+n)^{\frac{n}{m-n}}.(u+m)^{-\frac{m}{m-n}};$$

mivel pedig $p=uy$, áll szintén :

$$p=Cu(u+n)^{\frac{n}{m-n}}.(u+m)^{-\frac{m}{m-n}},$$

minthogy továbbá áll : $dx=\frac{dy}{p}=\frac{dy}{uy}$, áll szintén :

$$dx=-\frac{du}{u^2+Au+B},$$

miből szétbontás útján nyerjük :

$$x=\frac{1}{m-n}\int\frac{du}{u+n}-\frac{1}{m-n}\int\frac{du}{u+m},$$

minek egészelése után lesz :

$$x=\frac{1}{m-n}log\frac{u+n}{u+m}+C,$$

tehát mind x mind y u által van kifejezve, u-nak kiküszöbölése által tehát a keresett x és y közötti viszony jön létre.

Azonban sokkal csinosabb módon fog az adott egyenlet egészelése véghez vitetni, ha megfontoljuk, hogy áll:

$$\frac{dy}{y}=\frac{ndu}{(m-n)(u+n)}-\frac{mdu}{(m-n)(u+m)},\text{ továbbá:}$$

$$mdx=-\frac{mdu}{(m-n)(u+n)}+\frac{mdu}{(m-n)(u+m)},$$

miknek összeadásából ered:

$$\frac{dy}{y}+mdx=-\frac{du}{u+n},$$

és hasonló módon nyerjük:

$$\frac{dy}{y}+ndx=-\frac{du}{u+m},$$

mely egyenletekből azonnal kapjuk:

$$logy+mx=loga-log(u+n),\text{ és}$$
$$logy+nx=logb-log(u+m),$$

melyekben $loga$ és $logb$ az állandók logarithmusai. Ezen két egyenletből pedig következik:

$$log\frac{(u+n)y}{a}=-mx,\text{ és } log\frac{(u+m)y}{b}=-nx,$$

és ha e a természetes logarithmusok alapszáma, lesz még:

$$u+n=\frac{a}{y}e^{-mx},\text{ továbbá: } u+m=\frac{b}{y}e^{-nx},$$

mely két egyenlet kivonása által ered:

$$m-n=\frac{1}{y}[be^{-nx}-ae^{-mx}],\text{ avagy:}$$

$$1=\frac{1}{y}\left[\frac{b}{m-n}\cdot e^{-nx}-\frac{a}{m-n}e^{-mx}\right],$$

és az állandók változtatása után:

$$\alpha).\quad y=A'e^{-mx}+B'e^{-nx},$$

mely egyenlet, minthogy két tetszésszerinti állandóval bír, az adott egyenlet teljes egészletének tekintendő.

Itt azonban meg kell jegyeznünk, hogy a most megtalált egészlet csak azon esetre áll, ha az $(u+m)$ és $(u+n)$ szorzók valósak és nem egyenlők, avagy inkább: ha az $u^2+Au+B=0$ egyenlet gyökei, melyeket $-m$ és $-n$ által jelöltünk, valósak és nem egyenlők. Hátra van tehát megmutatni, mily egészlettel bír az adott egyenlet azon esetre, ha a fen említett egyenlet gyökei vagy egyenlők, vagy képzetesek.

E végre mindenek előtt szükség lesz, az m és n mennyiségeket A és B tényezők által fejezni ki, mit e következő egyenletek által lehet eszközölni:

$$A=m+n\,, \text{ és } B=mn\,, \text{ áll t. i.}$$

$$A^2=m^2+2mn+n^2, \text{ tehát: } \frac{1}{4}A^2=\frac{m^2}{4}+\frac{mn}{2}+\frac{n^2}{4},$$

miből B-t kivonván, lesz:

$$\frac{1}{4}A^2-B=\frac{m^2}{4}-\frac{mn}{2}+\frac{n^2}{4}=\left(\frac{m-n}{2}\right)^2, \text{ következőleg}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}=\frac{m-n}{2}, \text{ és } \frac{1}{2}A=\frac{m+n}{2}, \text{ honnan:}$$

$$m=\frac{1}{2}A+\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}, \text{ és } n=\frac{1}{2}A-\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B},$$

mely kifejezésből már világosan látjuk, hogy $\frac{1}{4}A^2>B$ esetre a kérdéses egyenlet gyökei valósak de nem egyenlők.

$B>\frac{1}{4}A^2$ esetre azonban, már a gyökök képzetesek lesznek, végre: $B=\frac{1}{4}A^2$, tehát: $\frac{1}{4}A^2-B=0$ esetre az említett egyenlet gyökei egyenlők lesznek. Három eset lenne tehát itt megvizsgálandó, s vegyük fel legelőször; hogy:

$\frac{1}{4}A^2>B$, s tegyük rövidség okáért:

$$\frac{1}{2}A=k, \text{ és } \sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}=r\,, \text{ lesz:}$$

$$m=k+r\,, \quad \text{és} \quad n=k-r\,,$$

miket a fenebbi általános α) alatti egyenletbe tévén, nyerni fogjuk:

$$y=A'e^{-(k+r)x}+B'e^{-(k-r)x}=e^{-kx}.(A'e^{-rx}+B'e^{rx})\,,$$

mely kifejezés az első esetnek teljesen megfelel.

Vegyük a második esetben: $B>\frac{1}{4}A^2$, akkor megint tehetjük:

$$\frac{1}{2}A=k \text{ és } \sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}=r\sqrt{-1}, \text{ lesz :}$$

$$m=k+r\sqrt{-1} \text{ és } n=k-r\sqrt{-1}, \text{ következőleg}$$

$$y=e^{-kx}.[A'e^{-rx\sqrt{-1}}+B'e^{rx\sqrt{-1}}],$$

mivel pedig a külzeléki hánylatból tudjuk, hogy áll :

$$e^{rx\sqrt{-1}}=cosrx+\sqrt{-1}sinrx, \text{ és } e^{-rx\sqrt{-1}}=cosrx-\sqrt{-1}sinrx,$$

ezeknek helyettesítése, e következő eredményre vezet :

$$y=e^{-kx}[(A'+B')cosrx+(B'-A')\sqrt{-1}sinrx],$$

és az állandók változtatása után :

$$y=e^{-kx}(C.cosrx+C'sinrx),$$

mely teljes egészlet a második esetnek felel meg.

Végre a harmadik esetben, melyben áll : $\frac{1}{4}A^2-B=0$, lesz nyilván $r=0$, mivel pedig tehető :

$$e^{rx}=1+rx, \quad \text{és} \quad e^{-rx}=1-rx,$$

ha t. i. a sor felsőbb hatványai elhanyagoltatnak, α) képletünk szerint lesz :

$$y=e^{-kx}((A'+B')+(B'r-A'r)x),$$

és az állandók megváltoztatása után :

$$y=e^{-kx}.(C+C'x),$$

s ez a harmadik esetnek megfelelő teljes egészlete az adott külzeléki egyenletnek. Tárgyaljuk még e következő példákat :

(1-ső Példa.) Az adott egyenlet e következő :

$$abd^2y=dx\sqrt{y^2dx^2+a^2dy^2},$$

melyet még így lehet írni :

$$abq=\sqrt{y^2+a^2p^2}, \quad \text{és} \quad q=\frac{pdp}{dy} \quad \text{miatt}$$

$$abpdp=dy\sqrt{y^2+a^2p^2},$$

mely egyenlet mint látjuk p és y-ra nézve egynemü, ezen változókat tehát szét lehet választani, ha $p=\frac{y}{u}$ tétetik, minek folytán lesz :

$$dp=\frac{udy-ydu}{u^2},$$

s ennek helyettesítése adja :

$$1) \quad \frac{dy}{y}=\frac{abdu}{abu-u^2\sqrt{a^2+u^2}}=\frac{du}{u}.\frac{ab}{ab-u\sqrt{a^2+u^2}}.$$

Hogy pedig ezen kifejezést egészelni lehessen, mindenekelőtt az okszerütlenséget kell eltüntetni, mivégre teendő :

$$\sqrt{a^2+u^2}=su, \text{ s lesz } u^2=\frac{a^2}{s^2-1}, \text{ tehát}$$

$$\frac{du}{u}=-\frac{sds}{s^2-1},$$

minek helyettesítése adja :

$$\frac{dy}{y}=-\frac{bsds}{bs^2-as-b}, \text{ és tévén } \frac{a}{b}=2c, \text{ lesz}$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{sds}{s^2-2cs-1};$$

ezen egyenlet jobb részének egészelésére látjuk, hogy a nevező egyszerü szorzói $=(s-c-\sqrt{c^2+1})$ és $(s-c+\sqrt{c^2+1})$, ha tehát az $\frac{s}{s^2-2cs-1}$ törtet részlet-törteire bontjuk, lesz :

$$\frac{s}{s^2-2sc-1}=\frac{c+\sqrt{c^2+1}}{2\sqrt{c^2+1}(s-c-\sqrt{c^2+1})}$$
$$-\frac{c-\sqrt{c^2+1}}{2\sqrt{c^2+1}(s-c+\sqrt{c^2+1})},$$

minek folytán könnyen jutunk e következő egészletre :

$$2\sqrt{c^2+1}.logy=-(c+\sqrt{c^2+1})\int\frac{ds}{s-c-\sqrt{c^2+1}}+$$
$$(c-\sqrt{c^2+1})\int\frac{ds}{s-c+\sqrt{c^2+1}},$$

s az egészelés megtörténte után :

$$logy^{2\sqrt{c^2+1}}=logC(s-c+\sqrt{c^2+1})^{c-\sqrt{c^2+1}}$$
$$-log(s-c-\sqrt{c^2+1})^{c+\sqrt{c^2+1}},$$

mely egyenletet még így is írhatni :

$$2) \quad y^{2\sqrt{c^2+1}}=\frac{C[s-c+\sqrt{c^2+1}]^{c-\sqrt{c^2+1}}}{[s-c-\sqrt{c^2+1}]^{c+\sqrt{c^2+1}}},$$

mely egyenlet segítségével y-t kapjuk s-nek függvényében; legyen tehát $y=S$, értvén S alatt s-nek valamely függvényét, lesz $dy=dS$, és mivel $p=\frac{y}{u}$ lesz szintén $p=\frac{S}{u}$, ámde

$$u=\frac{a}{\sqrt{s^2-1}}, \text{ következőleg}$$

$$p=\frac{S\sqrt{s^2-1}}{a},\quad \text{végre}\quad dx=\frac{dy}{p}\quad \text{miatt áll}$$

$$dx=\frac{adS}{S\sqrt{s^2-1}}=-\frac{asds}{(s^2-2cs-1)\sqrt{s^2-1}},$$

mi által tehát x szintén s-nek függvényében van kifejezve, s mivel ebből a kifejezésből az okszerütlenség könnyen eltüntethető, az egészelés nem járand nehézséggel. Lesz tehát előttünk két egyenlet, melyekből ha s-et kiküszöböljük, a keresett x és y közötti viszonyt fogjuk nyerni.

(2-dik Példa.) Adva van e következő egyenlet:

$$dy^2-yd^2y=n\sqrt{dx^2dy^2+a^2(d^2y)^2},$$

mely egyenletet még így is írhatni:

$$\frac{dy^2}{dx^2}-y.\frac{d^2y}{dx^2}=n\sqrt{\frac{dy^2}{dx^2}+a^2.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

és ha itt is p és q-nak értékeit behozzuk, lesz:

$$p^2-qy=n\sqrt{p^2+a^2q^2},$$

ez egyenletben pedig ha $q=pu$, és $q=\frac{pdp}{dy}$ miatt $\frac{pdp}{dy}=pu$ tétetik, minek folytán lesz: $dp=udy$, álland:

$$p-uy=n\sqrt{1+a^2u^2},$$

mely egyenletet külzelvén, nyerni fogjuk:

$$dp-udy-ydu=\frac{na^2udu}{\sqrt{1+a^2u^2}},$$

és ha itt dp-nek fenebbi értéke tekintetbe vétetik, lesz:

$$-ydu=\frac{na^2udu}{\sqrt{1+a^2u^2}},\quad \text{avagy:}$$

$$du\left[y+\frac{na^2u}{\sqrt{1+a^2u^2}}\right]=0,$$

miből külön-külön állnia kell:

$$du=0,\quad \text{és}\quad y+\frac{na^2u}{\sqrt{1+a^2u^2}}=0,$$

ezen egyenletek elseje adja:

$$u=c \text{ tehát } dp=cdy, \text{ miből } p=cy+b, \text{ és}$$

$$dx=\frac{dy}{p}\quad \text{miatt áll szintén}\quad dx=\frac{dy}{cy+b}\quad \text{miből}$$

$$x=\frac{1}{c}log(cy+b)+c', \quad \text{avagy} \quad cx=log(cy+b)+c',$$

hol c' az egészelésnek állandója. A második egyenlet adja:

$$y=-\frac{na^2u}{\sqrt{1+a^2u^2}},$$

mivel pedig áll:

$$\int dp=\int udy=uy-\int ydu,$$

ha y helyébe az érték tétetik, lesz:

$$p=uy+n\int\frac{a^2udu}{\sqrt{1+a^2u^2}}=uy+n\sqrt{1+a^2u^2}, \quad \text{avagy}$$

$$p=-\frac{na^2u^2}{\sqrt{1+a^2u^2}}+\frac{n+na^2u^2}{\sqrt{1+a^2u^2}},$$

tehát rövidebben:

$$p=\frac{n}{\sqrt{1+a^2u^2}},$$

ennek folytán pedig kapjuk:

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{dy\sqrt{1+a^2u^2}}{n};$$

ha továbbá y-nak fenebbi értéke külzeltetik, lesz:

$$dy=-\frac{na^2du}{(1+a^2u^2)\sqrt{1+a^2u^2}},$$

mely értéket az előbbi egyenletbe tévén, lesz:

$$dx=-\frac{a^2du}{1+a^2u^2}, \quad \text{miből} \quad x=C-a.arctgau, \quad \text{avagy}$$

$$arctg.au=\frac{C-x}{a}.$$

Ha végre az 1) alatti egyenletből u-nak értékét kikeressük, lesz:

$$u=\frac{y}{a\sqrt{n^2a^2-y^2}}, \quad \text{s így}$$

$$arctg.\frac{y}{\sqrt{n^2a^2-y^2}}=\frac{C-x}{a}, \text{ itt pedig az } arcsinu=arc.tg\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

képletet tekintetbe vevén, nyerni fogjuk:

$$\frac{C-x}{a}=arcsin\frac{y}{na}, \quad \text{s így} \quad y=na.sin\frac{C-x}{a},$$

s ez a keresett x és y közötti viszony.

75.) ($\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ **egyenlet egészelése.**) Ezen egyenletben P és Q többé nem állandó mennyiségek, hanem x-nek függvényei; p és q-nak értékeit megtartván, ezen egyenletet még így is írhatjuk:

$$q+Pp+Qy=0,$$

ide pedig tévén: $p=uy$, és $q=vy$ nyerni fogjuk:

$$1.)\quad v+uP+Q=0,\quad \text{miből}\quad v=-uP-Q.$$

Továbbá $dy=pdx$ miatt áll szintén: $dy=uydx$, végre kell, hogy álljon:

$dp=udy+ydu$, és minthogy $dp=qdx$, nyerni fogjuk:

$$vydx=udy+ydu, \text{ miből kapjuk:}$$

$$\frac{dy}{y}=udx,\ \text{továbbá}\ \frac{dy}{y}=\frac{vdx-du}{u},\ \text{következőleg}$$

$$udx=\frac{vdx-du}{u},\quad \text{miből}\quad v=u^2+\frac{du}{dx},$$

mely érték ha v helyébe az 1) alatti egyenletbe tétetik, lesz:

$$u^2+\frac{du}{dx}+Pu+Q=0,\quad \text{avagy}$$

$$2.)\quad du+u^2dx+Pudx+Qdx=0,$$

mely egyenlet már u és x-re nézve első rendü, és az adott egyenlet első egészletének tekintendő; az előrebocsátott mütétel tehát azt mutatja, miként szállíttatik le a fen adott másod rendü külzeléki egyenlet, első rendü egyenletre; és csak az sajnos, hogy a fenebbi 2) egyenlet csak ritkán egészelhető, mert ha ennek egészelése mindig lehetséges volna, nyeretnék u mindig x-nek függvényében, s minthogy $\frac{dy}{y}=udx$, lenne:

$$logy=\int udx,\quad \text{tehát}\quad y=e^{\int udx},$$

s ez volna az adott egyenletnek egy részletes egészlete.

Az utolsó egyenlet segítségével, a fen talált 2) alatti egyenlet sokkal rövidebb és csinosabb módon származtatható; tévén ugyanis:

$$y=e^{\int udx},$$

nyerni fogjuk:

$$\frac{dy}{dx}=ue^{\int udx}, \text{ és } \frac{d^2y}{dx^2}=e^{\int udx}\left(\frac{du}{dx}+u^2\right),$$

miket az adott egyenletbe helyettesítvén, lesz :

$$du+u^2dx+Pudx+Qdx=0, \text{ mint előbb.}$$

Ezen egyenlet más alakban is terjeszthető elő, ha t. i. $u=Mz$ tétetik, értvén M alatt x-nek határozatlan függvényét; mert akkor áll :

$$du=Mdz+zdM, \text{ következőleg}$$

$$Mdz+zdM+M^2z^2dx+PMzdx+Qdx=0, \text{ avagy}$$

$$Mdz+z(dM+PMdx)+M^2z^2dx+Qdx=0\ ;$$

most pedig könnyü belátni, hogy M függvény mindig úgy választható, hogy a z-vel ellátott tag elenyésző legyen; tévén tehát :

$$dM+PMdx=0, \quad \text{lesz} \quad \frac{dM}{M}=-Pdx, \text{ következőleg,}$$

$$logM=-\int Pdx+C, \text{ s igy } M=C'.e^{-\int Pdx},$$

mi által M függvény teljesen meg van határozva, egyenletünk tehát ebbe megy át :

$$Mdz+M^2z^2dx+Qdx=0,$$

melynek egészelése azonban még mindig nehéz.

76.) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}+A.\frac{dy}{dx}+By=0\right.$ **egyenlet egészelése.**$\Big)$

Ebben A és B alatt állandó mennyiségeket kell érteni; s ámbár ezen egyenlet az előbbiekben már tárgyaltatott, azért mégis érdekesnek tartjuk, itt megmutatni, miként egészelhető ezen egyenlet sokkal rövidebb és csinosabb módon. Ha t. i. benne tétetik :

$$y=e^{\int rdx}, \text{ akkor áll :}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=r^2.e^{\int rdx}+\frac{dr}{dx}.e^{\int rdx}, \text{ továbbá : } \frac{dy}{dx}=r.e^{\int rdx},$$

minek folytán egyenletünk ebbe megy át :

$$r^2+\frac{dr}{dx}+Ar+B=0, \text{ miből kapjuk :}$$

$$dx=-\frac{dr}{r^2+Ar+B}, \text{ s így :}$$

$$\text{a).} \quad x=-\int\frac{dr}{r^2+Ar+B}.$$

Ebből tehát látjuk, hogy az adott egyenlet egészelése azon egyszerü szorzóktól függ, melyekre az (r^2+Ar+B) másod foku szorzat bontható. Ha ezen szorzók $(r-m)$ és $(r-n)$ volnának, tehát $r=m$,és $r=n$ az $r^2+Ar+B=0$ egyenlet gyökei, akkor lenne :

$$r=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B},$$

s látjuk, hogy r állandó mennyiség, m és n tehát szinte állandó mennyiségek lesznek, s így áll :

$$\int rdx=\int mdx=mx+C, \text{ és } \int ndx=nx+C',$$

miből azonnal az adott egyenlet két részletes egészletét lehet kapni, áll ugyanis :

$$y=e^{mx+C}=e^C.e^{mx}=A'e^{mx}, \text{ és}$$
$$y=e^{nx+C'}=A''e^{nx}.$$

Ezen két egészlet részletesnek azért mondatik, mivel mindegyike csak egy állandóval bír, míg az adott egyenlet teljes vagy általános egészletében két állandónak kell elö fordúlnia. Nincs tehát egyéb hátra, mint annak megmutatása, hogy ha a fenebbi részletes egészletek mindegyike megfelel az adott egyenletnek, összegüknek szintén meg kell felelnie az adott egyenletnek, s így : $y=A'e^{mx}+A''e^{nx}$ az adott egyenlet általános egészletének lenne tekintendö. Ha az adott egyenletben tétetik : $y=A'e^{mx}$, lesz :

$$1)\quad A'e^{mx}(m^2+Am+B)=0;$$

ha pedig ugyanabban tétetik : $y=A''e^{nx}$, lesz :

$$2)\quad A''e^{nx}.(n^2+An+B)=0;$$

ha végre az adott egyenletben írjuk :

$$y=A'e^{mx}+A''e^{nx}, \text{ nyerni fogjuk :}$$
$$A'e^{mx}.(m^2+Am+B)+A''e^{nx}.(n^2+An+B)=0,$$

mely egyenletet az elöbbi 1) és 2) egyenletekkel összehasonlítván, látjuk, hogy ezen két tag mindegyikének külön elenyészőnek kell lenni, összegük tehát szintén elenyésző lesz, s így :

$$y=A'e^{mx}+A''e^{nx}$$

szintén az adott egyenlet, még pedig teljes egészletének tekintendö, mivel benne két tetszésszerinti állandó fordúl elő. Ezen egészlet azonban csak azon esetre áll, ha m és n valósak és nem egyenlök; ha tehát az $r^2+Ar+B=0$ egyenlet gyökei egyenlök volnának, azaz : $m=n$, akkor a fenebbi egészlet így állna :

$$x=-\int\frac{dr}{(r-m)^2}=\frac{1}{r-m}+C\text{, miből :}$$

$$r=m+\frac{1}{x-C}\text{, és } r=m+\frac{1}{x+C}\text{,}$$

mely érték meglévén, áll szintén :

$$\int rdx=mx+\int\frac{dx}{x+C}+C'\text{, avagy :}$$

$$\int rdx=mx+log(C+x)+C'\text{, következőleg}$$

$$y=e^{C'+mx+log(C+x)}=e^{C'}.e^{mx}.(C+x)\text{, avagy :}$$

$$y=B'e^{mx}(C+x)=e^{mx}(B'C+B'x)\text{,}$$

és ha $B'C=B''$ tétetik, lesz még :

$$y=e^{mx}(B''+B'x)\text{,}$$

s ez is az adott egyenlet ez esetbeni teljes egészlete, minthogy az két tetszésszerinti állandóval van ellátva.

Hátra van még azon esetnek a megvizsgálása, ha az $r^2+Ar+B=0$ egyenlet gyökei képzetesek. Ez esetben mind a két gyök nyilván $a\pm b\sqrt{-1}$ alakban fordúl elő, s áll :

$$\int rdx=ax\pm bx\sqrt{-1}+C\text{, mit így is írhatni :}$$

$$\int rdx=a(x+c)\pm b(x+c)\sqrt{-1}\text{,}$$

hol c a tetszésszerinti állandó, ebből továbbá kapjuk :

$$\int rdx=ax\pm bx\sqrt{-1}+ac\pm bc\sqrt{-1}\text{,}$$

tévén pedig ; $e^{ac+bc\sqrt{-1}}=B'$, és $e^{ac-bc\sqrt{-1}}=B''$, y-nak értéke ez lesz :

$$y=e^{ax}.(B'.e^{bx\sqrt{-1}}+B''e^{-bx\sqrt{-1}})\text{; mivel pedig áll :}$$

$$e^{bx\sqrt{-1}}=cosbx+\sqrt{-1}sinbx\text{, és}$$

$$e^{-bx\sqrt{-1}}=cosbx-\sqrt{-1}sinbx\text{,}$$

áll még :

$$y=e^{ax}[(B'+B'')cosbx+(B'-B'')\sqrt{-1}sinbx]\text{,}$$

mely érték, az állandók megváltoztatása után, így is írható :

$$y=e^{ax}(Dcosbx+D'sinbx)\text{,}$$

mint ezt az előbbiekben már meg is találtuk.

77.) **($d^2y+Pdxdy+Qydx^2=Xdx^2$ egyenlet egészelése.)** Ez egyenletben P, Q és X tényezők x függvényeinek tekintendők, és maga az egyenlet még így is írható :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P.\frac{dy}{dx}+Qy=X.$$

Hogy azon módot lássuk, mely szerint ezen egyenlet is egészelhető, tétessék benne:

$$y=u.v, \text{ s lesz : } dy=udv+vdu, \text{ továbbá :}$$

$$d^2y=2dvdu+ud^2v+vd^2u,$$

miknek helyettesítése által, az adott egyenlet e következő alakot kapja:

$$2dvdu+ud^2v+vd^2u+Pudvdx+Pvdudx+Qvudx^2=Xdx^2,$$

mely egyenlet rövidítésére v változó úgy lesz meghatározandó, hogy az u-val ellátott tagok elenyészők legyenek, s ennek folytán e következő egyenletre fogunk jutni:

$$1).\quad d^2v+Pdvdx+Qvdx^2=0, \text{ avagy :}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+P\frac{dv}{dx}+Qv=0,$$

mely egyenlet már ismert alaku lévén, az előbbi elvek szerint meglehet v-t határozni x-nek függvényében, minek megtörténte után, a még hátra maradó egyenlet lesz:

$$2dvdu+vd^2u+Pvdudx=Xdx^2,$$

ebben pedig tétessék $du=sdx$, s lesz $d^2u=dsdx$, minthogy dx állandónak vétetik, s áll:

$$2sdv+vds+Pvsdx=Xdx,$$

mely nevezetes egyenlet, ha $ve^{\int Pdx}$ szorzóval szoroztatik, egészelhetővé válik, mert áll:

$$2svdve^{\int Pdx}+v^2dse^{\int Pdx}+Pv^2sdxe^{\int Pdx}=Xvdxe^{\int Pdx},$$

mely egyenlet bal részét figyelemmel megtekintvén, látjuk, hogy ez a $v^2se^{\int Pdx}$ szorzat teljes külzeléke; egészelés által tehát kapjuk:

$$v^2s.e^{\int Pdx}=\int e^{\int Pdx}Xvdx,$$

ebből pedig kapjuk:

$$s=\frac{e^{-\int Pdx}}{v^2}\int e^{\int Pdx}Xvdx;$$

mivel pedig $du=sdx$, következik:

$$du=\frac{e^{-\int Pdx}dx}{v^2}\int e^{\int Pdx}.Xvdx, \text{ miből :}$$

$$u=\int\frac{e^{-\int Pdx}dx}{v^2}\int e^{\int Pdx}Xvdx\,,$$

s minthogy végre $y=uv$, áll szintén:

$$2)\quad y=v\int\frac{e^{-\int Pdx}dx}{v^2}\int e^{\int Pdx}Xvdx\,,$$

mely egyenlet, minthogy v x-nek függvényében adatik, az x és y közötti viszonyt kellőleg terjeszti elő, mihelyt v a fenebbi 1) egyenletből meghatározható.

Az eddig mondottakból tehát látjuk, hogy az adott egyenlet egészelése az 1) alatti egyenlet egészelésétől függ; miből azonban nem következtethető, hogy ha az 1) alatti egyenlet nem volna egészelhető, az adott egyenletet sem lehetne egészelni, mert sok esetet lehet előterjeszteni, melyekben az adott egyenlet egészelhető a nélkül, hogy az 1) egyenlet egészelhető volna. Így azon esetre, ha $P=0$ és $Q=\alpha x$, az 1) alatti egyenlet ebbe megy át:

$$d^2v+\alpha xvdx^2=0\,,$$

melyet nem lehet egészelni, de nem úgy áll a dolog az eredeti egyenlettel, mely így áll:

$$d^2y+\alpha xydx^2=Xdx^2,$$

mely sok esetben egészelhető, nevezetesen pedig, ha $y=\frac{\beta x}{\alpha}$ tehát $d^2y=0$ tétetik, mely esetben áll:

$$\beta x^2dx^2=Xdx^2,\text{ miből: } X=\beta x^2,\text{ következőleg}$$

$$d^2y+\alpha xydx^2=\beta x^2dx^2,$$

mely egyenletnek az $y=\frac{\beta x}{\alpha}$ érték nyilván eleget tesz, ezen érték tehát az adott egyenlet részletes egészletének tekintendő; vajjon pedig általános egészlettel bír-e vagy nem, még kétség alatt van.

78). ($d^2y+Adxdy+Bydx^2=Xdx^2$ **egyenlet egészelése**), melyben A és B tényezők állandó mennyiségek, és csak X x-nek valamely függvénye. Ezen egyenlet első megtekintéséből látjuk, hogy az előbbi számban tárgyalt egyenlettől csak abban különbözik, hogy P és Q változók helyett, az A és B állandó mennyiségek fordúlnak elő; az egészelése tehát ezen egyenletnek szintúgy lesz véghezviendő, mint azt az előbbi szám mutatja. Tévén t. i. $y=uv$, a fenebbi szám feltételeit megtartván, e következő két egyenletet fogjuk nyerni :

1). $d^2v+Advdx+Bvdx^2=0$, és

2). $vd^2u+2dvdu+Avdudx=Xdx^2$,

és könnyü belátni, hogy az előbbi szám 2) alatti egyenlete, a most adott egyenletnek egészletét is adja, mihelyt benne $P=A$ és $Q=B$ tétetik, minek folytán lesz :

$$\int Adx=Ax, \text{ következőleg}$$

$$3) \quad y=v\int\frac{e^{-Ax}dx}{v^2}\int e^{Ax}Xvdx.$$

Hogy pedig v-t lehessen kiküszöbölni ezen egyenletből, az 1) alatti egyenletet egészelni kell, melyről már az előbbiekből tudjuk, hogy egészelése az $r^2+Ar+B=0$ egyenlet megoldásától függ ; feltévén tehát, hogy $r^2+Ar+B=(r+m)(r+n)$, lesz : $v=e^{-mx}$ a kérdéses 1) alatti egyenletnek egy részletes egészlete, ugyanazon egyenletnek teljes avagy általános egészlete tehát lesz :

$$v=Be^{-mx}+B'e^{-nx}.$$

Itt elégséges lesz, csak a részletes egészletet hozni számításba, melyet ha v helyébe a fenebbi 3) egyenletbe helyettesítünk, lesz :

$$y=e^{-mx}\int e^{(m-n)x}dx\int e^{nx}Xdx,$$

minthogy $A=m+n$, és $B=mn$. Ez egyenletben pedig, ha rövidség okáért tétetik :

$$e^{(m-n)x}dx=dR \text{ és } \int e^{nx}Xdx=S, \text{ áll :}$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ képle[t] szerint

$$y=e^{-mx}\int SdR=e^{-mx}(RS-\int RdS);$$

mivel pedig áll :

$$R=\int e^{(m-n)x}dx=\frac{e^{(m-n)x}}{m-n}, \text{ lesz még :}$$

$$y=\frac{e^{-nx}}{m-n}\cdot S-\frac{e^{-mx}}{m-n}\int e^{mx}Xdx,$$

ide továbbá S helyébe értékét tévén, lesz :

$$(m-n)y=e^{-nx}\int e^{nx}Xdx-e^{-mx}\int e^{mx}Xdx,$$

ez pedig az adott egyenlet teljes egészlete, de csak azon esetre, ha m és n valós de nem egyenlő mennyiségek, mert ha X függvény adatik, mind a két egészlet meghatározható lesz. Ugyanazon eredményre jutunk akkor is, ha v helyébe e^{-nx}, vagy a teljes egészlet is helyettesíttetik.

Egészen más lesz az adott egyenlet egészlete, ha az $r^2+Ar+B=0$ egyenlet gyökei egyenlők, azaz $m=n$, mely esetben lesz $r^2+Ar+B=(r+m)^2$; akkor az 1) alatti egyenlet teljes egészlete a 74)-dik szám szerint lesz:

$v=e^{-mx}(C+C'x)$, s mivel: $A=2m$ és $B=m^2$, a 3) alatti képlet szerint lesz:

$$y=v\int\frac{e^{-2mx}dx}{v^2}\int e^{2mx}Xvdx,$$

és ha megint tétetik:

$$\frac{e^{-2mx}dx}{v^2}=dR, \text{ és } \int e^{2mx}Xvdx=S,$$

áll még:

$$y=v\int SdR=v(RS-\int RdS),$$

ha pedig v helyébe a fenebbi érték tétetik, nyerjük:

$$dR=\frac{e^{-2mx}dx}{e^{-2mx}(C+C'x)^2}=\frac{dx}{(C+C'x)^2},$$

miből kapjuk:

$$R=-\frac{1}{C'(C+C'x)}=-\frac{e^{-mx}}{C'v};$$

ugyanazon helyettesítés adja még:

$$S=\int e^{mx}Xdx(C+C'x),$$

miket összeszedvén, könnyü módon nyerjük:

$$vRS=-\frac{C}{C'}e^{-mx}\int e^{mx}Xdx-e^{-mx}\int e^{mx}Xdx;$$

továbbá:

$$\int RdS=-\frac{1}{C'}\int e^{mx}Xdx,$$

s mind ezeknek folytán:

$$y=\frac{C}{C'}e^{-mx}\int e^{mx}Xdx-e^{-mx}\int e^{mx}Xdx+$$
$$\frac{e^{-mx}(C+C'x)}{C'}\int e^{mx}Xdx,$$

mely egyenlet nagyon rövidíthető, s még így is írható :

$$y=xe^{-mx}\int e^{mx}Xdx-e^{-mx}\int e^{mx}Xxdx,$$

mely egyenlet szintén összehúzható, ha megfontoljuk, hogy áll :

$$y.e^{mx}=x\int e^{mx}Xdx-\int e^{mx}Xxdx,$$

mely egyenlet külzelése által kapjuk :

$$d.(y.e^{mx})=dx\int e^{mx}Xdx+e^{mx}Xxdx-e^{mx}Xxdx,\text{ avagy :}$$

$$d.(y.e^{mx})=dx\int e^{mx}Xdx,$$

minek egészelése által nyerjük :

$$y=e^{-mx}\int dx\int e^{mx}Xdx,$$

mely kifejezés az adott egyenlet egészlete a második esetben, még pedig teljes egészlete, minthogy kétszeres egymásutáni egészelés által, két tetszésszerinti állandó is fog nyeretni. Egyszersmind könnyü belátni, miként kell eljárni a harmadik esetben, melyben az $r^2+Ar+B=0$ egyenletnek képzetes gyökei vannak.

79). ($d^2y+Adxdy+Bydx^2=Xdx^2$ **egyenlet tárgyalása.**) Itt ezen egyenlet tárgyalását még egyszer elő veszszük azért, minthogy meg akarjuk mutatni, hogy ha ezen egyenlet egyik részletes egészlete adatnék, annak teljes egészletét is könynyen meglehet határozni. Tegyük fel tehát, hogy $y=t$ egy olyféle érték, mely az adott egyenletnek eleget tesz, azaz : hogy $y=t$ a kérdéses egyenletnek egy részletes egészlete, akkor, $dy=dt$ és $d^2y=d^2t$ miatt, áll :

$$1.)\quad d^2t+Adxdt+Btdx^2=Xdx^2.$$

Tegyük továbbá a fen adott egyenletben $y=t+z$, lesz $dy=dt+dz$, és $d^2y=d^2t+d^2z$, s nyerni fogjuk :

$$d^2t+d^2z+Adxdt+Adxdz+Btdx^2+Bzdx^2=Xdx^2,$$

és tekintetbe vévén most az 1) alatti egyenletet, áll :

$$d^2z+Adxdz+Bzdx^2=0,$$

mely egyenlet már ismeretes előttünk, minthogy egészelése $r^2+Ar+B=0$ egyenletnek megoldásától függ; ha tehát m és n ezen egyenlet gyökei, lesz $A=m+n$ és $B=mn$, és az előbbiek szerint, ezen egyenletnek teljes egészlete ez lesz :

$$z=Be^{-mx}+B'e^{-nx},$$

mely érték helyettesítése által kapjuk :

$$y=t+Be^{-mx}+B'e^{-nx},$$

mint teljes egészletét az adott egyenletnek. Példa gyanánt adva legyen e következő egyenlet :

$$d^2y+Adxdy+Bydx^2=dx^2[n(n-1)x^{n-2}+nAx^{n-1}+Bx^n],$$

akkor ezen egyenlet első megtekintéséből látjuk, hogy $y=x^n$ annak egy részletes egészlete, minthogy :

$$dy=nx^{n-1}dx \text{ és } d^2y=n(n-1)x^{n-2}dx^2 \text{ miatt,}$$

ha mind ezeket az adott egyenletbe helyettesítjük, ezen egyenletnek meg lesz felelve, s így annak teljes egészlete lesz :

$$y=x^n+Be^{-mx}+B'e^{-nx}.$$

80.) **$(Ay+B\frac{dy}{dx}+C.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Dd^3y}{dx^3}=0$ egyenlet egészelése.)** Ezen harmad rendü és első foku külzeléki egyenletben az A, B, C, és D tényezők állandóknak tekintendők, és könynyü meggyőződni, hogy bizonyos feltétek alatt, ezen egyenletnek is $y=e^{rx}$ alaku érték felel meg, minthogy nyilván áll :

$$\frac{dy}{dx}=re^{rx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=r^2e^{rx} \quad \text{és} \quad \frac{d^3y}{dx^3}=r^3e^{rx},$$

miket az adott egyenletbe tevén, (e^{rx}-et kihagyva) lesz, :

$$1) \quad A+Br+Cr^2+Dr^3=0,$$

mely új egyenlet nyilván harmadik foku, az r mennyiségre nézve, s már kétségkivüli dolognak tekinthető az, hogy r-nek mind azon értéke, mely ezen egyenletnek megfelel, az adott külzeléki egyenletnek is meg felel, ha azt az $y=e^{rx}$ kifejezésben helyettesítjük r helyébe; miből már következik, hogy $y=e^{rx}$ az adott egyenlet részletes egészletének tekintendő.

Mivel továbbá az 1) alatti egyenletből három érték kapható r részére, következik, hogy az adott egyenletnek három részletes egészlete is lesz, melyek mindegyike eleget tesz az adott egyenletnek. Ha tehát az 1) alatti egyenlet gyökei a, a'

és a''-el jegyeztetnek, az említett három részletes egészlet e következő lesz:

$$y=e^{ax},\quad y=e^{a'x},\quad \text{és}\quad y=e^{a''x},$$

melyek mindegyike megfelel az adott egyenletnek, de azok szerint, miket a 76) szám alatt megállapítottunk, a ke^{ax}, $k'e^{a'x}$ és $k''e^{a''x}$ értékek szintén megfelelnek az adott egyenletnek, ha t. i. k, k', és k'' alatt tetszésszerinti állandókat értünk. A keresett részletes egészletek tehát így is állíthatók elő:

$$y=ke^{ax},\quad y=k'e^{a'x},\quad \text{és}\quad y=k''e^{a''x};$$

továbbá a fen említett szám alatt megmutattuk azt is, hogy ezen részletes egészletek összege is meg felel az adott egyenletnek, azaz:

$$y=ke^{ax}+k'e^{a'x}+k''e^{a''x},$$

ez pedig, minthogy három tetszésszerinti állandót foglal magában, az adott egyenlet teljes egészletének tekintendő.

A fenebbi egyenlet a, a' és a'' gyökei valósak de nem egyenlők voltak; feltévén tehát most, hogy ezen gyökök kettője egyenlő, még pedig $a=a'$ akkor az egészletnek ez esetbeni meghatározására, tétessék $a'=a+w$, értvén w alatt egy igen kicsiny mennyiséget, s lesz:

$$e^{a'x}=e^{ax}.e^{wx}=e^{ax}(1+wx),$$

ha t. i. e^{wx} sorba fejtetik, s annak magasabb hatványai elhanyagoltatnak, ennek folytán pedig lesz:

$$ke^{ax}+k'e^{a'x}=ke^{ax}+k'e^{ax}(1+wx),\ \text{avagy}$$
$$=e^{ax}(k+k'+k'wx)=e^{ax}(A'+A''x),$$

minthogy a k' állandót mindig úgy lehet választani, hogy $k'w$ szorzat véges mennyiség legyen. Ha pedig mind a három gyök egyenlő volna, azaz: $a=a'=a''$, akkor teendő: $a''=a+w$, és lesz:

$$y=e^{ax}(A'+A''x)+k''e^{ax}e^{wx},$$

és ha megint e^{wx} sorba fejtetik, nyerni fogjuk:

$$y=e^{ax}\left(A'+A''x+k''+k''wx+k''\frac{w^2x^2}{2}+\ldots\ldots\right);$$

tévén pedig $A'+k''=B'$, $A''+k''w=B''$ és $\frac{k''w^2}{2}=B'''$, áll még:

$$y=e^{ax}(B'+B''x+B'''x^2).$$

Ha végre a fen adott 1) alatti egyenlet képzetes gyökökkel bírna, melyek mindig csak páronként fordúlnak elő, akkor azoknak e következő alakja lesz :

$$a=\mu+\eta\sqrt{-1}\,,\quad \text{és}\quad a'=\mu-\eta\sqrt{-1}\,;$$

akkor a $ke^{ax}+k'e^{a'x}$ részletes egészletek összegében a és a' helyébe ezen értékeket tevén, nyerni fogjuk :

$$e^{\mu x}(ke^{\eta x\sqrt{-1}}+k'e^{-\eta x\sqrt{-1}})\,;$$

mivel pedig tudjuk, hogy áll :

$$e^{\eta x\sqrt{-1}}=cos\eta x+\sqrt{-1}sin\eta x,\quad \text{és}$$

$$e^{-\eta x\sqrt{-1}}=cos\eta x-\sqrt{-1}sin\eta x,$$

ezeknek helyettesítése által az előttünk álló összeg ebbe megy át:

$$e^{\mu x}[(K+K')cos\eta x+(K-K')\sqrt{-1}sin\eta x],$$

mely kifejezés az állandók változtatása után még így is áll :

$$\beta.)\quad e^{\mu x}(Ecos\eta x+E'sin\eta x);$$

hasonló kifejezés nyeretnék pedig, ha a képzetes gyököknek még egy párja fordúlna elő az adott egyenletben.

81.) $(\frac{d^ny}{dx^n}+A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+B.\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots E\frac{dy}{dx}+Ny=0,$ **általános egyenlet egészelése)**, mely egyenletben az A, $B\ldots\ldots E$, N tényezők állandó mennyiségeknek tekintendők. Ezen egyenlet egészlete szintúgy találtatik meg, mint az előbbi esetben ; bizonyos ugyanis, hogy ennek is $y=e^{rx}$ érték felelend meg, mert áll :

$$\frac{dy}{dx}=re^{rx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=r^2e^{rx},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=r^3e^{rx}\ldots\ldots\quad \frac{d^ny}{dx^n}=r^ne^{rx},$$

miket az adott egyenletbe tévén, lesz :

$$\alpha)\quad r^n+Ar^{n-1}+Br^{n-2}+\ldots,\ldots+Er+N=0.$$

Ezen egyenlet pedig, melynek megoldásától különösen függ, az adott egyenletnek egészelése, mint látjuk r-re nézve n-dik foku, tehát r-re nézve n különféle értékeket adand, melyek mindegyikét az $y=e^{rx}$ egyenletbe tévén r helyébe, egy részletes egészletet adand, miből következik, hogy az adott egyenletnek n részletes egészlet felel meg, ugyanannyi tetszésszerinti állandóval; mely részletes egészletek összegéből az adott egyenlet teljes avagy általános egészlete áll.

Ha tehát $a, a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$ a fenebbi α) alatti egyenlet gyökei, az említett részletes egészletek e következők lesznek:

$$y=Ce^{ax}, \quad y=C'e^{a_1x}, \quad y=C''e^{a_2x}, \ldots\ldots y=C^n e^{a_nx},$$

hol $C, C', C'', \ldots\ldots C^n$ az n tetszésszerinti állandók. Ezekből pedig e következő általános egészletet nyerjük:

$$y=Ce^{ax}+C'e^{a_1x}+C''e^{a_2x}+C'''e^{a_3x}+\ldots\ldots\ldots+C^n e^{a_nx}.$$

Annyi részletes egészletek miatt, a hányadik rendü az adott egyenlet, lehetségesnek kell lenni ugyanannyi egyszerü külzeléki egyenletet képezni, a hány gyök az α) egyenletben foglaltatik, s valóban az $y=e^{rx}$ egyenletből ered $logy=rx$, következőleg $\frac{dy}{y}=rdx$, miből $\frac{dy}{dx}=ry$, avagy: $\frac{dy}{dx}-ry=0$, mely már egyszerü külzeléki egyenletnek azon alakja, melyből a részletes egészletek mind meghatározhatók, mihelyt benne r helyébe rendszerint az α) alatti egyenlet gyökei helyettesítetnek, így ha $r=a$ tétetik, lesz:

$$\frac{dy}{dx}-ay=0, \text{ honnan } logy=ax+c, \quad \text{tehát}$$

$$y=e^{ax+c}=e^c e^{ax}=Ce^{ax},$$

melyben már az első részletes egészletet látjuk; hasonló módon pedig $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n$ tétetvén r helyébe, a többi részletes egészleteket is fogjuk nyerni.

Ha az α) egyenletnek két gyöke volna egyenlő, azaz $a=a_1$ akkor az előbbiek szerint, a megfelelő részletes egészletek helyébe, az általános egészlet $e^{ax}(B+B'x)$ része lesz teendő.

Ha pedig három vagy négy gyök lenne egyenlő, például $a=a_1=a_2$, akkor az ezeknek megfelelő részletes egészletek összege helyébe lenne irandó:

$$e^{ax}(B+B'x+B''x^2).$$

Hasonló módon, ha négy gyök volna egyenlő, $a=a_1=a_3=a_3$ akkor az ezeknek megfelelő részletes egészletek összege helyébe teendő:

$$e^{ax}(B+B'x+B''x^2+B'''x^3), \text{ s. i. t.}$$

Végre ha az adott α) alatti egyenlet, képzetes gyökök egy párjával bírna, melyekből eredő egyszerü szorzók, a valós másod foku $(r^2+2arcos\varphi+a^2)$ szorzatot adják, akkor ebből kapjuk:

$$r=-a(cos\varphi\pm\sqrt{-1}sin\varphi),$$

és az egészlet azon részének meghatározására, mely ezen két képzetes értéknek megfelel, csak az előbbi szám β) alatti egyenletében $\mu=-acos\varphi$, és $\eta=asin\varphi$ teendő, s a kérdéses rész lesz :

$$=e^{-acos\varphi}[E.cos(axsin\varphi)+E'sin(axsin\varphi)].$$

Példa gyanánt, meghatározandó legyen e következő egyenlet egészlete :

$$a^n y\pm\frac{d^n y}{dx^n}=0,$$

akkor ez e következő kettőre oszlik :

$$1.)\quad a^n y+\frac{d^n y}{dx^n}=0, \quad \text{és} \quad 2.)\quad a^n y-\frac{d^n y}{dx^n}=0.$$

Hogy az 1) alatti egyenlet egészlete meghatároztassék, szükséges lesz itt, egy pár különleges esetnek az egészelését elővenni, melyekből már világosan lehetend látni, miként kelljen bármely más esetben eljárni. Tegyük tehát először $n=1$, s lesz :

$$ay+\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{miből} \quad y=Ce^{-ax},$$

mint ez már ismeretes előttünk. Tévén továbbá $n=2$, lesz :

$$a^2y+\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

melyben $y=e^{rx}$ tétetvén, nyerni fogjuk : $r^2+a^2=0$, következőleg $r=\pm a\sqrt{-1}$, mely két értéknek e következő két részletes egészlet felel meg :

$$y=Ae^{ax\sqrt{-1}}, \quad \text{és} \quad y=A'e^{-ax\sqrt{-1}},$$

az adott egyenlet teljes egészlete tehát lesz :

$$y=Ae^{ax\sqrt{-1}}+A'e^{-ax\sqrt{-1}},$$

mely kifejezés, ha a kitevős mennyiségek helyébe háromszögtani függvényeket hozunk be, az állandók kellő változtatása után, e következőbe megy át :

$$y=Bcosax+B'sinax,$$

s ez az adott egyenlet keresett teljes egészlete.

Tegyük továbbá $n=3$, akkor egyenletünk így áll :

$$a^3y+\frac{d^3y}{dx^3}=0, \quad \text{és ha} \quad y=e^{rx} \text{ tétetik, lesz}$$

$$r^3+a^3=0,$$

mely egyenlet gyökei e következők :

$$r=-a,\quad r=\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1},\quad \text{és}\quad r=\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1},$$

ezen gyökök elseje, e következő részletes egészletet adja:

$$y=Ae^{-ax},$$

mi már ismeretes előttünk.

Hogy pedig a második gyöknek megfelelő részletes egészletet nyerjük, nyilván áll:

$$\frac{dy}{y}=\frac{adx}{2}+\frac{adx\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1},\quad \text{miből}\quad logy=\frac{ax}{2}+\frac{ax\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}+C,$$

ebből pedig kapjuk:

$$y=A'e^{\frac{ax}{2}}e^{nx\sqrt{-1}},\quad \text{hol}\quad n=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Hasonló módon, a harmadik gyöknek megfelelő részletes egészlet lesz:

$$y=A''e^{\frac{ax}{2}}.e^{-nx\sqrt{-1}},$$

miket összeszedvén, a kérdéses egyenlet teljes egészlete lesz

$$y=Ae^{-ax}+e^{\frac{ax}{2}}[(A'+A'')cosnx+(A'-A'')\sqrt{-1}sinnx],$$

ha t. i. $e^{nx\sqrt{-1}}$ és $e^{-nx\sqrt{-1}}$ helyébe háromszögtani függvényeket teszünk. Ezen kifejezés, az állandók megváltoztatása után így is írható:

$$y=Ae^{-ax}+e^{\frac{ax}{2}}.\left(Bcos\frac{ax\sqrt{3}}{2}+B'sin\frac{ax\sqrt{3}}{2}\right),$$

mindezekből pedig már látjuk, miként folytatandó a dolog, ha n helyébe még nagyobb kitevő tétetik.

Hátra van még a 2) alatti egyenlet egészelése, melyre nézve vegyük fel először $n=1$, áll:

$$ay-\frac{dy}{dx}=0,\quad \text{miből}\quad logy=ax+C,$$

ebből pedig azonnal kapjuk: $y=Ae^{ax}$, mint az adott egyenlet teljes egészletét. Tegyük továbbá $n=2$, lesz:

$$a^2y-\frac{d^2y}{dx^2}=0,\quad \text{hol } y=e^{rx} \text{ tétetvén, lesz}$$

$r^2-a^2=0$, miből $r=\pm a$, mely két érték, e következő két részletes egészletet adja:

$$y=Ae^{ax} \quad \text{és} \quad y=A'e^{-ax},$$

az adott egyenletnek teljes egészlete tehát lesz :

$$y=Ae^{ax}+A'e^{-ax}.$$

Tévén végre a 2) alatti egyenletben $n=3$, áll :

$a^3y-\frac{d^3y}{dx^3}=0$, miből $y=e^{rx}$ esetére áll :

$r^3-a^3=0$, miből e következő három értéket kapjuk :

$$r=a,\ r=-\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} \text{ és } r=-\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1},$$

ezen értékek elsejéből eredő részletes egészlet: $y=Ae^{ax}$, a második pedig adja :

$$y=A'e^{-\frac{ax}{2}}.e^{nx\sqrt{-1}}, \text{ hol } n=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

végre a harmadikból kapjuk :

$$y=A''e^{-\frac{ax}{2}}.e^{-nx\sqrt{-1}},$$

miket összeszedvén, az adott egyenlet teljes egészlete lesz :

$$y=Ae^{ax}+e^{-\frac{ax}{2}}(A'e^{nx\sqrt{-1}}+A''.e^{-nx\sqrt{-1}}),$$

és ha a kitevős mennyiségek helyébe itt is háromszögtani függvényeket hozunk be, az állandók megváltoztatása után lesz :

$$y=Ae^{ax}+e^{-\frac{ax}{2}}\left(B\cos\frac{ax\sqrt{3}}{2}+B'\sin\frac{ax\sqrt{3}}{2}\right),$$

s így már látjuk, miként folytatandó ezen műtétel.

82). **(Külön megoldás.)** Már a 69)-dik szám alatt, tárgyaltatott azon külzeléki egyenletek egészelése, melyekben x, y és p változók fordúlnak elő, hol $p=\frac{dy}{dx}$; ezen egyenletek általános alakja tehát ez lesz :

$$1) \quad y=\varphi(x,p);$$

ezen egyenletnek egészelése úgy is eszközölhető, ha azt x szerint külzeljük, ez esetben t. i. áll :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}=p,$$

így tehát, mint látjuk, egy x és p közötti első rendű külzeléki egyenlet nyeretett, melynek egészelése által, az x és p közötti viszonyt nyerjük ; ha pedig az 1) alatti egyenlet segítségével p-t kiküszöböljük, a keresett x és y közötti viszony jövend létre.

Vegyük elő most egy ilyféle egyenletnek e következő alakját:

$$2)\quad y=px+f(p),$$

akkor ennek külzelése adja:

$$dy=xdp+pdx+f'(p)dp\text{, avagy:}$$

$$0=-dy+xdp+pdx+f'(p)dp,$$

ezt pedig ha dx-el osztjuk, rövidítés után nyerni fogjuk:

$$3)\quad xdp+f'(p)dp=0\text{, avagy } dp(x+f'(p))=0\text{, miből:}$$

$$dp=0\text{, és } x+f'(p)=0;$$

ezen egyenletek elseje adja:

$$p=c\text{, avagy } \frac{dy}{dx}=c\text{, következőleg}$$

$$y=cx+c'\text{, ennek folytán áll szintén:}$$

$$\varphi(x,p)=cx+c'\text{, és ha } x=0\text{, lesz: } c'=\varphi(\mathrm{p});$$

mivel továbbá áll:

$$x+f'(p)=0\text{, áll szintén: } p=\varphi(x),$$

$$\text{következőleg } p=\varphi(c),$$

s így az eredetileg adott egyenlet ebbe megy át:

$$4)\quad y=x\varphi(x)+f(\varphi(x))\text{, hozzá járúl még:}$$

$$5)\quad y=cx+f(c),$$

mely utolsó két egyenlet csak abban különbözik egymástól, hogy az utolsó egyenlet tetszésszerinti c állandója, x-nek meghatározott függvényévé vált az utolsó előtti egyenletben; azért is a 4) egyenlet megfelel a 3) alatti egyenletnek, de az általános $y=cx+c'$ egészletben nem foglaltatik; ez oknál fogva pedig a 4) alatti egyenlet külön megoldásnak (singulaere Lösung) neveztetik. Miként határozandók meg ezen külön megoldások, e következő példákból fogjuk látni:

(1-ső Példa.) Adva van:

$$y=px+n\sqrt{1+p^2},$$

minek külzelése által kapjuk:

$$dy=pdx+xdp+\frac{npdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

mivel pedig $dy=pdx$, áll még:

$$dp\left(x+\frac{np}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0, \text{ miből:}$$

$$dp=0, \text{ tehát: } p=c, \text{ és } x+\frac{np}{\sqrt{1+p^2}}=0,$$

mely értékek adják:

$$y=cx+n\sqrt{1+c^2},$$

s ez az adott egyenlet általános egészlete. Ha pedig az adott és az utolsó előtti egyenletekből p-t kiküszöböljük, akkor áll:

$$y=n\sqrt{1+p^2}-\frac{np^2}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ avagy: } y\sqrt{1+p^2}=n, \text{ miből:}$$

$$1+p^2=\frac{n^2}{y^2}, \text{ tehát: } p=\frac{1}{y}\sqrt{n^2-y^2},$$

mit helyettesitvén, lesz:

$$y=\frac{x}{y}\sqrt{n^2-y^2}+\frac{n^2}{y}, \text{ avagy: } n^2-y^2=-x\sqrt{n^2-y^2}, \text{ miből}$$

$$n^2=x^2+y^2,$$

ez pedig az adott egyenlet külön megoldásának tekintendő.

(2-dik Példa,) Legyen az adott egyenlet:

$$y=px+p-p^2, \text{ lesz külzelés által:}$$

$$xdp+dp-2pdp=0, \text{ avagy: } (x+1-2p)dp=0, \text{ miből:}$$

$$dp=0, \text{ tehát: } p=c, \text{ s így: } y=pc+c-c^2, \text{ avagy:}$$

$$y=c(x+1-c) \text{ az adott egyenlet általános egészlete.}$$

Ha pedig az adott és $x+1-2p=0$ egyenletekből p-t eltávolítjuk, nyerni fogjuk: $p=\frac{x+1}{2}$, s ennek következtében

$$4y=x^2+2x+1=(x+1)^2,$$

s ez megint az adott egyenlet külön megoldása.

Az eddig tárgyalt, és az első rendü külzeléki egyenleteket illető külön megoldásra nézve, még azt is szükségképen meg kell említnünk, hogy egy olyféle külön megoldás, az adott egyenlet általános egészletéből is könnyen nyerhető, minek alapját e következőkből fogjuk látni:

Egy első rendü x és y közötti külzeléki egyenlet, mint tudjuk, e következő általános alakban fordúl elő:

$$1.)\quad f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0,$$

azon feltét alatt tehát, hogy ezen egyenlet bár mifél e módon egészeltetett, egészletében szükségképen egy határozatlan a állandó forduland elő, mely az adott külzeléki egyenletben nem jött elő; szabad lesz tehát az említett egészletet így előterjeszteni:

$$2.)\quad F(x,y.a)=0,$$

melynek külzeléke így terjesztendő elő:

$$3.)\quad \frac{d.F(x,y)}{dx}dx+\frac{dF(x,y)}{dy}dy=0,$$

most pedig, az előbbiekből tudjuk, hogy ha ez és a 2) egyenlet segítségével a állandót kiküszöböljük, szükségképen fogjuk nyerni, az eredetileg adott külzeléki egyenletet. Míg tehát az állandó a mennyiség a 2) alatti egyenletben a határozatlanság jellemét megtartja, ezen egyenlet az adott külzeléki egyenletnek teljes avagy általános egészlete lesz. Ha pedig a-nak bizonyos meghatározott érték tulajdoníttatik, akkor az így nyert egészlet részletes lesz, végre y-nak minden értéke, mely az 1) alatti egyenletnek megfelel, ugyanannak külön megoldásául lesz tekintendő.

Ezen fogalmak következtében, a részletes egészlet és a külön megoldás azon közös tulajdonsággal bírnak, hogy mind a kettő megfelel az eredetileg adott külzeléki egyenletnek; de abban különböznek egymástól, hogy a részletes egészlet, az általános egészletnek szintén megfelel, de a külön megoldás már nem.

Hogy tehát a külön megoldást az általános egészletből lehessen nyerni, tekintessék a változó mennyiségnek, minek folytán a 2) alatti egyenlet teljes egészlete lesz:

$$4.)\quad \frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{da}da=0,$$

hol dF iratott $d.F(x,y,a)$ helyébe. Ezen egyenlet nyilván átmegy a 3) alatti egyenletre, akár állandó akár nem állandó az a mennyiség; mert az első esetben lesz $da=0$, a második esetben pedig lehet $\frac{dF}{da}=0$, mert a bizonyosan birhat, olyféle értékekkel, melyekre nézve ezen utolsó egyenletnek kell állnia. Ezen változó értékek tehát a

$$\frac{dF}{da}=0$$

egyenletből mindig nyerhetők.

Ha tehát az ezen egyenletből nyert a-nak értékét behozzuk a 2) alatti egyenletbe, akkor az által az 1) alatti egyenletnek egy külön megoldását fogjuk nyerni. Az eddig mondottakból a külön megoldás meghatározására az adott általános egészletből, e következő szabály áll elő:

Külzeltessék az adott egészlet a benne előforduló állandóra nézve, x és y állandóknak tekintetvén, és az így nyert és az általános egészleti egyenletekből, a fen említett állandó küszöböltessék ki, az által egy x és y közötti egyenletet fogunk nyerni, mely külön megoldásnak tekintendő. Ezen szabály azonban nem alkalmazható akkor, ha a 2) alatti egyenlet:

$$\varphi(x,y)=a$$

alakra megy át; ezen egyenletet tehát a 2) alatti alakra vissza kell hozni. Így a (2-dik példában e következő általános egészletet találtuk:

$y=cx+c-c^2$, melyet c szerint külzelvén, lesz:

$$x+1-2c=0, \quad \text{miből} \quad c=\frac{x+1}{2},$$

mit az általános egészletbe tévén, nyerni fogjuk:

$$4y=(x+1)^2,$$

mint az ismert külön megoldás.

(Példa.) Legyen adva e következő egyenlet:

$$dy^2-xdxdy+ydx^2=0, \quad \text{avagy:}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x.\frac{dy}{dx}+y=0,$$

miből találjuk:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}, \quad \text{miből}$$

$$2dy=xdx+dx\sqrt{x^2-4y}, \quad \text{avagy} \quad \frac{2xdx-4dy}{\sqrt{x^2-4y}}=-2dx, \quad \text{tehát}$$

$$-2x=\int\frac{2xdx-4dy}{\sqrt{x^2-4y}},$$

minek egészelése végett tétessék:

$x^2-4y=u$ lesz $2xdx-4dy=du$, következőleg

$$\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-2x\,,\quad\text{avagy}:\ \sqrt{x^2-4y}=-x+a\,,$$

hol a a tetszésszerinti állandó; ezen egyenletből pedig nyeretik:

$$4y-2ax+a^2=0\,,$$

mint az adott egyenletnek általános egészlete; ha pedig ezt külzeljük a szerint, áll:

$$-2x+2a=0\,,\ \text{miből}:\ 2a=2x\,,\ \text{tehát}:\ a=x\,,$$

mely értéket az általános egészletbe tévén, lesz:

$$4y-2x^2+x^2=0\,,\ \text{avagy}:\ 4y-x^2=0\,,$$

ez pedig az adott külzeléki egyenletnek egy külön megoldása

Ezen megoldás magából az adott külzeléki egyenletből is közvetlen nyerhető; ugyanis a fen előterjesztett külzeléki egyenletet még így is szabad írni:

$$p^2-px+y=0\,,\ \text{s ezt } p \text{ szerint külzelvén, lesz}:$$

$$2p-x=0\,,\ \text{avagy}:\ 4p^2-4px+x^2=0\,,$$

és az adott egyenletet 4-el szorozván, és azt az utolsó egyenletből kivonván, ered;

$$-4y+x^2=0\,,\ \text{vagy}:\ 4y-x^2=0\,,$$

ez pedig a fen talált külön megoldással ugyanaz, egyszersmind pedig ebből azt is látjuk, hogy ezen külön megoldás, magából az adott külzeléki egyenletből miként határozható meg.

83). **(Egészelés sorok által.)** Annak megértésére, hogy miben áll az egészelés sorok által, legyen $y=F(x)$ egy bizonyos határok között folytonos függvény, mely határok között azonban 0 is fordúljon elő, lesznek nyilván:

$$y'=F'(x)\,,\ y''=F''(x)\,,\ y'''=F'''(x)\,,\ y^{\mathrm{IV}}=F^{\mathrm{IV}}(x)\ldots\ldots$$

az egymásra következő külzeléki hányadosok, melyeknek értékei azon esetre, ha bennök $x=0$ tétetik, rend szerint A_1, A_2, A_3, $A_4\ldots$-val jegyeztessenek, valamint magának az adott függvénynek ugyanazon esetre álló értéke $=A$ legyen; akkor már ismeretes előttünk, hogy a Mac-Laurin tantétele szerint áll:

$$1)\quad y=A+A_1x+A_2\frac{x^2}{2}+A_3\frac{x^3}{2.3}+A_4\frac{x^4}{2.3.4}+\ldots\ldots$$

minek kifejtése tehát semmi nehézséggel sem jár. Ha azonban y nem véges alaku egyenlet által adatnék, hanem valamely adott első rendü külzeléki egyenletben fordúlna elő, melynek alakja $f(x, y, y')=0$, akkor ebből is nyerhetők volnának e következő külzeléki hányadosok:

$$y'=\varphi(x,y),\ y''=\varphi'(x,y,y'),\ y'''=\varphi''(x,y,y',y'')\ldots\ldots,$$

ezek segítségével pedig mindig lehetséges lesz,

az $y''=\varphi'(x,y,y')$ egyenletből y'-et,
az $y'''=\varphi''(x,y,y',y'')$ egyenletből y''-et

s i. t. kiküszöbölni, s így ezen eljárás által, az $y', y'', y'''\ldots\ldots$ hányadosokat tisztán csak x és y által kifejezni, melyekben azután $x=0$ tétetvén, az A_1, A_2, $A_3\ldots,\ldots$ értékeket fogjuk kapni, és ugyanazon értékeknek felel meg $y=A$, mint egy tetszésszerinti, de határozatlan állandó.

Ha pedig másod rendü volna az adott külzeléki egyenlet, tehát $f(x,y,y',y'')$ alakban fordúlna elő, akkor ebből e következő hányadosokat lehet nyerni:

$$y''=\psi(x,y,y'),\quad y'''=\psi'(x,y,y',y'')\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ezekből pedig, mint ez előtt, az $y'', y'''\ldots\ldots$ hányadosokat el lehet távolítni, s így ezen hányadosok mind, x, y és y' mennyiségek által lesznek kifejezve, és ha bennök megint $x=0$ tétetik, akkor az $y, y', y'', y'''\ldots\ldots$ hányadosok $A, A_1, A_2, A_3\ldots\ldots$ értékeket fognak kapni, és az A és A_1 mennyiségek ugyanannyi tetszésszerinti állandókat képviselendnek, melyek azonban határozatlanok maradnak. Szintúgy tovább folytatván ezen okoskodást, könnyü meggyőződni, hogy ha $f(x, y, y', y'' y''')=0$ harmad rendü külzeléki egyenlet adatnék, akkor az 1) alatti egyenlet alkalmazása által, már három A, A_1, A_2 tetszésszerinti állandó jelenend meg.

Hasonló módon pedig az 1) alatti egyenlet helyébe a Taylor sorát is lehet használni, azon feltét alatt, hogy $y=F(x)$ egyenlet lehozatjai, ha bennök $x=x+h$ tétetik, még mindig folytonosak maradnak. Feltévén tehát, hogy $x=a$ értékre a nézve a

$F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)\ldots\ldots$ hányadosok
B, B_1, B_2, $B_3\ldots\ldots\ldots$ értékeket nyújtják,

akkor a Taylor tantétele szerint áll:

$$F(a+h)=B+B_1h,+B_2\frac{h^2}{2}+B_3\frac{h^3}{2.3}+B_4\frac{h^4}{2.3.4}+\ldots\ldots,$$

és ha itt $h=x-a$ tétetik, eredni fog :

$$2)\quad F(x)=y=B+B_1(x-a)+B_2\frac{(x-a)^2}{2}+B_3\frac{(x-a)^3}{2.3}+\ldots,$$

mely egyenlet igen alkalmas az adott függvény sorba fejtésére.

(1-ső Példa.) Legyen adva e következő külzeléki egyenlet :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+n^2xy=0\text{, avagy :}$$

$$xy''+2y'+n^2xy=0\,;$$

akkor ennek külzelése által kapjuk :

$$xy'''+3y''+n^2xy'+n^2y=0\text{, mivel pedig :}$$

$$y''=-\frac{2y'}{x}-n^2y\text{, ezen érték helyettesitése adja :}$$

$$x^2y'''+y'(n^2x^2-6)-2n^2y=0,$$

mely egyenletekben $x=0$ tétetvén, nyerni fogjuk :

$$A_1=0\,,\quad A_2=-\frac{1}{3}n^2A\,,\text{ és } A_3=0.$$

További külzelés által kapjuk :

$$x\frac{d^4y}{dx^4}+4\frac{d^3y}{dx^3}+n^2x\frac{d^2y}{dx^2}+2n^2\frac{dy}{dx}=0\text{, továbbá}$$

$$x\frac{d^5y}{dx^5}+5\frac{d^4y}{dx^4}+n^2x\frac{d^3y}{dx^3}+3n^2\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

általánosan tehát áll :

$$x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+(m+1)\frac{d^my}{dx^m}+n^2x\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+(m-1)n^2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}=0,$$

mely egyenleteket így is szabad írni :

$$xy^{IV}+4y'''+n^2xy''+2n^2y'=0,$$

$$xy^{V}+5y^{IV}+n^2xy'''+3n^2y''=0,$$

és általánosan :

$$xy^{(m+1)}+(m+1)y^{(m)}+n^2xy^{(m-1)}+(m-1)n^2y^{(m-2)}=0,$$

mikből további kiküszöbölés által nyerjük :

$$A_4=\frac{1}{5}n^4A,$$

s általánosan véve :

$$A_m=\pm\frac{n^{2}A}{m+1},$$

ha t. i. m páratlan szám.

Ha mind ezen értékeket az 1) alatti egyenletbe helyetesítjük, lesz :

$$y=A\left[1-\frac{n^2x^2}{2.3}+\frac{n^4x^4}{2.3.4.5}-\frac{n^6x^6}{2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots\right].$$

Ennek rövidítésére tudjuk, hogy áll :

$$sinnx=nx-\frac{n^3x^3}{2.3}+\frac{n^5x^5}{2.3.4.5}-\frac{n^7x^7}{2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots \text{ avagy :}$$

$$\frac{sinnx}{nx}=1-\frac{n^2x^2}{2.3}+\frac{n^4x^4}{2.3.4.5}-\frac{n^6x^6}{2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots,$$

ebből következik : $\frac{y}{A}=\frac{sinnx}{nx}$, következőleg

$$y=\frac{Asinnx}{nx}=C.\frac{sinnx}{x},$$

mely kifejezés azonban, minthogy csak egy tetszésszerinti állandóval van ellátva, az adott másod rendü külzeléki egyenletnek csak részletes egészletéül tekintendö, míg teljes egészlete :

$$y=\frac{Csinnx}{x}+\frac{C'cosnx}{x} \text{ alakban fordúl elő.}$$

(2-dik Példa.) Legyen adva e következő egyszerü külzeléki egyenlet :

$$dy=aydx, \text{ avagy : } \frac{dy}{dx}=ay.$$

Ha ennek sor általi egészelése végett a 2) alatti mintát akarnók használni, akkor mindenekelőtt a B, B_1, B_2, B_3 ...... tényezők lesznek meghatározandók, mivégre áll :

$$\frac{dy}{dx}=y'=ay,\ y''=ay'=a^2y,\ y'''=ay''=a^3y,\ y^{IV}=a^4y\ldots\ldots,$$

a fen említett mintába tehát teendő :

$$y=B,\ y'=aB,\ y''=a^2B,\ y'''=a^3B,\ y^{IV}=a^4B\ldots\ldots,$$

miknek folytán e következő sort fogjuk kapni :

$$y=B\left[1+a(x-a)+\frac{a^2(x-a)^2}{2}+\frac{a^3(x-a)^3}{2.3}+\ldots\ldots\right];$$

mível pedig a zárjelben levő sor nem egyéb, mint $e^{a(x-a)}$ kitevőleges mennyiség értéke, áll még :

$$y=Be^{a(x-a)}=Be^{-a^2}.e^{ax}=Ce^{ax},$$

hol C az egészelésnek tetszésszerinti állandója. Ugyanazon eredményt, az adott külzeléki egyenletből közvetlen is lehet nyerni, áll ugyanis:

$$\frac{dy}{y}=adx, \text{ tehát: } logy=ax+C', \text{ miből: }$$

$$y=e^{C'}e^{ax}=Ce^{ax}, \text{ mint előbb.}$$

84). Minthogy nem mindig lehetséges, valamely adott külzeléki egyenlet egészletét sor által előállítni a Mac-Laurin vagy Taylor tantétele szerint, minthogy nem mindig lehetséges azon határokat megállapítni, melyek között a keresett $y=F(x)$ függvény folytonos, azért ez esetben legczélszerübb lesz, a keresett egészletet egy olyféle sor alakjában terjeszteni elő, mely sornak tagjai x-nek növekedő hatványai szerint haladnak, mint:

$$1)\ y=A_1x^\alpha+A_2x^\beta+A_3x^\gamma+A_4x^\delta+A_5x^\varepsilon+\ldots\ldots,$$

és ezen sornak mind kitevőit mind tényezőit az adott külzeléki egyenlet segítségével meghatározni. Ennek további megértésére vegyük például egészelendőnek, az előbbi szám

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \text{ egyenletét;}$$

akkor, ha a fenebbi 1) sorból az illető értékeket helyettesítjük ez egyenletben, lesz:

$$n^2y=n^2A_1x^\alpha+n^2A_2x^\beta+n^2A_3x^\gamma+n^2A_4x^\delta+n^2A_5x^\varepsilon+\ldots.$$

$$\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}=2A_1\alpha x^{\alpha-2}+2A_2\beta x^{\beta-2}+2A_3\gamma x^{\gamma-2}+2A_4\delta x^{\delta-2}+\ldots.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A_1\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+A_2\beta(\beta-1)x^{\beta-2}+A_3\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}+\ldots$$

mely három egyenlet bal részeinek összege $=0$ levén, jobb részei összegének is elenyészőnek kell lenni. Itt tehát meg kell vizsgálnunk, hogy mily feltétek alatt lesz ezen jobb részek összege elenyésző; erre nézve pedig nyilván állnia kell annak hogy ha ezen részek összegét, x-nek hatványai szerint elrendezzük, akkor ugyanazon hatványhoz tartozó tényezők összegének külön elenyészőnek kell lenni.

A kitevőket illetőleg látjuk, hogy $(\alpha-2)$ x-nek legkisebb kitevője, az $x^{\alpha-2}$-hez tartozó tényezők összege pedig $=\alpha(\alpha-1)+2\alpha=\alpha(\alpha+1)$, s ennek elenyészőnek kell lenni, áll tehát: $\alpha(\alpha+1)=0$, miből $\alpha=0$ avagy $\alpha=-1$, mely utóbbi érték itt megtartandó. Minthogy továbbá könnyü belátni, hogy az $n^2 A_1 x^\alpha$ tag magában véve nem lehet elenyésző: következik, hogy az más, ugyanazon kitevővel ellátott tagokhoz tartozik, minek folytán α nem lehet kisebb $(\beta-2)$-nél; ha tehát $\beta-2<\alpha$, akkor az $x^{\beta-2}$ tényezői összegének elenyészőnek kell lenni; áll tehát: $\beta(\beta-1)+2\beta=0$ avagy $\beta(\beta+1)=0$, miből következik $\beta=0$, minthogy $\beta>\alpha$, mikből következik, hogy

$$\gamma-2=\alpha;\quad \delta-2=\beta,\quad \varepsilon-2=\gamma\ldots\ldots\ldots$$

A tagok tényezőire nézve továbbá áll:

$$A_3\gamma(\gamma+1)+n^2A_1=0,\quad A_4\delta(\delta+1)+n^2A_2=0\ldots$$

mindezekből pedig könnyen nyerjük:

$$\alpha=-1,\quad \beta=0,\quad \gamma=1,\quad \delta=2,\quad \varepsilon=3\ldots\ldots\ldots\text{és}$$

$$A_3=-\frac{A_1n^2}{1.2},\quad A_4=-\frac{A_2n^2}{1.2.3},\quad A_5=\frac{A_1n^2}{1.2.3.4},$$

$$A_6=\frac{A_2n^2}{1.2.3.4.5}\ldots\ldots\ldots;$$

ha mind ezeket a felvett 1) alatti egyenletbe helyettesítjük, e következő kettős sorra fogunk jutni:

$$y=A_1\left[\frac{1}{x}-\frac{n^2x}{1.2}+\frac{n^4x^3}{1.2.3.4}-\frac{n^6x^5}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\ldots\ldots\right]$$
$$+A_2\left[1-\frac{n^2x^2}{1.2.3}+\frac{n^4x^4}{1.2.3.4.5}-\frac{n^6x^6}{1.2.3\ldots\ldots7}+\ldots\right],$$

mely sorok figyelmes megtekintéséből, ered:

$$y=\frac{A_1cosnx}{x}+\frac{A_2sinnx}{nx},$$

mely, mint már tudjuk, az adott egyenlet általános egészlete. Ezen eredményt azon feltét alatt kapjuk, ha $\beta-2<\alpha$; ha tehát $\beta-2=0$ tétetik, akkor $A_2=0$ miatt nyerni fogjuk: $y=\frac{A_1cosnx}{x}$, mely az adott egyenletnek csak részletes egészlete.

HÁROM VÁLTOZÓVAL BÍRÓ KÜLZELÉKI EGYENLETEK EGÉSZELÉSE.

85.) Valahányszor egy adott függvény, három x, y és z változóval bír, azok egyike mindig a többi kettő függvényének tekinthető, minthogy könnyü belátni, hogy az adott függvényből vagy x fejezhető ki y és z-nek, vagy y, x és z-nek, vagy z, x és y-nak függvényében; az utolsó esetben z függő, x és y pedig független változóknak tekintendők, maga az egyenlet pedig $z=f(x, y)$ alakban fordúl elő, s ezen egyenlet külzelékének általános alakja lesz:

$$dz=Ndx+Mdy,$$

hol N és M az x és y szerinti részlet-külzeléki hányadosok, tehát szinte mind x mind y-nak függyényei. Ha azonban az x, y és z változókkal bíró egyenletet 0-ra hozzuk, vagy ha az adott x, y és z-nek függvénye egy állandó mennyiséggel egyelő: akkor külzelékének általános alakja nyilván ez lesz:

$$1)\quad Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

hol P, Q, és R az x, y és z szerinti részlet-külzeléki hányadosok, s mint olyanok, mind x mind y mind z-nek függvényei.

Minden, több változóval bíró függvényből, vagy teljes, vagy részletes külzelékeket lehet kapni; még pedig teljes külzelékeket fogunk kapni, ha az adott függvényt minden változók szerint külzeljük; részletes külzelékeket pedig azon esetre fogunk kapni, ha az adott függvényt vagy egy vagy két, egy szóval a változók csak egy része szerint külzeljük. Ezekből következik, hogy ha valamely függvény több mint egy független változóval bír, akkor annak külzeléséből vagy teljes, vagy csak részletes külzeléki egyenletek erednek, mely utóbbiak a legnagyobb fontossággal bírnak, minthogy különféle mértani, természettani vagy erőműtani vizsgálatoknál a legnagyobb szerepet játszszák.

Ha tehát: $Pdx+Qdy+Rdz=0$ alaku külzeléki egyenlet lenne egészelendő, akkor mindenek előtt szükséges, hogy egy olyféle x, y és z közötti véges kifejezés létezzék, melynek külzelése által, a fen adott külzeléki egyenlet nyeressék, mert csak ez esetben lesz az adott külzelék egészelhető.

Ha azonban, mint sokszor megesik, az adott külzeléki kifejezés nem volna egészelhető; akkor bizonyosak lehetünk arról, hogy létezik egy olyféle szorzó, melylyel ha az adott külzeléket szorozzuk, az egészelhetővé válik. Tudjuk ugyanis, hogy nem gyéren áll be azon eset, hogy valamely függvény külzelésénél egy változó szorzó elvész, s így a hátra maradó külzeléki kifejezés megszünik teljes külzelék lenni; ha azonban képesek vagyunk, az elvesztett szorzót megint helyre állítni, s vele az adott külzeléket szorozni, akkor az így nyert kifejezés teljes külzeléke lesz valamely függvénynek, s ennél fogva már egészelhető. Itt tehát fő dolog, azon feltételeket megállapítni, melyek alatt egy adott külzeléki kifejezés egészelhető vagy nem. E végre pedig legyen μ azon nevezetes szorzó, melylyel az adott külzeléki kifejezés szoroztatván, egészelhetővé válik; akkor:

$\mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz = 0$ kifejezés

teljes külzeléke lesz valamely függvénynek, s így egészelhető. Hogy tehát a kérdéses egészelési feltételeket meg lehessen határozni, már a külzeléki hánylat elveiből tudjuk, hogy ha az előttünk álló kifejezés teljes külzelék, e következő három feltételező egyenletnek kell állnia:

$$d.\left(\frac{\mu P}{dy}\right) = d.\left(\frac{\mu Q}{dx}\right), \text{ továbbá } d\left(\frac{\mu P}{dz}\right) = d.\left(\frac{\mu R}{dx}\right), \text{ és}$$

$$d.\left(\frac{\mu Q}{dz}\right) = d.\left(\frac{\mu R}{dy}\right),$$

ezekben pedig a kijelentett külzelést végbe-vivén, e következő három zerusra hozott egyenletet fogjuk nyerni:

$$\mu\frac{dP}{dy} + P.\frac{d\mu}{dy} - \mu\frac{dQ}{dx} - Q\frac{d\mu}{dx} = 0,$$

$$\mu\frac{dR}{dx} + R.\frac{d\mu}{dx} - \mu\frac{dP}{dz} - P\frac{d\mu}{dz} = 0, \quad \text{és}$$

$$\mu\frac{dQ}{dz} + Q.\frac{d\mu}{dz} - \mu\frac{dR}{dy} - R\frac{d\mu}{dy} = 0,$$

mely egyenletek elsejét R-el, másikát Q-val, harmadikát pedig P-vel szorozván, s azután összeadván, a kijövő tagok egy része megsemmisítendi egymást, és a hátra-maradó egyenlet e következő lesz:

$$2.)\quad P.\left(\frac{dQ}{dz}\right)-P\left(\frac{dR}{dy}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}\right)-Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$$
$$+R\left(\frac{dP}{dy}\right)-R\left(\frac{dQ}{dx}\right)=0,$$

ez pedig azon nevezetes feltételező egyenlet, melynek állnia kell, hogy az adott külzeléki kifejezés egészelhető legyen; mely azonban, ha PQR szorzattal elosztatik, még így is áll:

$$\frac{1}{Rdz}\left[\frac{dQ}{Q}-\frac{dP}{P}\right]+\frac{1}{Qdy}\left[\frac{dP}{P}-\frac{dR}{R}\right]+\frac{1}{Pdx}\left[\frac{dR}{R}-\frac{dQ}{Q}\right]=0.$$

Hogy az így megtalált feltételező egyenletnek a használatát lássuk, jó lesz egy pár esetet megvizsgálni; legyen tehát egészelendő e következő külzeléki egyenlet:

$$zdx+xdy+ydz=0,$$

akkor mindenek előtt meg kell vizsgálnunk, vajjon egészelhető e ezen egyenlet, vagy nem; mi végre összehasonlítván azt az 1) alatti egyenlettel, áll: $P=z$, $Q=x$ és $R=y$, mely értékeket a 2) alatti egyenletre nézve tekintetbe vevén, annak tevőleges tagjai mind elenyészők lesznek, a nemleges tagok pedig e következő egyenletet adják:

$$-x-y-z=0,$$

mely eredmény minthogy képtelenséget mutat, arra vezet benünket, hogy az adott külzeléki egyenlet nem egészelhető.

Vegyük tehát elő e következő második esetet:

$$dx(y^2+nyz+z^2)-x(y+nz)dy-xzdz=0,$$

mely egyenlet összehasonlításából az 1) alatti egyenlettel kapjuk:

$$P=y^2+nyz+z^2,\quad Q=-xy-nxz,\quad \text{és}\quad R=-xz,$$

ezekből pedig külzelés által e következő hányadosokat nyerjük:

$$\frac{dQ}{dz}=-nx,\quad \frac{dR}{dx}=-z,\quad \text{és}\quad \frac{dP}{dy}=2y+nz,\quad \text{továbbá:}$$

$$\frac{dR}{dy}=0,\quad \frac{dP}{dz}=ny+2z,\quad \text{és}\quad \frac{dQ}{dx}=-y-nz,$$

mindezeket pedig a 2) alatti feltételező egyenletbe helyettesítvén, nyerni fogjuk:

$$P.\left(\frac{dQ}{dz}\right)-P\left(\frac{dR}{dy}\right)=-nxy^2-n^2xyz-nxz^2;$$

$$Q\left(\frac{dR}{dx}\right)-Q\left(\frac{dP}{dz}\right)=xyz+3nxz^2+nxy^2+n^2xyz+2xyz \text{ és}$$

$$R\left(\frac{dP}{dy}\right)-R\left(\frac{dQ}{dx}\right)=-2xyz-2nxz^2-xyz,$$

mely egyenletek jobb részeinek összege elenyésző, az adott külzeléki egyenlet tehát megfelel a 2) alatti feltételező egyenletnek, s így egészelhető, még pedig azon esetre is, ha teljes külzelék sem volna, mert ez esetben mindig lehetséges azon szorzónak a meghatározása, melylyel az adott egyenlet szoroztatván egészelhetővé válik.

86.) **(Az egészelés módja.)** Azon feltét alatt tehát, hogy az egészelendő külzeléki egyenlet az előbbi szám 2) alatti egyenletét valósítja, maga az egészelés e következő elveken alapszik:

Midőn az x, y és z változók függvénye részletesen x és y szerint külzeltetett, mind két esetben a harmadik z változó állandónak vétetett; megfordítva is szabad tehát következtetnünk, hogy ha az x és y szerinti részlet-külzelékek összege részletesen is egészeltetik, meglesz már az adott egyenlet teljes egészlete, mihelyt még egy állandót csatolunk hozzá, mely azonban nem lesz a közönséges állandó, hanem z-nek valamely függvénye. Az általános

Törvény

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \text{ egyenlet tehát,}$$

minthogy z állandónak vétetik, tehát $dz=0$, e következőbe megy át:

$$Pdx+Qdy=0,$$

melynek egészlete egyszersmind az adott egyenletnek teljes egészlete lesz, mihelyt a fen említett állandót hozzá adjuk, mely mint tudjuk z-nek függvénye. Ennek kellő felvilágosítására szolgálnak e következő példák:

(1-ső Példa.) Az egészelendő egyenlet legyen ez:

$$zdx(y+z)+dy(x+3y+2z)+dz(x+y)=0.$$

Ezen egyenletre nézve könnyü meggyőződni, hogy ez az előbbi szám feltételező 2) alatti egyenleténél teljesen megfelel, s ennél fogva egészelhető. Egészelésének végbevitelére legjobb lesz, y-t állandónak venni, s lesz $dy=0$, s e következő egyenlet áll:

$$2dx(y+z)+dz(y+x)=0, \text{ miből :}$$

$$\frac{2dx}{x+y}+\frac{dz}{y+z}=0,$$

s mivel y állandó, az x és z szerinti egészelés adja :

$$2log(x+y)+log(y+z)=logC, \text{ avagy}$$

$$(x+y)^2(y+z)=C.$$

Ha pedig $logC=A$ tétetik, az előbbi egyenlet így áll :

$$2log(x+y)+log(y+z)=A,$$

minthogy ezen állandó y-nak függvénye is lehet, minek meghatározására, külzeltessék az utolsó egyenlet mind a három változó szerint, s nyerni fogjuk :

$$\frac{2dx+2dy}{x+y}+\frac{dy+dz}{y+z}=A'dy,$$

mely egyenlet, a nevezők eltüntetése után, még így is áll :

$$2dx(y+z)+2dy(y+z)+dy(x+y)+dz(y+x)$$
$$=A'dy(x+y)(y+z),$$

s ezen egyenletre nézve, kevés összehúzás után könnyü meggyőződni, hogy bal része az adott külzeléki egyenlettel azonos, tehát $=0$, az előttünk álló egyenlet jobb részének tehát szinte elenyészőnek kell lenni ; miből továbbá következik, hogy az A állandóban y nem foglaltatik, ez tehát csak a közönséges állandót képviselendi, s így az adott egyenlet teljes egészlete lesz :

$$(x+y)^2(y+z)=A.$$

(2-dik Példa.) Az adott egyenlet legyen ez :

$$ydx-xdy-\frac{y^2}{z}dz=0\,;$$

mivel itt $P=y$, $Q=-x$, és $R=\frac{y^2}{z}$, azonnal meggyőződhetünk arról, hogy az adott egyenlet az ismert feltételező egyenletnek megfelel. Ha itt x állandónak vétetik, lesz $dx=0$, és egyenletünk ebbe megy át :

$$-xdy-\frac{y^2}{z}dz=0, \quad \text{avagy} \quad -x\frac{dy}{y^2}-\frac{dz}{z}=0,$$

egészelés által tehát :

$$\frac{x}{y}-logz=A,$$

hol A azon állandót jelenti, mely x-nek függvénye is lehet, minek meghatározására, külzeltessék az utolsó egyenlet mind a három változó szerint, s nyerni fogjuk:

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}-\frac{dz}{z}=A'dx\,, \text{ avagy } ydx-xdy-y^2\frac{dz}{z}=zy^2A'dx,$$

mely egyenlet bal része az adott egyenlettel ugyanaz, áll tehát:

$$zy^2A'dx=0 \text{ avagy } A'dx=0,$$

mivel pedig ez A-nak x szerinti külzeléke, következik, hogy A-ban x nem foglaltatik, tehát A a közönséges állandó, és az adott egyenlet teljes egészlete lesz:

$$\frac{x}{y}-logz=A.$$

(3-dik Példa.) Adva van e következő egyenlet:

$$dx(ay-bz)+dy(cz-ax)+dz(bx-cy)=0,$$

itt áll:

$$P=ay-bz,\quad Q=cz-ax \text{ és } R=bx-cy\,;$$

s könnyü meggyőződni, hogy a feltételező egyenletnek ez is megfelel.

Ezen egyenlet egészelése végett, vegyük z-t állandónak, s lesz $dz=0$ és e következő egyenlet áll elő:

$$dx(ay-bz)+dy(cz-ax)=0, \text{ miből:}$$

$$\frac{dx}{cz-ax}+\frac{dy}{ay-bz}=0,$$

s minthogy z állandó, az egészelés azonnal véghezvihető, azaz áll:

$$\frac{1}{a}log(ay-bz)-\frac{1}{a}log(cz-ax)=A, \text{ avagy}$$

$$\frac{1}{a}log\frac{ay-bz}{cz-ax}=A,$$

hol az A állandó, z-nek függvénye is lehet, ennek meghatározására tehát, az előttünk álló egyenlet mind a három változó szerint külzelendő, s nyerni fogjuk:

$$\frac{adx(ay-bz)+ady(cz-ax)+adz(bx-cy)}{(cz-ax)^2}=dA.$$

Ha ezen egyenlet bal részének a számlálóját összehasonlítjuk az eredetileg adott egyenlettel, azonnal fogjuk látni, hogy $dA=0$, s ennél fogva A csak a közönséges állandó, melyben semmi z nem foglaltatik. Az adott egyenlet teljes egészlete tehát lesz:

$$\frac{ay-bz}{cz-ax}=A, \text{ avagy}$$

$$ay-bz=A(cz-ax), \text{ avagy } ay+Cax=z(Cc-b),$$

és az állandók megváltoztatása után:

$$Ax+By+Cz=0.$$

Nem lesz felesleges itt még azt is megemlítni, hogy az $\frac{1}{(cz-ax)^2}$ szorzó az adott egyenletet egészelhetővé teszi.

(4-dik Példa.) Az egészelendő egyenlet legyen:

$$(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0.$$

Itt nyilván áll:

$$P=y^2+yz, \quad Q=xz+z^2 \text{ és } R=y^2-xy,$$

mely értékek a feltételező egyenletet valósítják. Ha ennek egészelése végett z állandónak vétetik, lesz:

$$(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy=0, \text{ miből:}$$

$$\frac{dx}{xz+z^2}+\frac{dy}{y^2+yz}=0,$$

és ha az $\frac{1}{y(y+z)}$ szorzó részlet-törteire bontatik, tévén:

$$\frac{1}{y(y+z)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y+z}, \text{ lesz } 1=A(y+z)+By,$$

miben először $y=0$, azután pedig $y+z=0$ tétetvén, nyerni fogjuk:

$$A=\frac{1}{z}, \text{ és } B=-\frac{1}{z},$$

s ennek folytán áll:

$$\frac{1}{y^2+yz}=\frac{1}{zy}-\frac{1}{z(y+z)},$$

minek helyettesítése folytán áll még:

$$\frac{dx}{z(x+z)}+\frac{dy}{zy}-\frac{dy}{z(y+z)}=0,$$

avagy rövidebben:

$$\frac{dx}{x+z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy}{y+z}=0,$$

miből egészelés által:

$$log(x+z)+logy-log(y+z)=A \text{ avagy}$$

$$log\frac{xy+yz}{y+z}=A, \quad \text{s végre}$$

$$\frac{xy+yz}{y+z}=A;$$

minthogy itt az A állandó z-nek függvénye is lehet, ennek meghatározására, külzeltessék az elöttünk álló egyenlet mind a három változó szerint, s nyerni fogjuk:

$$\frac{(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy+(y^2-xy)dz}{(y+z)^2}=dA,$$

mely egyenletet az eredetivel összehasonlítván, nyerni fogjuk:

$$dA=0, \quad \text{azaz:}$$

A-ban semmi z nem foglaltatik, az tehát csak a közönséges állandó, s így a keresett teljes egészlet lesz:

$$\frac{xy+yz}{y+z}=A.$$

Ha azonban az eredetileg adott egyenletben y állandónak vétetett volna, akkor e következö egyenlet állna elö:

$$\frac{dx}{y^2-xy}+\frac{dz}{y^2+yz}=0, \quad \text{avagy}$$

$$\frac{dx}{y-x}+\frac{dz}{y+z}=0,$$

miből azonnal kapjuk:

$$log(y+z)-log(y-x)=A, \quad \text{avagy} \quad \frac{y+z}{y-x}=A,$$

ezen egyenlet pedig ha A-nak meghatározására mind a három változó szerint külzeltetik, nyerni fogjuk:

$$\frac{(y+z)dx-(x+z)dy+(y-x)dz}{(y-x)^2}=dA, \quad \text{avagy}$$

$$\frac{(y^2+yz)dx-(xy+yz)dy+(y^2-xy)dz}{y(y-x)^2}=dA,$$

mit az eredeti egyenlettel összehasonlítván, kell hogy álljon:

$$dA=-\frac{(xy+yz)dy+(xz+z^2)dy}{y(y-x)^2}, \quad \text{avagy}$$

$$dA=-\frac{(x+z)(y+z)dy}{y(y\mp x)^2},$$

ebből pedig ha z kiküszöböltetik

$$A=\frac{y+z}{y-x}$$

egyenlet segítségével, nyerni fogjuk :

$$dA = -\frac{A(A-1)}{y}dy, \quad \text{tehát} \quad \frac{dA}{A(A-1)} = -\frac{dy}{y},$$

mivel pedig :

$$\frac{1}{A(A-1)} = \frac{1}{A-1} - \frac{1}{A},$$

áll még :

$$\frac{dA}{A-1} - \frac{dA}{A} = -\frac{dy}{y}, \text{ miből :}$$

$$log(A-1) - log A = -log y + log C = log\frac{C}{y}, \text{ avagy}$$

$$\frac{A-1}{A} = \frac{C}{y}, \text{ miből : } A = \frac{y}{y-C},$$

ennek folytán pedig a keresett teljes egészlet lesz :

$$\frac{y+z}{y-x} = \frac{y}{y-C}, \text{ avagy : } \frac{xy+yz}{y+z} = C, \text{ mint előbb.}$$

(5-dik Példa.) Legyen az adott külzeléki egyenlet :

$$(y^2+yz+z^2)dx + (z^2+zx+x^2)dy + (x^2+xy+y^2)dz = 0,$$

melyben

$$P = y^2+yz+z^2, \; Q = z^2+zx+x^2 \text{ és } R = x^2+xy+y^2,$$

mely értékek segítségével könnyü megmutatni, hogy az adott egyenlet a feltételező egyenletnek megfelel. Ha itt z állandónak vétetik, ekkor az adott egyenlet következővé válik :

$$(y^2+yz+z^2)dx + (z^2+zx+x^2)dy = 0, \text{ miből :}$$

$$\frac{dx}{x^2+zx+z^2} + \frac{dy}{y^2+yz+z^2} = 0,$$

mely tagok elsejét x szerint, másikát pedig y szerint egészelvén, minthogy z állandó, nyerni fogjuk :

$$\frac{2}{z\sqrt{3}} arc.tg\frac{x\sqrt{3}}{2z+x} + \frac{2}{z\sqrt{3}} arctg\frac{y\sqrt{3}}{2z+y} = Z,$$

hol Z azon állandót jelenti, mely z-nek függvénye. Ha ezen két ($arc.tg$) egybehúzatik, akkor rövidebben áll :

$$\frac{2}{z\sqrt{3}} arctg\frac{(xz+yz+xy)\sqrt{3}}{2z^2+xz+yz-xy} = Z,$$

s ennek folytán szabad tenni :

$$\frac{(xz+yz+xy)}{2z^2+xz+yz-xy} = Z, \text{ miből kapjuk :}$$

$$\frac{1}{Z}=\frac{2z^2+xz+yz-xy}{xz+yz+xy}\text{, következőleg}$$

$$1+\frac{1}{Z}=\frac{2z(x+y+z)}{zx+yz+xy}\text{, ebből pedig ered:}$$

$$\frac{2Zz}{1+Z}=\frac{xy+zx+yz}{x+y+z}=f(z),$$

mit külzelvén és az eredeti egyenlettel összehasonlítván, mint annak teljes egészlete nyeretni fog:

$$\frac{xy+zx+zy}{x+y+z}=C,$$

Az említett külzelés által könnyü egyszersmind meggyőződni, hogy $\frac{1}{(x+y+z)^2}$ azon szorzó, melylyel az eredeti egyenlet szoroztatván, teljes külzelékké válik.

Az eddig mondottakból tehát látjuk, 1-ször) hogy három változóval bíró első rendü külzeléki egyenlet nem mindig egészelhető; 2-szor) hogy egy olyféle egyenlet egészlete, ha létezik, egy tetszésszerinti állandóval bír; 3-szor) hogy az egészelés mindig lehetséges, ha a 2) alatti feltételező egyenletnek az adott külzeléki egyenlet megfelel.

RÉSZLET-KÜLZELÉKI EGYENLETEK EGÉSZELÉSE.

87). Minden három változóval bíró függvényben, ezen változók kettője függetleneknek, a harmadik pedig függőnek tekinthető, úgy, hogy ha az adott függvény x, y és z változókat foglalna magában, szabad lesz x és y változókat függetleneknek tekinteni, s így a harmadik z változó függőnek lesz veendő; mit rövidebben úgy lehet kifejezni, hogy z változó x és y-nak függvénye, mert könnyü belátni, hogy az adott $f(x, y, z)=0$ egyenletből z-nek értéke mindig kikereshető, minek megtörténte után $z=\varphi(x, y)$ alaku egyenlet fog nyeretni, mely által csak az fejeztetik ki, hogy z változó x és y-nak függvénye. Ily alaku egyenletnek a külzeléke pedig, mint tudjuk, mindig két részből áll, még pedig az első x szerinti, és az első y szerinti részlet-külzelékből, melyek elseje $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$, másika pedig $\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ jelkép által szokott képviseltetni, s így ezen adott függvénynek teljes külzeléke, e következő egyenlet által fog adatni:

$$1)\quad dz=pdx+qdy,$$

ha t. i. $p=\frac{dz}{dx}$ és $q=\frac{dz}{dy}$ az első részlet-külzeléki hányadosokat jelenti. A részlet-külzeléki egyenletek egészelésének czélja abban áll, hogy az adott p, q, x, y és z közötti egyenletből azon nevezetes viszony találtassék meg, melynek állnia kell, hogy az adott külzeléki egyenlet is álljon, mit nyilván csak egészelés által lehet eszközölni.

Itt azonban mindjárt látjuk, hogy ezen egészelésnél több eset fordúlhat elő, még pedig: az adott külzeléki egyenletnek vagy p, x, y és z, vagy q, x, y és z, vagy p és q között lehet helye, ezután pedig azon egyenletek következnek, melyeknek vagy p és q s az x, y és z változók egyike között, vagy p és q s az x, y és z változók kettője között, vagy p és q s mind a három változó között van helye. Mind ezekből csak azon eseteket fogjuk előadni, melyeknek egészelése nem oly nagy nehézségekkel jár.

(1-ső eset.) Legyen az adott részlet-külzeléki egyenlet:

$$\frac{dz}{dx}=a,$$

itt tehát $p=a$, mely érték az 1) alatti egyenletbe tétetvén, lesz:

$$dz=adx+qdy,$$

mely egyenletben ha y állandónak vétetik, lesz $dy=0$, s áll:

$$dz=adx,\text{ miből: } z=ax+C,$$

itt azonban C nem a közönséges állandó, minthogy y-t is foglalhat magában, mi miatt azt y függvényének kell tekinteni, s így $f(y)$ által pótolni, minek folytán áll:

$$z=ax+f(y);$$

ez egyenletben $f(y)$ egy tetszésünktől függő mennyiség, mit maga az előttünk álló egyenlet bebizonyít, mert ennek külzelése által kapjuk:

$$dz=adx+dyf'(y),$$

miből, ha csak az első x szerinti részlet-külzeléki hányadost keressük, nyeretni fog : $\frac{dz}{dx}=a$, mint annak lennie is kell, ezen eredményhez pedig mindig jutunk, bármely jelentése volna a $f(y)$ függvénynek. Miből tehát világosan következtetjük, hogy $f(y)$ függvény teljesen tetszésünktől függ, ez tehát semmi feladat feltételeitől sem függ. Ez oknál fogva pedig, $f(y)$ nem állandónak, hanem tetszésszerinti függvénynek szokott tekintetni, és a részlet-külzeléki egyenlet egészelése után, a nyert eredményhez nem a tetszésszerinti állandó, hanem egy tetszésszerinti függvény szokott csatoltatni.

(2-dik eset.) Adva van e következő egyenlet :

$$\frac{dz}{dx}=X,$$

hol X x-nek valamely függvénye; akkor lesz $p=X$, mely értéket az általános 1) alatti egyenletbe tévén, lesz :

$$dz=Xdx+qdy,$$

itt pedig megint y állandónak vétetvén, és x szerint véghezvivén az egészelést, nyerni fogjuk :

$$z=\int Xdx+C,$$

mivel pedig C itt is y-nak függvénye, a teljes egészlet lesz :

$$z=\int Xdx+f(y).$$

Ha például tétetik : $X=ax^3$, lesz :

$$z=\frac{ax^4}{4}+f(y),$$

ez pedig teljes egészlete $\frac{dz}{dx}=ax^3$ részlet-külzeléki egyenletnek, és mivel $f(y)$ tetszésünk szerint választható, szabad lesz $A+By+Cy^2$ mennyiséget is helyébe tenni, minek folytán áll :

$$z=\frac{ax^4}{4}+A+By+Cy^2,$$

s ez is az adott külzeléki egyenlet egészlete, de már nem teljes, hanem csak részletes, minthogy $f(y)$ nyilván általánosabb jelentésü mint $(A+By+Cy^2)$ függvény.

(3-dik eset.) Vegyük egészelendőnek a

$\frac{dz}{dx}=V$ részlet-külzeléki egyenletet;

akkor $p=V$ tétetvén az általános 1) alatti egyenletben, áll :

$$dz=Vdx+qdy,$$

hol azonban V mind x-nek mind y-nak függvénye, ha tehát itt is állandónak vétetik y, áll :

$$dz=Vdx, \text{ következöleg } z=\int Vdx+C,$$

s ámbár V mind x-nek mind y-nak függvénye, az egészelés még is csak x szerint vitetik véghez, C pedig y-nak függvénye lesz, melyet $f(y)$-nal jegyezvén, áll :

$$z=\int Vdx+f(y),$$

s ez nyilván az adott egyenlet teljes egészlete, melyre nézve érdekes lesz e következő példák tárgyalása :

a) Adatik : $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=V$,

akkor képletünk szerint lesz :

$$z=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+f(y),$$

és ha csak x szerint vitetik véghez az egészelés, áll :

$$z=\sqrt{x^2+y^2}+f(y),$$

mint teljes egészlete az adott kifejezésnek.

b) Adatik : $\frac{dz}{dx}=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}=V$,

akkor ennek helyettesítése adja :

$$dz=\frac{ydx}{\sqrt{y^2-x^2}},$$

mit x szerint egészelvén, lesz :

$$z=y.arc,sin\frac{x}{y}+f(y).$$

c) Adva van : $\frac{dz}{dx}=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}}$,

akkor ebből nyerjük :

$$dz=\frac{adx}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}}, \text{ tehát :}$$

$$z=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}}+C,$$

mely egyenlet egészelése végett, azt így is szabad írni :

$$z=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)^2}},$$

mely kifejezésben $\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}=u$ tétetvén, lesz : $du=\frac{dx}{\sqrt{a^2-y^2}}$, tehát : $dx=du\sqrt{a^2-y^2}$, s így áll :

$$z=a\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=a.arc.sin u,$$

x és y-nak függvényében tehát :

$$z=a.arc.sin\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}+f(y),$$

s ez az adott egyenlet teljes egészlete :

d) Legyen egészelendő : $\frac{dz}{dx}=U$,

hol U mind z mind y-nak függvénye, akkor $p=U$ levén, az 1) alatti egyenlet adja :

$$dz=Udx+qdy,$$

itt pedig y-t állandónak tekintvén, lesz $dy=0$, s áll :

$$dz=Udx, \quad \text{miből :} \quad dx=\frac{dz}{U},$$

mely egyenlet teljesen egészelhető, minthogy U az y és z-nek függvénye, és y állandónak vétetett ; a z szerinti egészelés adja :

$$\int\frac{dz}{U}=x+f(y), \text{ miből :}$$

$$x=\int\frac{dz}{U}-f(y),$$

mely egyenlet nyilván x-et adja, y és z-nek függvényében; például legyen : $U=\frac{y}{z}$, nyeretni fog : $zdz=ydx$, mely egyenletből ha y állandónak vétetik, ered :

$$\frac{z^2}{2}=xy+f(y),$$

melyben $f(y)$ a tetszésszerinti függvény.

e) Legyen egészelendő : $\frac{dz}{dx}=U$,

hol U, x és z függvényének tekintendő. Minthogy $p=U$, az ismert általános egyenlet adja :

$$dz=Udx+qdy,$$

itt pedig y állandónak vétetvén, lesz :

$$dz-Udx=0$$

az egészelendő egyenlet; melyben minthogy U az x és z-nek függvénye, ezen egyenletnek egészelése csak úgy eszközölhető, ha bizonyos F szorzó határoztatik meg, melylyel ezen egyenlet szoroztatván, teljes külzelékké válik, áll tehát :

$$Fdz-F.Udx=0,$$

mint teljes külzeléke x és z változók függvényének; ennek tehát egészelhetőnek kell lenni, s ha egészletét L-el jegyezzük, áll : $\quad L=f(y)$,

s ez lenne a keresett x, y és z közötti viszony, mert ha ezt külzeljük mind a három változó szerint, nyerni fogjuk :

$$Fdz-F.Udx=dyf'(y), \text{ miből :}$$

$$dz-Udx=\frac{dy}{F}f'(y), \text{ avagy :}$$

$$dz=Udx+\frac{dy}{F}f'(y),$$

mely egyenletet az 1) alatti egyenlettel összehasonlítván, áll :

$$q=\frac{1}{F}f'(y).$$

Ennek további felvilágosítására jó lesz egy pár példát tárgyalni. Legyen tehát :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{nz}{x};$$

az 1) alatti általános egyenletet tekintetbe vevén, lesz :

$$dz=\frac{nzdx}{x}+qdy,$$

és ha y állandónak vétetik, ered :

$$dz-\frac{nzdx}{x}=0,$$

mely egyenlet egészelhetővé válik, ha azt $\frac{1}{z}$ szorzóval szorozzuk, mely szorzásnak eredménye ez :

$$\frac{dz}{z}-n\frac{dx}{x}=0,$$ miből egészelés által :

$$logz-nlogx=f(y),$$ avagy :

$$log\frac{z}{x^n}=f(y),$$ következőleg :

$$\frac{z}{x^n}=f(y),$$ avagy : $z=x^n.f(y)$,

mint teljes egészlete az adott egyenletnek.

Legyen továbbá egészelendő : $\frac{dz}{dx}=nx-z$,

akkor az általános 1) alatti egyenlet adja :

$$dz=(nx-z)dx+qdy,$$

melynek egészelése végett, ha y állandónak vétetik, áll ;

$$dz-nxdx+zdx=0,$$

ezen egyenlet pedig egészelhetővé válik, ha azt e^x szorzóval szorozzuk, minek folytán lesz :

$$e^xdz-nxe^xdx+ze^xdx=0,$$

mely egyenlet két tagja, azaz e^xdz+ze^xdx, teljes külzeléke a ze^x szorzatnak, s ennek folytán egészelése által kapjuk :

$$ze^x-n\int xdxe^x=f(y);$$

mivel pedig az előbbiekből tudjuk, hogy áll :

$$n\int xdx.e^x=nxe^x-ne^x,$$

áll szintén :

$$ze^x-nxe^x+ne^x=f(y),$$ tehát

$$z=n(x-1)+e^{-x}f(y),$$

mint teljes egészlete az adott egyenletnek.

Legyen adva még e következő példa :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{xz}{x^2+z^2},$$

mit az általános 1) alatti egyenlet szerint így lehet írni :

$$dz=\frac{xzdx}{x^2+z^2}+qdy,$$

hol y állandónak vétetvén, nyerni fogjuk :

$$dz-\frac{xzdx}{x^2+z^2}=0.$$

Ezen egyenlet pedig, hogy egészelhetővé váljék, $F=\frac{x^2+z^2}{z^3}$ szorzóval lesz szorzandó, minek folytán nyerni fogjuk :

$$\frac{x^2dz-zxdx}{z^3}+\frac{dz}{z}=0;$$

itt azonnal látjuk, hogy ezen kifejezésnek első tagja $-\frac{x^2}{2z^2}$ hányadosnak teljes külzeléke, s így egészelés által kapjuk :

$$logz-\frac{x^2}{2z^2}=f(y),$$

s ez a keresett x, y és z közötti viszony.

f) Egészelendő legyen még :

$$\frac{dz}{dx}=U \text{ kifejezés}$$

azon esetre, ha U mind a három x, y és z változók függvénye. Ezen egyenlet, ha megint az 1) alatti egyenlettel hasonlíttatik össze, adja :

$$dz=Udx+qdy,$$

és ha y állandónak vétetik, áll :

$$dz-Udx=0;$$

s ámbár U mind a három változónak függvénye, de mivel y állandó, ez még is csak x és z változók közötti egyenletnek tekintendő; erre nézve tehát, szintén meghatározható egy olyféle F szorzó, melylyel az szoroztatván, egészelhetővé válik, áll tehát :

$$Fdz-F.Udx=dV,$$

ha t. i, V a kérdéses egyenlet egészlete, tehát $V=f(y)$.

Például legyen adva e következő egyenlet :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{xz}{ay}, \quad \text{tehát} \quad U=\frac{xz}{ay}; \text{ lesz}$$

$$dz-\frac{xzdx}{ay}=0,$$

mely egyenlet $\frac{1}{z}$ szorzóval szoroztatván, egészelhetővé válik, áll ugyanis :

$$\frac{dz}{z}-\frac{xdx}{ay}=0, \quad \text{s mivel } y \text{ állandó, lesz :}$$

$$logz-\frac{x^2}{2ay}=f(y),$$

mint teljes egészlete az adott egyenletnek, melyet azonban még így is szabad írni:

$$log\frac{z}{c}-\frac{x^2+a^2}{2ay}=f(y),$$

mert ezen egyenlet is, ha x és z szerint külzeltetik, az adott egyenletet hozza létre.

88.) **(Más részlet-külzeléki egyenletek egészelése.)** Itt szándékunk van, a nehezebb egészelési eseteket felhozni, melyeket e következő sorban terjesztünk elő:

(1-ső eset.) Egészelendő legyen e következő egyenlet:

$$a\left(\frac{dz}{dx}\right)+b\left(\frac{dz}{dy}\right)=c,$$

melyben a, b és c állandó mennyiségek, és csak a két p és q részlet-külzeléki hányados fordúl elő benne; ezen egyenletet tehát még így szabad lesz írni:

$$ap+bq=c, \quad \text{miből:} \quad q=\frac{c-ap}{b},$$

most pedig az általános $dz=pdx+qdy$ egyenletet vevén tekintetbe, áll:

$$dz=pdx+\left(\frac{c-ap}{b}\right)dy, \quad \text{miből:}$$

$$1.)\quad dz=\frac{c}{b}dy+p\left(\frac{bdx-ady}{b}\right).$$

Ezen egyenlet jobb részének az első tagja könnyen egészelhető, itt tehát csak a második tag egészelése forog kérdésben, mivégre tétessék: $bx-ay=u$, s lesz $bdx-ady=du$; akkor ennek helyettesítése által a kérdéses tag $\frac{p}{b}du$-ra menend át, mely kifejezés nyilván csak azon esetre egészelhető, ha p hányados u-nak függvénye lesz, azaz, ha állni fog: $p=f(bx-ay)$, következőleg

$$\int p(bdx-ady)=\varphi(bx-ay),$$

mit a fenebbi 1) egyenletbe helyettesítvén, lesz:

$$z=\frac{c}{b}y+\frac{1}{b}\varphi(bx-ay),$$

s ez az adott egyenlet teljes egészlete; ha benne $a=b=c=1$ tétetik, lesz:

$$z=y+\varphi(x-y) \quad \text{mint a} \quad \frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}=1$$

egyenlet egészlete.

(2-dik eset.) Az egészelendő egyenlet legyen:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right).\left(\frac{dz}{dy}\right)=1.$$

Ezen egyenlet nyilván még így is írható: $pq=1$, s ennek egészelése végett, a mi általános

$$dz=pdx+qdy$$

egyenletünk folytán áll:

$$z=\int pdx+\int qdy,$$

mely egyenlet egyes tagjainak értéke e következő:

$$\int pdx=px-\int xdp, \quad \text{és} \quad \int qdy=qy-\int ydq,$$

e szerint fenebbi egyenletünk még így is áll:

$$1) \quad z=px+qy-\int(xdp+ydq),$$

ezen egyenlet segítségével pedig a fen adott egyenlet már egészelhető lesz azon esetre, ha $pq=1$; mivel t. i. $q=\frac{1}{p}$, ezen érték helyettesítése adja:

$$z=px+\frac{y}{p}-\int dp\left(x-\frac{y}{p^2}\right), \quad \text{minthogy} \quad dq=-\frac{dp}{p^2},$$

már pedig könnyü belátni, hogy $dp\left(x-\frac{y}{p^2}\right)$ kifejezés csak azon esetre egészelhető, ha $\left(x-\frac{y}{p^2}\right)$ szorzó a p-nek valamely függvénye, minek folytán $\int dp\left(x-\frac{y}{p^2}\right)$ szintén csak p-nek függvénye lehet, melyet $\varphi(p)$-vel jegyezvén, áll:

$$2) \quad z=px+\frac{y}{p}-\varphi(p);$$

mivel pedig ez esetben áll: $dp\left(x-\frac{y}{p^2}\right)=dp.\varphi'(p)$, avagy:

$x-\frac{y}{p^2}=\varphi'(p)$, következik ebből : $x=\frac{y}{p^2}+\varphi'(p)$, mit x helyébe tévén a 2) alatti egyenletben, nyerni fogjuk :

$$3)\qquad z=\frac{2y}{p}+p\varphi'(p)-\varphi(p),$$

mely egyenlet által már a keresett viszony van képviselve. Ha e kifejezésben tétetik : $\varphi'(p)=a-\frac{b}{p^2}$, lesz $\varphi'(p)dp=dp\left(a-\frac{b}{p^2}\right)$, tehát

$$\varphi(p)=ap-\frac{b}{p};$$

mivel pedig $x=\frac{y}{p^2}+\varphi(p)$, áll még: $x=\frac{y+b}{p^2}+a$, miből :

$$p^2=\frac{y+b}{x-a},\quad \text{tehát}\quad p=\sqrt{\frac{y+b}{x-a}},$$

mind ezeket pedig, a fenebbi 3) alatti egyenletbe tévén, lesz :

$$z=\frac{2y\sqrt{x-a}}{\sqrt{y+b}}+\frac{2ab}{\sqrt{(x-a)(y+b)}},$$

avagy rövidebben :

$$z=\frac{2y(x-a)+2ab}{\sqrt{(x-a)(y+b)}},$$

ez pedig már az adott egyenlet egészlete, a felvett esetben, de csak részletes, mivel benne a tetszésszerinti függvény hiányzik. A legegyszerübb eset akkor áll be, ha $a=b=1$, melyben áll :

$$z=2\sqrt{x.y}.$$

(3-dik eset.) Egészelendő legyen :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=1 \quad \text{egyenlet.}$$

Ezen egyenletet nyilván még így is írhatni : $p^2+q^2=1$, következőleg az előbbi eset $z=px+qy-\int(xdp+ydq)$ egyenlete szerint, ez is egészelhető lesz, áll ugyanis : $q=\sqrt{1-p^2}$, tehát : $dq=-\frac{pdp}{\sqrt{1-p^2}}$, minek helyettesítése által kapjuk :

$$z=px+y\sqrt{1-p^2}-\int dp\left(x-\frac{py}{\sqrt{1-p^2}}\right);$$

mivel pedig az utolsó tag egészlete csak p-nek függvénye lehet, szabad lesz tenni :

$$\int dp\left(x-\frac{py}{\sqrt{1-p^2}}\right)=\varphi(p),$$

ebből pedig nyerjük :

$$x-\frac{yp}{\sqrt{1-p^2}}=\varphi'(p),$$

és az adott egyenlet egészlete lesz :

$$z=px+y\sqrt{1-p^2}-\varphi(p);$$

a lehetőleg legegyszerübb eset akkor áll be, ha $\varphi(p)=0$, melyben áll :

$$x=\frac{py}{\sqrt{1-p^2}},\quad \text{miből}\quad p=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{tehát}$$

$$\sqrt{1-p^2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

miknek helyettesítése adja :

$$z=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2},$$

s ez az adott egyenlet egészlete azon esetre, ha $\varphi(p)=0$.

Ha más esetben $p=sin\eta$ és $q=cos\eta$ tétetik, lesz : $\sqrt{1-p^2}=q=cos\eta$, tehát $dp=d\eta cos\eta$ miatt áll :

$$z=xsin\eta+ycos\eta-\int d\eta(xcos\eta-ysin\eta),$$

mivel pedig az utolsó egészlet nem lehet egyéb, mint η-nak függvénye, ha azt $\varphi(\eta)$-val jelöljük, nyerni fogjuk :

$$z=xsin\eta+ycos\eta-\varphi(\eta),$$

mint az adott egyenletnek ez esetbeni egészletét.

(4-dik eset.) Az egészelendő egyenlet legyen e következő :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{x}{a}=\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

mely egyenletet még így is szabad írni :

$$q=\frac{px}{a},$$

mely érték az általános egyenletbe tétetvén, lesz :

$$1)\quad dz=pdx+\frac{pxdy}{a}=px\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{a}\right);$$

itt azonnal látjuk, hogy a $\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{a}\right)$ szorzónak egészlete $=$ $\left(logx+\frac{y}{a}\right)$, maga az egyenlet tehát csak azon esetre lesz egészelhető, ha px szorzó $\left(logx+\frac{y}{a}\right)$ kifejezésnek függvénye lesz, az adott egyenlet egészlete tehát szinte $\left(logx+\frac{y}{a}\right)$-nak lesz függvénye, melyet ha $\varphi\left(logx+\frac{y}{a}\right)$ által jelölünk, áll :

$$z=\varphi\left(logx+\frac{y}{a}\right);$$

mivel továbbá px ennek első külzeléki hányadosa, lesz :

$$px=\varphi'\left(logx+\frac{y}{a}\right)\quad \text{következőleg}\quad p=\frac{1}{x}\varphi'\left(logx+\frac{y}{a}\right),$$

és

$$q=\frac{1}{a}\varphi'\left(logx+\frac{y}{a}\right),$$

mely kifejezések együtt az adott egyenletnek megfelelnek.

Ugyanazon egyenlet még így is egészelhető : a fenebbi 1) alatti egyenlet t. i. még így is írható :

$$z=px-\int xdp+\int\frac{pxdy}{a}=px+\int px\left(\frac{dy}{a}-\frac{dp}{p}\right);$$

az utolsó egészlet pedig csak azon esetre meghatározható, ha px szorzó $\left(\frac{y}{a}-logp\right)$-nek valamely függvénye lesz, melyet $\varphi\left(\frac{y}{a}-logp\right)$ által jelölvén, áll :

$$z=px+\varphi\left(\frac{y}{a}-logp\right),\quad \text{következőleg}$$

$$px=\varphi'\left(\frac{y}{a}-logp\right),$$

s ennek folytán :

$$z=\varphi'\left(\frac{y}{a}-logp\right)+\varphi\left(\frac{y}{a}-logp\right),$$

mely érték teljesen megfelel az adott egyenletnek.

(5-dik eset.) Adva van e következő külzeléki egyenlet:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{z}{a},$$

melyet, mint tudjuk, így is szabad írni:

$$p+q=\frac{z}{a}, \quad \text{miből}$$

$$q=\frac{z}{a}-p,$$

mely érték az általános egyenletbe tétetvén, lesz:

$$dz=pdx-pdy+\frac{zdy}{a}, \quad \text{miből}$$

$$p(dx-dy)=z\left(\frac{dz}{z}-\frac{dy}{a}\right), \quad \text{avagy}$$

$$\frac{p}{z}(dx-dy)=\frac{dz}{z}-\frac{dy}{a}.$$

Ezen egyenlet jobb része azonnal egészelhető, a bal részében előforduló $(dx-dy)$ szorzónak egészlete pedig $(x-y)$ levén, ezen rész máskép nem lesz egészelhető, mint csak úgy, ha $\frac{p}{z}$ szorzó szintén $(x-y)$-nak valamely függvénye lesz, mely függvényt $\varphi(x-y)$-nal jelölvén, áll:

$$\log z-\frac{y}{a}=\varphi(x-y),$$

hogy pedig ezen kifejezés az adott egyenletnek valódi egészlete, e következő módon meg lehet mutatni, áll t. i. szintén:

$$\log z=\varphi(x-y)+\frac{y}{a}, \quad \text{következőleg} \quad z=e^{\frac{y}{a}}.e^{\varphi(x-y)};$$

mivel pedig $e^{\varphi(x-y)}$ szintén csak $(x-y)$-nak függvénye, szabad lesz azt $\psi(x-y)$-al jelölni, s így áll még:

$$z=\psi(x-y)e^{\frac{y}{a}},$$

ezen egyenletnek első x szerinti részlet-külzeléki hányadosa ez:

$$\frac{dz}{dx}=p=e^{\frac{y}{a}}\psi'(x-y),$$

ugyanannak első y szerinti részlet-külzeléki hányadosa pedig ez:

$$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{a}e^{\frac{y}{a}}\psi(x-y)-e^{\frac{y}{a}}\psi'(x-y),$$

és az utolsó két egyenlet összeadásából ered :

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}=\frac{1}{a}e^{\frac{y}{a}}.\psi(x-y)=\frac{z}{a},$$

mint ezt a fen adott egyenletben is látjuk:

(6-dik eset.) Az egészelendő egyenlet legyen :

$$X.\left(\frac{dz}{dx}\right)+Y.\left(\frac{dz}{dy}\right)=A.$$

Ez egyenletben X x-nek, Y pedig y-nak valamely függvénye, végre A állandó mennyiségnek tekintendő. Ez továbbá így is írható :

$$pX+qY=A, \quad \text{miből} \quad q=\frac{A}{Y}-\frac{pX}{Y},$$

ezen érték pedig az általános egészletbe tétetvén, lesz :

$$dz=pdx+A.\frac{dy}{Y}-\frac{pXdy}{Y}, \quad \text{avagy}$$

$$dz=A.\frac{dy}{Y}+pX\left(\frac{dx}{X}-\frac{dy}{Y}\right),$$

miből egészelés által kapjuk :

$$z=A\int\frac{dy}{Y}+\int pX\left(\frac{dx}{X}-\frac{dy}{Y}\right);$$

itt azonnal látjuk, hogy ezen egészletek elseje könnyen meghatározható, mivel az tisztán csak y-nak függvénye ; másika azonban csak azon esetre lesz egészelhető, ha pX szorzó az $\left(\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right)$ kifejezésnek függvénye, mely esetben tehát maga a kérdéses egészlet $F.\left[\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right]$ által állítható elő, s így a keresett egészlet lesz :

$$z=A\int\frac{dy}{Y}+F\left[\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right],$$

mely kifejezés a fen adott egyenletnek általános egészletét terjeszti elő ; például legyen adva :

$$mpx+nqy=a,$$

akkor ennek összehasonlításából következik :

$$X=mx, \quad Y=ny, \quad \text{és} \quad A=a,$$

miket helyettesítvén, lesz :

$$z=\frac{a}{n}logy+F.\left(\frac{1}{m}logx-\frac{1}{n}logy\right),$$

mely egyenlet azonban még így is írható :

$$z=\frac{a}{n}logy+F.\left(\frac{x^n}{y^m}\right),$$

ez egyenletben pedig $a=0$ és $m=n=1$ tétetvén, nyerni fogjuk :

$$z=F\left(\frac{x}{y}\right),$$

mint a $\left(\frac{dz}{dx}\right)x+\left(\frac{dz}{dz}\right)y=0$ egyenletnek egészletét.

(7-dik eset.) Legyen az egészelendő egyenlet :

$$X\left(\frac{dz}{dx}\right)+Y\left(\frac{dz}{dy}\right)=Z,$$

melyben X x-nek, Y y-nak és Z z-nek függvénye, akkor ezt így is irhatni :

$$pX+qY=Z,\text{ miből : } q=\frac{Z}{Y}-\frac{pX}{Y},$$

ezen értéket pedig az általános egyenletbe tévén, lesz :

$$dz=pdx+\frac{Zdy}{Y}-\frac{pXdy}{Y},$$

miből könnyü módon e következő egyenletet nyerjük :

$$\frac{dz}{Z}-\frac{dy}{Y}=\frac{pX}{Z}\left(\frac{dx}{X}-\frac{dy}{Y}\right),$$

mely egyenletből az egészelési feltétek világosan láthatók; világos ugyanis, hogy ennek bal része igen könnyen egészelhető, jobb része azonban csak azon esetre lesz egészelhető, ha $\frac{pX}{Z}$ szorzó az $\left[\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right]$-nak valamely függvénye volna, ez esetben azonban ezen jobb résznek egészlete, ugyanazon kifejezés valamely függvénye tartozik lenni, melyet ha $f\left[\int\frac{dx}{X}=\int\frac{dy}{Y}\right]$ jelképpel jelölünk, a keresett általános egészlet lesz :

$$\int\frac{dz}{Z}-\int\frac{dy}{Y}=f.\left[\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right],$$

miből z x és y-nak függvényében lesz :

$$\text{a)}\quad \int\frac{dz}{Z}=\int\frac{dy}{Y}+f.\left[\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right],$$

ez pedig a fen adott egyenletnek teljes egészlete, s nincs egyéb hátra, mint ezen általános képlet használatát egy pár példában megmutatni-

(1-ső Példa.) Adva van e következő egyenlet:

$$x^2\left(\frac{dz}{dx}\right)+y^2\left(\frac{dz}{dy}\right)=z^2,$$

akkor ezt az általános egyenlettel összehasonlítván, lesz:

$$X=x^2,\quad Y=y^2,\ \text{és}\ Z=z^2,$$

miből már következik:

$$\int\frac{dx}{X}=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x},\quad \int\frac{dy}{Y}=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y},\ \text{és}\ \int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{z},$$

miknek helyettesítése által kapjuk:

$$-\frac{1}{z}=-\frac{1}{y}+f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right),\ \text{tehát}:\ z=\frac{y}{1-yf\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)},$$

(2-dik Példa.) Legyen egészelendő az:

$$\frac{n}{z}=\frac{p}{x}+\frac{q}{y}\ \text{egyenlet, avagy}:$$

$$\frac{n}{z}=\frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{1}{y}\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

akkor erre nézve áll:

$$X=\frac{1}{x},\quad Y=\frac{1}{y}\ \text{és}\ Z=\frac{n}{z},$$

s ezeknek folytán

$$\int\frac{dx}{X}=\frac{x^2}{2},\quad \int\frac{dy}{Y}=\frac{y^2}{2}\ \text{és}\ \int\frac{dz}{Z}=\frac{z^2}{2n},$$

s mind ezeket az a) alatti egyenletbe tévén, nyerni fogjuk:

$$\frac{z^2}{2n}=\frac{y^2}{2}+f\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right),$$

mely egyenlet azonban még így is írható:

$$z^2=ny^2+f(x^2-y^2);$$

a $2n$ szorzó az utolsó tagban azért hagyatott el, mivel az úgy is (x^2-y^2)-nek határozatlan függvényét jelenti. Ha például $f(x^2-y^2)=k(x^2-y^2)$ volna, akkor egyenletünk így állna -

$$z^2=ny^2+k(x^2-y^2),\ \text{miből}:\ z=\sqrt{ny^2+k(x^2-y^2)},$$

ezt azonban csak részletes egészletnek kell tekinteni, minthogy $f(x^2-y^2)$ függvény tágasabb jelentésü, mint $k(x^2-y^2)$ kifejezés.

(8-dik eset.) Adatik e következő egyenlet :

$$M.\left(\frac{dz}{dx}\right)+N.\left(\frac{dz}{dy}\right)=z,$$

melyben mind M mind N, x és y változók fügvényei. Ezen egyenlet egészletét itt azon esetre fogjuk meghatározni, ha z-nek egy részletes értéke már ismeretes, mely az adott egyenletnek eleget tesz. Legyen tehát $z=V$ a kérdéses érték, lesz V nyilván x és y-nak függvénye, s minthogy az adott egyenlet így is írható :

$$1)\quad Mp+Nq=z,$$

V függvényt külzelvén, nyerni fogjuk :

$$2)\quad dV=Pdx+Qdy,$$

mely egyenletet az általános $dz=pdx+qdy$ egyenlettel összehasonlítván, minthogy $dV=dz$, áll $P=p$ és $Q=q$, s így a fenebbi 1) egyenlet tekintetbe vételével áll szintén :

$$3)\quad MP+NQ=V.$$

Azon feltét következtében, hogy $z=V$ egy részletes érték, mely az adott egyenletnek megfelel, itt : nyilván az adott egyenletnek csak általános egészlete meghatározásáról lehet szó, melyben, mint tudjuk, a részletes $z=V$ egészlet is foglaltatik, s így ezen általános egészletet szabad lesz e következő alakban előterjeszteni :

$$4)\quad z=Vf(T),$$

hol $f(T)$, x és y-nak tetszésszerinti függvényét jelenti; látjuk tehát, hogy az általános egészlet megalapítására, csak T meghatározandó, mi végre T-nek teljes külzeléke e következő egyenlet által adatik :

$$5)\quad dT=Rdx+Sdy,$$

hol R és S tényezők, x és y-nak határozatlan függvényei. Határoztassék meg a 4) alatti egyenletből z-nek mind x mind y szerinti részlet-külzeléki hányadosa, s nyerni fogjuk :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dV}{dx}\cdot f(T)+V.\frac{dT}{dx}f'(T),\text{ és}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{dV}{dy}\cdot f(T)+V\frac{dT}{dy}f'(T),$$

mivel továbbá a 2) és 5) alatti egyenleteket tekintetbe vévén, áll:

$$\frac{dV}{dx}=P,\quad \frac{dV}{dy}=Q,\quad \frac{dT}{dx}=R,\ \text{és}\ \frac{dT}{dy}=S,$$

az előttünk álló két egyenletet még így is lehet írni:

$$\frac{dz}{dx}=p=Pf(T)+R.Vf'(T),\ \text{és}$$

$$\frac{dz}{dy}=q=Qf(T)+SV.f'(T);$$

minthogy pedig az előbbiek szerint áll:

$$z=Vf(T)=Mp+Nq,$$

az előbbi két egyenlet elsejét M-el, másikát N-el szorozván, s ezután összeadván, nyerni fogjuk:

$$Vf(T)=(MP+NQ)f(T)+V(MR+NS)f'(T),$$

ezt pedig a 3) alatti egyenlettel összehasonlítván azonnal látjuk, hogy ez csak azon feltét alatt állhat, ha

$$MR+NS=0,\ \text{miből}\ S=-\frac{MR}{N},$$

mely érték az 5) alatti egyenletbe tétetvén, lesz:

$$dT=R\left(\frac{Ndx-Mdy}{N}\right),$$

s ezen egyenlet már alkalmas T-nek meghatározására, mindamellett, hogy R tényező x és y-nak határozatlan függvénye, mihelyt azon szorzót meg tudnók határozni, melynek szorzása által az $(Ndx-Mdy)$ külzelék egészelhetővé válik. Mindezekből tehát látjuk, hogy a fen adott egyenlet egészelésére csak az kivántatik, hogy az adott $z=Mp+Nq$ egyenletből, egy más, $dT=Ndx-Mdy$ egyenlet alakíttassék, mely egy alkalmas R szorzóval szoroztatván, egészelhetővé váljék; mert meglevén T, a kérdéses általános $z=Vf(T)$ egészlet is meglesz. Egy pár példa igen czélszerü lesz ezen tárgy felvilágosítására.

(1-ső Példa.) Legyen az adott egyenlet e következő:

$$z=\left(\frac{dz}{dx}\right)y+\left(\frac{dz}{dy}\right)x;$$

ezen egyenletet az általános egyenlettel összehasonlítván, áll:

$$M=y,\ \text{és}\ N=x,$$

azon egyenlet tehát, melytől az adott egyenletnek egészelése függ, lesz nyilván :

$$dT=R(xdx-ydy),$$

mivel pedig az $(xdx-ydy)$ kifejezés már magában véve egészelhető, lesz $R=1$, következőleg

$$T=f(x^2-y^2).$$

Látván továbbá azt is, hogy az adott egyenletnek egy részletes egészlete : $z=x+y=V$, annak általános egészlete nyilván lesz :

$$z=(x+y)f(x^2-y^2).$$

(2-dik Példa.) Legyen az adott egyenlet ez :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)(x+y)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(y-x)=z.$$

Ezen egyenletre nézve könnyü meggyőződhetni, hogy : $z=\sqrt{x^2+y^2}$ egy olyféle részletes érték, mely az adott egyenletnek eleget tesz, mert áll :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ és } \frac{dz}{dy}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

mely értékek az adott egyenletbe tétetvén, annak valóban megfelelnek. Ha tehát az adott egyenlet általános egészletének meghatározására, azt az általános egyenlettel összehasonlítjuk, áll :

$$M=x+y, \text{ és } N=y-x, \text{ következőleg}$$
$$dT=R(ydx-xdx-xdy-ydy),$$

mely egyenlet egészelhetővé válik, mihelyt azt $R=\frac{1}{x^2+y^2}$ szorzóval szorozzuk, minthogy az így fog állni :

$$dT=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}-\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2},$$

s ebből nyerjük :

$$T=\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}-\int\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2};$$

ezen egészletek elsejét illetőleg, már az előbbiekből tudjuk, hogy értéke $=arctg.\frac{x}{y}$; a második egészletre nézve pedig könnyü belátni, hogy értéke $=log\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}log(x^2+y^2)$, s mind ezeknek folytán áll :

$$T=arctg\frac{x}{y}-\frac{1}{2}log(x^2+y^2),$$

ebből pedig e következő általános egészletet kapjuk :

$$z=\sqrt{x^2+y^2}.f(T),$$

melyre nézve T-nek értéke már ismeretes.

(9-dik eset.) Legyen az egészelendő egyenlet ez :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)x.y=az.$$

Ezen egyenletet még így is írhatni :

$$pqxy=az, \text{ miből : } q=\frac{az}{pxy},$$

mely érték az általános egyenletben iratván q helyébe, lesz :

$$dz=pdx+\frac{azdy}{pxy}, \text{ miből :}$$

$$\frac{ady}{y}=\frac{px}{z}(dz-pdx).$$

Hogy ezen egyenlet egészelhetővé váljék, tétessék :

$$\frac{px}{z}=t, \text{ s lesz : } p=\frac{tz}{x},$$

s az utolsó egyenlet így fog állni :

$$\frac{ady}{y}=tdz-\frac{t^2zdx}{x};$$

erre nézve továbbá tétessék :

$$t^2z=s^2, \text{ s lesz : } t=\frac{s}{\sqrt{z}}, \text{ s így :}$$

$$\frac{ady}{y}=\frac{sdz}{\sqrt{z}}-\frac{s^2dx}{x},$$

miből egészelés által kapjuk :

$$alog.y=\int\frac{sdz}{\sqrt{z}}-\int\frac{s^2dx}{x},$$

mely két egészlet, ha részletesen tárgyaltatik, adja :

$$\int\frac{sdz}{\sqrt{z}}=2s\sqrt{z}-2\int ds\sqrt{z}, \text{ és}$$

$$\int\frac{s^2dx}{x}=s^2logx-2\int sds.logx, \text{ következőleg}$$

$$alogy=2s\sqrt{z}-s^2logx-2\int ds(\sqrt{z}-slogx),$$

itt pedig azonnal látjuk, hogy az utolsó egészlet csak azon esetre meghatározható, ha $(\sqrt{z}-slogx)$ szorzó s-nek valamely függvénye lesz, melyet $f'(s)$-el jelölvén, magát az egészletet $f(s)$ jelképpel szabad lesz előterjeszteni, s így áll :

$$\text{n)} \quad alogy=2s\sqrt{z}-s^2logx-2f(s);$$

mivel pedig :

$$f'(s)=\sqrt{z}-slogx, \text{ lesz : } 2s\sqrt{z}=2s^2logx+2sf'(s),$$

minek helyettesítése adja :

$$alogy=s^2logx+2sf'(s)-2f(s),$$

mely kifejezés az adott egyenlet teljes egészlete. A legegyszerübb eset akkor áll be, ha $f(s)=0$, tehát $f'(s)$ szintén $=0$, mert ez esetben áll :

$$s=\frac{\sqrt{z}}{logx}, \text{ tehát : } alogy=\frac{z}{logx}, \text{ miből :}$$

$$z=alogxlogy,$$

ez azonban csak részletes feloldásnak tekinthető. Ha pedig tétetik :

$$f'(s)=slogc, \text{ akkor : } f(s)=\int dsf'(s) \text{ miatt lesz :}$$

$$f(s)=\frac{1}{2}s^2logc, \text{ miből } f'(s)=\sqrt{z}-slogx \text{ miatt áll :}$$

$$slogc=\sqrt{z}-slogx, \text{ miből :}$$

$$s=\frac{\sqrt{z}}{logx+logc}=\frac{\sqrt{z}}{logcx},$$

mely érték a fenebbi n) alatti egyletbe tétetvén, ered :

$$alogy=\frac{2z}{logcx}-\frac{zlogx}{(logcx)^2}-\frac{zlogc}{(logcx)^2}=\frac{2z}{logcx}-\frac{z}{logcx},$$

avagy :

$$alogy=\frac{z}{logcx}, \text{ miből :}$$

$$z=alogy(logx+logc),$$

mely kifejezés által, z-nek megint csak egy részletes értéke adatik, mely az adott egyenletnek megfelel.

A MÁSOD RENDÜ RÉSZLET-KÜLZELÉKI EGYENLETEK EGÉSZELÉSE.

89.) Hogy az ide tartozó tantárgyakat annál jobban meglehessen érteni, czélszerü lesz e következőket előrebocsátni :

Ha itt is z alatt x és y-nak függvényét értjük, akkor a külzeléki hánylat elveiből tudjuk, hogy z-nek teljes első külzeléke mindig csak két részből áll, mely részek az x és y szerinti részlet-külzelékeknek neveztetnek ; az első részlet-külzeléki hányadosok pedig $\frac{dz}{dx}$ és $\frac{dz}{dy}$ jelképek által jelentetnek ki.

Minthogy továbbá ezen két részlet-külzeléki hányadosok mindegyike nem lehet egyéb, mint megint x és y-nak függvénye : szabad lesz azokat újra külzelni, s így a második rendü külzeléki hányadosokat nyerni. Itt azonban azonnal látjuk, hogy három másod rendü külzeléki hányados lehetséges, ha az adott függvény két változóval bír ; mert a $\frac{dz}{dx}$ hányados, ha újra külzeltetik x szerint, a második x szerinti részlet-külzeléki hányadost adja, mely $\frac{d^2z}{dx^2}$ jelkép által szokott kijelentetni. Hasonló módon pedig, ha az első $\frac{dz}{dy}$ részlet-külzeléki hányados újra külzeltetik y szerint, nyerni fogjuk a második y szerinti részlet-külzeléki hányadost, mely $\frac{d^2z}{dy^2}$ jelkép által jeleltetik. Végre könnyü belátni, hogy az első $\frac{dz}{dx}$ részlet-külzeléki hányados újra külzelhető, de y szerint, vagy hogy az első $\frac{dz}{dy}$ részlet-külzeléki hányados újra külzelhető, de

x szerint, mindkét esetben egy új másod rendü külzeléki hányadost fogunk nyerni, melyet a $\frac{d^2z}{dxdy}$ jelkép állít elő. Egy két változóval biró függvényhez tartozó másod rendü külzeléki hányadosok tehát, e következők lesznek:

$$\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy}, \quad \text{és} \quad \frac{d^2z}{dy^2},$$

azon feltét alatt t. i. hogy $z=f(x,y)$ legyen.

Ezeket előrebocsátván, már ezen szám czime is könnyen érthető lesz. Ha t. i. a megemlített három másod rendü külzeléki hányadosok bár melyike, x és y-nak valamely függvényével volna egyenlő: akkor ezen egyenletet egészelni nem teszen egyebet, mint ebből az x, y, és z változók közötti megfelelő viszonyt meghatározni. Itt könnyen előre lehet látni, hogy egy másod rendü részlet-külzeléki egyenletet csak úgy lehet egészelni, ha azt egy első rendü egyenletre visszavezetjük, mit alkalmas helyettesítés által lehet véghez-vinni, tudjuk t. i. hogy áll:

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \text{és} \quad \frac{dz}{dy}=q,$$

mely egyenletek elseje adja:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dp}{dx},$$

s látjuk, hogy ezen egyenlet bal része már egy első rendü külzeléki hányados, mely által $\frac{d^2z}{dx^2}$ másod rendü hányados első rendüre hozatik vissza. Hasonló módon $\frac{d^2z}{dy^2}$ hányados $\frac{dq}{dy}$ hányados által első rendüvé válik. Végre látjuk, hogy: $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$, mely jelkép által a $\frac{d^2z}{dxdy}$ hányados első rendüre hozatik. Ezeket tudván, nincs egyéb hátra, mint némely könnyebb esetek tárgyalása, melyeket e következő rendben hozzuk elő:

(1-ső eset.) Legyen adva e következő egyenlet:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=P,$$

melyben P alatt x és y-nak valamely függvényét kell érteni. Ezt egészelése végett, így is írhatni :

$$\frac{d^2z}{dx}=Pdx, \text{ avagy : } d.\left(\frac{dz}{dx}\right)=Pdx, \text{ következőleg}$$

$$\frac{dz}{dx}=\int Pdx+C,$$

ha t. i. csak x szerint történik az egészelés, y állandónak vétetvén; ez esetben azonban könnyü belátní, hogy C nem a közönséges állandó, hanem, hogy az y-nak függvénye is lehet, melyet tehát $f(y)$ által jelölvén, áll :

$$\frac{dz}{dx}=\int Pdx+f(y),$$

miből :

$$dz=dx\int Pdx+dxf(y), \text{ következőleg}$$

$$1)\quad z=\int dx\int Pdx+\int dxf(y)+F(y),$$

hol $F(y)$ a második egészelésnek tetszésszerinti függvénye, minthogy ez is x szerint vitetett véghez, y állandónak vétetvén. Hogy az utolsó kifejezés, általános egészlete az adott egyenletnek, abból következik, hogy benne két tetszésszerinti függvény fordúl elő, minthogy minden egyes egészelésnek egy olyan felel meg. Azon esetre ha $P=0$, az 1) egyenlet ebbe megy át :

$$z=xf(y)+F(y),$$

mint $\frac{d^2z}{dx^2}=0$ külzeléki egyenletnek teljes egészlete.

Hasonló módon, ha $\frac{d^2z}{dy^2}=P$ egyenlet volna egészelendő, melyben P szinte x és y-nak függvénye, a kétszeres egymásutáni y szerinti egészelés adja :

$$z=\int dy\int Pdy+yf(x)+F(x),$$

hol tehát $f(x)$ és $F(x)$ a két tetszésszerinti függvény. Ha itt is $P=0$ volna, $\frac{d^2z}{dy^2}=0$ egyenlet egészlete ez lesz :

$$z=yf(x)+F(x).$$

Itt czélszerü lesz egy pár példának a tárgyalása.

(1-ső Példa.) Az adott egyenlet legyen :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{xy}{a},$$

melyet a fenebbi általános egyenlettel összehasonlítván, lesz :

$$P=\frac{xy}{a}, \text{ következöleg}$$

$$\int Pdx=\frac{y}{a}\int xdx=\frac{x^2y}{2a};$$

továbbá áll :

$$\int dx\int Pdx=\frac{y}{2a}\int x^2dx=\frac{x^3y}{2.3.a},$$

s így az adott egyenlet teljes egészlete lesz :

$$z=\frac{x^3y}{2.3.a}+xf(y)+F(y).$$

(2-dik Példa.) Legyen egészelendő :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

ezt is az általános egyenlettel hasonlítván össze, áll :

$$P=\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ tehát :}$$

$$\int Pdx=a\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}=a\sqrt{x^2+y^2},$$

s ennek folytán kapjuk :

$$\int dx\int Pdx=a\int dx\sqrt{x^2+y^2},$$

mely egészletre az ismert lenyomási képletet alkalmazván, lesz :

$$a\int dx\sqrt{x^2+y^2}=\frac{ax}{2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{ay^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

továbbá áll :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=log(x+\sqrt{x^2+y^2}),$$

az adott egyenlet teljes egészlete tehát lesz :

$$z=\frac{ax}{2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{ay^2}{2}log(x+\sqrt{x^2+y^2})+xf(y)+F(y).$$

(3-dik Példa.) Adva van e következő egyenlet :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=x.sin(x+y),$$

itt tehát áll : $P=xsin(x+y)$, s ennél fogva lesz :

$$\int Pdx=\int xdxsin(x+y),$$

erre pedig a 35)-dik szám 26) alatti képletét alkalmazván, áll :

$$\int xdxsin(x+y)=sin(x+y)-xcos(x+y),\text{ következőleg}$$

$$\int dx\int Pdx=\int dxsin(x+y)-\int xdxcos(x+y);\text{ ámde áll :}$$

$$\int dxsin(x+y)=-cos(x+y),$$

az utolsó egészletre pedig a 35)-dik szám 27) alatti képletét alkalmazván, lesz :

$$\int xdx.cos(x+y)=cos(x+y)+xsin(x+y),\text{ tehát :}$$

$$\int dx\int Pdx=-2cos(x+y)-xsin(x+y),\text{ s így :}$$

$$z=-2cos(x+y)-xsin(x+y)+xf(y)+F(y),$$

mint teljes egészlete az adott egyenletnek.

(2-dik eset.) Legyen egészelendő e következő egyenlet :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{dz}{dx}\right)P+Q,$$

melyben mind P mind Q tényezők x és y-nak függvényei. Ezen egyenlet egészelése végett tétessék :

$$\frac{dz}{dx}=p,\text{ lesz }\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dp}{dx},$$

minek folytán az még így is áll :

$$\frac{dp}{dx}=Pp+Q,\text{ miből : }dp=Ppdx+Qdx,$$

mely utolsó egyenlet egészelhetővé válik azon esetre, ha azt $e^{-\int Pdx}$-el szorozzuk, mert az által kapjuk :

$$dpe^{-\int Pdx}-Ppdx.e^{-\int Pdx}=Qdx.e^{-\int Pdx},$$

s itt azonnal látjuk, hogy ezen egyenlet bal része a $p.e^{-\int Pdx}$ szorzat teljes külzeléke, egészelés által tehát kapjuk :

$$p.e^{-\int Pdx}=\int e^{-\int Pdx}Qdx+f(y),$$

hol $f(y)$ az ismert tetszésszerinti függvény, minthogy itt is csak x szerint történt az egészelés. Ebből továbbá nyerjük:

$$p=e^{\int Pdx}\int e^{-\int Pdx}.Qdx+f(y).e^{\int Pdx},$$

és ha itt p helyébe $\frac{dz}{dx}$ értéket helyettesítjük, lesz:

$$z=\int dxe^{\int Pdx}\int e^{-\int Pdx}.Qdx+f(y)\int dxe^{\int Pdx}+F(y),$$

ez pedig az adott egyenlet általános egészlete, minthogy két tetszésszerinti függvényt foglal magában. Itt nem lesz felesleges még azt is megemlítni, hogy ha

$$\frac{d^2z}{dy^2}=P.\frac{dz}{dy}+Q$$

egyenlet volna egészelendő, melyben P és Q szintén x és y-nak függvényei, akkor itt is hasonló módon járván el, csak azzal a különbséggel, hogy itt y szerint történendő az egészelés, e következő általános egyenletre fogunk jutni:

$$z=\int e^{\int Pdy}\,dy\int e^{-\int Pdy}Qdy+f(x)\int e^{\int Pdy}+F(x).$$

Czélszerü lesz itt e következő példák tárgyalása:

(1-ső Példa.) Legyen az egészelendő egyenlet ez:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{n}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

melyet az előbbi mód szerint így is lehet írni:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{np}{x},\text{ miből: }\frac{dp}{p}=n\frac{dx}{x},\text{ következőleg}$$

$$logp=logx^n+logf(y),\text{ avagy:}$$

$$p=x^nf(y),\text{ és } p \text{ helyébe értékét téve, lesz:}$$

$$dz=x^ndxf(y),\text{ tehát: } z=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot f(y)+F(y),$$

mint teljes egészlete az adott egyenletnek. Azon külön esetre, ha $n=1$, áll: $n=-1$

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} f(y), \text{ következőleg}$$

$$z = logx.f(y) + F(y).$$

(2-dik Példa.) Legyen az adott egyenlet :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{n}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{a}{xy};$$

ezt is az előbbi mód szerint következőképen lehet írni :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{np}{x} + \frac{a}{xy}, \text{ miből : } dp = \frac{npdx}{x} + \frac{adx}{xy};$$

ezen egyenlet egészelése végett pedig, jó lesz azt x^n mennyiséggel elosztani, minek folytán kapjuk :

$$\frac{dp}{x^n} = \frac{npdx}{x^{n+1}} + \frac{adx}{yx^{n+1}},$$

melyből e következő kifejezés ered :

$$\frac{xdp - npdx}{x^{n+1}} = \frac{adx}{yx^{n+1}},$$

hol azonnal látjuk, hogy ezen egyenlet bal része a $\frac{p}{x^n}$ hányadosnak teljes külzeléke, egészelés által tehát nyerjük :

$$\frac{p}{x^n} = \frac{a}{y}\int\frac{dx}{x^{n+1}} + f(y),$$

itt pedig a kijelentett egészelést véghez vivén, nyerni fogjuk :

$$p = -\frac{a}{ny} + x^n f(y),$$

végre p helyébe értékét tévén, lesz :

$$dz = -\frac{adx}{ny} + x^n dx f(y), \text{ miből egészelés által :}$$

$$z = -\frac{ax}{ny} + \frac{x^{n+1}}{n+1} f(y) + F(y),$$

hol $F(y)$ a második egészelésnek tetszésszerinti függvénye; s ez az adott egyenlet általános egészlete.

(3-dik Példa.) Legyen az egészelendő egyenlet :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2x}{x^2+y^2}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{x}{ay},$$

mely egyenlet a p értékének segítségével így is írható :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2px}{x^2+y^2} + \frac{x}{ay}, \text{ miből : } dp = \frac{2pxdx}{x^2+y^2} + \frac{xdx}{ay};$$

ha ezen egyenlet mind két része (x^2+y^2)-vel elosztatik, akkor ez egészelhetővé fog válni, mert e következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{dp}{x^2+y^2}-\frac{2pxdx}{(x^2+y^2)^2}=\frac{xdx}{ay(x^2+y^2)}.$$

mely egyenletet így is lehet írni:

$$\frac{dp(x^2+y^2)-2pxdx}{(x^2+y^2)^2}=\frac{xdx}{ay(x^2+y^2)},$$

ezen egyenlet bal része pedig nyilván a $\frac{p}{x^2+y^2}$ hányadosnak teljes külzeléke, ha t. i. azt csak x szerint külzeljük; egészelés által tehát nyerni fogjuk:

$$\frac{p}{x^2+y^2}=\frac{1}{ay}\int\frac{xdx}{x^2+y^2}+f(y),\text{ avagy:}$$

$$\frac{p}{x^2+y^2}=\frac{1}{2ay}log(x^2+y^2)+f(y),$$

miből továbbá kapjuk:

$$p=\frac{x^2+y^2}{2ay}log(x^2+y^2)+(x^2+y^2)f(y),$$

és p-nek az értékét visszahelyezvén, lesz:

$$z=\frac{1}{2ay}\int dx(x^2+y^2)log(x^2+y^2)+f(y)\int dx(x^2+y^2)+F(y).$$

Itt látjuk, hogy $\int dx(x^2+y^2)$, ha azt x szerint egészeljük, lesz $=\frac{x}{3}(x^2+3y^2)$, a második egészletet azonban részletesen kell tárgyalnunk, $\int udv=uv-\int vdu$ képlet szerint, melyben teendő:

$$(x^2+y^2)dx=dv,\text{ és } log(x^2+y^2)=u,\text{ s lesz:}$$

$$v=\frac{x}{3}(x^2+3y^2),\text{ és } du=\frac{2xdx}{x^2+y^2},\text{ s így áll:}$$

$$\int dx(x^2+y^2)\,log(x^2+y^2)=\frac{x}{3}(x^2+3y^2)log(x^2+y^2)$$
$$-\frac{2}{3}\int\frac{x^2dx(x^2+3y^2)}{x^2+y^2},$$

mely utolsó egészlet e következő kettőbe megy át:

$$=\frac{2}{3}\int\frac{x^4dx}{x^2+y^2}+2y^2\int\frac{x^2dx}{x^2+y^2},$$

melyekre nézve közvetlen osztás által nyerjük :

$$\frac{2}{3}\int\frac{x^4dx}{x^2+y^2}=\frac{2x^3}{9}-\frac{2xy^2}{3}-\frac{2y^3}{3}\,arctg\,\frac{x}{y},\text{ és}$$

$$2y^2\int\frac{x^2dx}{x^2+y^2}=2xy^2-2y^3.arctg\frac{x}{y},$$

miket helyettesítvén, e következő általános egészletet fogjuk nyerni :

$$z=\frac{x(x^2+3y^2)}{6ay}log(x^2+y^2)-\frac{1}{9ay}\left(x^3+6xy^2-12y^3arctg\frac{x}{y}\right)$$
$$+\frac{x}{3}(x^2+3y^2)f(y)+F(y).$$

(3-dik eset.) Meghatározandó e következő egyenlet egészlete :

$$\frac{d^2z}{dxdy}=P,$$

hol P mind x mind y-nak függvénye. Ennek egészelése végett tétessék : $\frac{dz}{dx}=p$, s lesz : $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{dp}{dy}$, minek helyettesítése adja :

$$\frac{dp}{dy}=P,\quad\text{miből : }\quad dp=Pdy,$$

ez egyenletből pedig, ha x állandónak vétetik, kapjuk :

$$p=\int Pdy+f(x),$$

hol $f(x)$ az első egészelésnek tetszésszerinti függvénye, és p helyébe értékét visszahelyezve, lesz :

$$dz=dx\int Pdy+dxf(x),$$

itt pedig ha y állandónak vétetik, és csak x szerint vitetik véghez az egészelés, nyerni fogjuk :

$$z=\int dx\int Pdy+\int dx\,f(x)+F(y),$$

hol $F(y)$ a második egészelésnek tetszésszerinti függvénye. Minthogy továbbá $dxf(x)$ tisztán csak x-nek függvénye, egészletét $\varphi(x)$ által jelölvén, áll még :

$$z=\int dx\int Pdy+\varphi(x)+F(y),$$

mely kifejezés az adott egyenlet teljes egészletének tekintendő, minthogy benne két tetszésszerinti függvény fordúl elő. Ezen képlet nyerése végett tétetett $\frac{dz}{dx}=p$, és legelőször y szerint történt az egészelés; ha pedig $\frac{dz}{dy}=p$ tétetnék, és az első egészelés x szerint vitetnék véghez, akkor nyilván e következő általános képletet kapnók:

$$z=\int dy\int Pdx+f(y)+F(x).$$

Felvilágositásúl szolgáljanak e következő példák:

(1-ső Példa.) Legyen az adott egyenlet:

$$\frac{d^2z}{dxdy}=ax+by;$$

lesz: $P=ax+by$, s így szükségképen áll:

$$\int Pdy=axy+\frac{1}{2}by^2, \text{ miből továbbá:}$$

$$\int dx\int Pdy=\frac{ax^2y}{2}+\frac{by^2x}{2}=\frac{1}{2}xy(ax+by),$$

az adott egyenlet teljes egészlete tehát lesz:

$$z=\frac{1}{2}xy(ax+by)+f(x)+F(y).$$

(2-dik Példa.) Adatik e következő egyenlet:

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\sqrt{a^2-y^2};$$

ha itt legelőször x szerint vitetik véghez az egészelés, akkor $P=\sqrt{a^2-y^2}$ miatt, lesz:

$$\int Pdx=x\sqrt{a^2-y^2}, \text{ következőleg}$$

$$\int dy\int Pdx=x\int dy\sqrt{a^2-y^2},$$

mely egészlet az ismert lenyomási képlet szerint tárgyaltatván, lesz:

$$\int dy\sqrt{a^2-y^2}=\frac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}arcsin\frac{y}{a}, \text{ tehát:}$$

$$\int dy \int P dx = \frac{xy}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2x}{2} arcsin\frac{y}{a},$$

s ennek folytán az adott egyenlet teljes egészlete lesz :

$$z = \frac{xy}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2x}{2} arcsin\frac{y}{a} + f(y) + F(x).$$

(4-dik eset.) Vegyük még egészelendőnek e következő egyenletet :

$$\frac{d^2z}{dxdy} = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q,$$

melyben P és Q tényezők mind x mind y-nak függvényei. Ennek egészelése végett teendő :

$$\frac{dz}{dx} = p, \text{ s lesz : } \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{dp}{dy},$$

minek következtében az adott egyenlet még így is áll :

$$\frac{dp}{dy} = Pp + Q, \text{ miből : } dp = Ppdy + Qdy,$$

mely egyenlet egészelhetővé válik, ha azt $e^{-\int Pdy}$-nal szorozzuk, mert ez által ezen egyenlet következőbe megy át :

$$e^{-\int Pdy}dp - Ppe^{-\int Pdy}dy = e^{-\int Pdy}Qdy,$$

itt pedig azonnal látjuk, hogy ezen egyenlet bal része : $pe^{-\int Pdy}$ szorzatnak teljes külzeléke ; egészelés által tehát kapjuk :

$$pe^{-\int Pdy} = \int e^{-\int Pdy}.Qdy + f(x),$$

hol $f(x)$ az első egészelésnek tetszésszerinti függvénye ; ebből pedig kapjuk :

$$p = e^{\int Pdy}\int e^{-\int Pdy}.Qdy + e^{\int Pdy}f(x),$$

és ha p-nek értéke vissza-helyeztetik, és az egészelés véghez vitetik, lesz :

$$z = \int e^{\int Pdy}dx \int e^{-\int Pdy}Qdy + \int e^{\int Pdy}.f(x)dx + F(y),$$

ez pedig az adott egyenlet teljes egészletének tekintendő, minthogy két tetszésszerinti függvénynyel bír. Példa gyanánt tárgyalandó legyen e következő egyenlet :

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{n}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x};$$

tévén itt $\frac{dz}{dx}=p$, következőleg $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{dp}{dy}$, akkor az adott egyenlet ebbe megy át:

$$\frac{dp}{dy}=\frac{np}{y}+\frac{m}{x}, \text{ miből : } dp=\frac{npdy}{y}+\frac{mdy}{x};$$

ha továbbá ezen egyenlet mind két részét y^n-el elosztjuk, akkor ez egészelhetővé fog válni, s így áll:

$$\frac{dp}{y^n}-\frac{npdy}{y^{n+1}}=\frac{mdy}{xy^n},$$

mely egyenletnek első megtekintéséből látjuk, hogy ennek bal része a $\frac{p}{y^n}$ hányados teljes külzeléke, egészelés által tehát kapjuk:

$$\frac{p}{y^n}=\frac{m}{x}\int\frac{dy}{y^n}+f'(x), \text{ avagy :}$$

$$\frac{p}{y^n}=-\frac{m}{(n-1)x.y^{n-1}}+f'(x),$$

miben az y^n nevezőt eltüntetvén, és p helyébe értékét helyettesítvén, lesz:

$$dz=-\frac{mydx}{(n-1)x}+y^n dxf'(x),$$

ebből pedig második egészelés által kapjuk:

$$z=-\frac{m}{n-1}y.logx+y^n\int dxf'(x)+F(y);$$

mivel továbbá

$$\int dxf'(x)=f(x) \text{ tehető},$$

áll még:

$$z=-\frac{m}{n-1}ylogx+y^n f(x)+F(y),$$

mely kifejezés az adott egyenletnek általános egészlete, mivel két tetszésszerinti függvénynyel van ellátva.

EGYÜTTES KÜLZELÉKI EGYENLETEK EGÉSZELÉSE.

90.) Valahányszor több külzeléki egyenlet adatik, melyek mindegyikében az x, y, z, v .... változók egyike vagy másika fordúl elő, de úgy hogy ezen változók mindegyike, egy ugyanazon t változótól függ, az említett külzeléki egyenleteknek tehát együtt azaz függőleg egymástól kell állniok: akkor ezek együttes külzeléki egyenleteknek neveztetnek (simultane Differential-gleichungen).

Ha tehát azt képzeljük, hogy n olyféle külzeléki egyenlet van adva, melyekben egyszersmind ugyanannyi változó fordúl elő, de ezen változók mindegyike ugyanazon t változótól függ: akkor mindig lehetséges lesz, az adott egyenletekből $(n-1)$ változót kiküszöbölni, s így egy olyféle külzeléki egyenletre jutni, melyben csak t, és a fen említett változók egyike fordúl elő; ez pedig ha egészelhető volna, a többi változók meghatározására is szolgáland. A változók kiküszöbölését illetőleg, ez, mint könnyü belátni, tisztán csak algebrai mütételektől függ, a milyenek t. i. a közönséges egyenleteknél is használatban vannak. Ezen eljárás kellő megértésére, adva legyen e következő két külzeléki egyenlet:

$$\frac{dx}{dt}+Px+Qy=R\,, \quad \text{és}$$

$$\frac{dy}{dt}+P_1x+Q_1y=R_1\,, \quad \text{avagy:}$$

$$1)\quad dx+Pxdt+Qydt=Rdt\,, \quad \text{és}$$

$$dy+P_1xdt+Q_1ydt=R_1dt\,,$$

melyeket együttes külzeléki egyenleteknek kell tekintenünk, melyekben P, Q, R, P_1, Q_1, és R_1 tényezők, t függvényeinek tekintendők; akkor ezekből egy egyenletet fogunk nyerni az által, ha az utolsó egyenletet bizonyos K szorzóval, mely

t-nek függvénye, szorozzuk, s az így nyert eredményt az első egyenlethez hozzá adjuk. Ezen eljárárás által e következő egyenletre jutunk :

$$2)\quad (P+P_1K)\left[x+y\cdot\frac{Q+Q_1K}{P+P_1K}\right]dt+dx+Kdy=dt(R+R_1K),$$

mely egyenlet u és t között első rendü lesz azon esetre, ha

$$3)\quad dx+Kdy=d.\left[x+y\cdot\frac{Q+Q_1K}{P+P_1K}\right] \text{ áll.}$$

Ebből továbbá világosan következik, hogy :

$$K=\frac{Q+Q_1K}{P+P_1K}\text{-nek kell lenni;}$$

tévén tehát :

$$x+y.\frac{Q+Q_1K}{P+P_1K}=u,$$

a fenebbi 2) alatti egyenlet igy álland :

$$(P+P_1K)udt+du=(R+R_1K)dt,$$

ez pedig, mint látjuk, egy vonalos első rendü külzeléki egyenlet, melyben a változók már elválasztvák egymástól, ez tehát, mint az előbbiekből tudjuk, sok esetben könnyen egészelhető. A fenebbi K-t adó egyenletből továbbá látjuk, hogy K-nak két értéke van, mely értékek arra használhatók, hogy mind x mind y változó, t-nek függvényében legyen kifejezhető. Ezen két egyenlet azonban, mint később látni fogjuk, az együttes egyenletek külzelése által is nyerhető.

(1-ső Példa.) Legyen adva e következő két egyenlet :

$$\frac{dx}{dt}+Ax+By=0, \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dt}+A_1x+B_1y=0,$$

hol A, B, A_1 és B_1 állandó mennyiségek; ha ezen egyenletek másodikát K-val szorozzuk, és az eredményt az első egyenlethez hozzáadjuk, lesz :

$$(A+KA_1)\left[x+\frac{B+KB_1}{A+KA_1}y\right]dt+dx+Kdy=0,$$

s minthogy itt az előbbiek szerint állnia kell :

$$dx+Kdy=d.\left[x+\frac{B+KB_1}{A+KA_1}y\right]\text{, tehát,}$$

ha a zárjelbeni mennyiséget u-val jelöljük, áll :

$$dx+Kdy=du\text{, következőleg}$$

$$1)\quad (A+KA_1)udt+du=0.$$

Továbbá látjuk, hogy K-ra nézve e következő egyenlet áll :

$$K=\frac{B+KB_1}{A+KA_1},\ \text{miből kapjuk :}$$

$$K^2+\frac{A-B_1}{A_1}K-\frac{B}{A}=0,$$

miből következtetnünk kell, hogy K-nak két értéke van, mely értékeket itt k és k'-el jelölünk. A fenebbi 1) egyenlet pedig adja :

$$\frac{du}{u}=-(A+KA_1)dt,\ \text{és}\ A+KA_1=h\ \text{tétetvén, lesz :}$$

$$\frac{du}{u}=-hdt,\ \text{tehát : } logu=-ht,\ \text{avagy : } u=e^a e^{-ht};$$

mivel pedig h-nak két különböző értéke van, minthogy az K-tól függ, valamint tehát K-nak kettős értéke van, úgy h is, kettős értékkel bírand, mely értékeket h és h'-el jelölvén, u-ra nézve e következő két értéket fogjuk nyerni :

$$u=Ce^{-ht},\ \text{és}\ u_1=C'e^{-h't};$$

minthogy továbbá áll :

$$du=dx+kdy,\ \text{és}\ du_1=dx+k'dy,$$

így ezen egyenletek egészelése által kapjuk :

$$2)\quad u=x+ky,\ \text{és}\ u_1=x+k'y,$$

mely két egyenletből már mind x mind y kifejezhető t-nek függvényében, mert ezekből e következő két egyenletet kapjuk :

$$y=\frac{Ce^{-ht}-C'e^{-h't}}{k-k'},\ \text{és}$$

$$x=\frac{k'Ce^{-ht}-kC'e^{-h't}}{k-k'}.$$

A fenebbi 2) alatti egyenletek egészleteihez semmi állandókat nem csatoltunk, minthogy ezen állandók többé nem tetszésszerintiek, hanem inkább C és C' állandóktól függnek, s így velök egyesülnek. Általánosan véve, az együttes külzeléki egyenletek csak annyi állandót adnak, a mennyit a rendszámok összege tesz a legmagasabb rendü külzeléki hányadosokban, melyek az adott egyenletekben fordúlnak elő.

(2-dik Példa.) Legyenek az adott egyenletek :

$$\frac{dx}{dt}+Ay=0\text{, és }\frac{dy}{dt}+Bx=0\text{, avagy :}$$

$$dx+Aydt=0\text{, és }dy+Bxdt=0,$$

mely egyenletek utolsóját K-val szorozván, és az első egyenlethez hozzá adván, nyerni fogjuk :

$$dx+Kdy+BKdt\left(x+\frac{A}{BK}y\right)=0;$$

hogy pedig ez egészelhető legyen, kell hogy álljon :

$$dx+Kdy=d.\left(x+\frac{A}{BK}y\right)\text{, tehát :}$$

$$K=\frac{A}{BK}\text{, miből : }K^2=\frac{A}{B}\text{, s így :}$$

$$K=\pm\sqrt{\frac{A}{B}}\text{, tévén továbbá :}$$

$$x+\frac{A}{BK}y=u\text{, lesz : }dx+Kdy=du,$$

és a fenebbi egyenlet még így is áll :

$$du+BKudt=0\text{, miből :}$$

$$\frac{du}{u}=-BKdt\text{, tehát : }logu=-BKt+a\text{, s így :}$$

$$u=e^a.e^{-BKt}\text{, avagy : }u=Ce^{-BKt};$$

mivel pedig K-nak két értéke van, u-nak is két értéke lesz, mely második érték u_1-el jegyeztetvén, áll :

$$u_1=C'e^{BKt}\text{, minthogy továbbá }BK=\pm\sqrt{AB}=n,$$

áll még :

$$u=Ce^{-nt}\text{, és }u_1=C'e^{nt},$$

ámde áll szintén :

$$x+\sqrt{\frac{A}{B}}y=u\text{, és }x-\sqrt{\frac{A}{B}}y=u_1\text{, avagy :}$$

$$x+\sqrt{\frac{A}{B}}y=Ce^{-nt}\text{, és }x-\sqrt{\frac{A}{B}}y=C'e^{nt},$$

mely egyenletek összeadása és kivonása által nyerjük :

$$x=Ce^{-nt}+C'e^{nt}\text{, és }y=\sqrt{\frac{B}{A}}.Ce^{-nt}-\sqrt{\frac{B}{A}}.C'e^{nt}.$$

(3-dik Példa.) Legyenek az adott egyenletek :

$$\frac{dx}{dt}+4x+3y=t\,,\ \text{és}\ \frac{dy}{dt}+2x+5y=e^t\,,\ \text{avagy}:$$

$$dx+4xdt+3ydt=tdt\,,\ \text{és}\ dy\pm 2xdt+5ydt=dt.e^t\,,$$

mely utolsó egyenlet K-val szoroztatván, és az elsőhöz hozzáadatván, lesz :

$$dx+Kdy+dt(4+2K)\left[x+\frac{3+5K}{4+2K}y\right]=dt(t+Ke^t)\,,$$

itt tehát szükségkép állni kell ennek :

$$dx+Kdy=d.\left[x+\frac{3+5K}{4+2K}y\right],\ \text{és ha}$$

$$x+\frac{3+5K}{4+2K}y=u\ \text{tétetik, lesz}:\ dx+Kdy=du\,,$$

$$\text{és mivel}\ \ K=\frac{3+5K}{4+2K},\ \ \text{nyerni fogjuk}:$$

$$K=\frac{1}{4}\pm\frac{5}{4},\ \ \text{avagy}:\ K=\frac{3}{2}\ \ \text{és}\ \ K=-1,$$

egyenletünk pedig e következőbe megy át :

$$du+(4+2K)udt=dt(t+Ke^t)\,,$$

és ha rövidség okáért : $4+2K=A$ tétetik, áll ;

$$du+Audt-dt(t+Ke^t)=0\,,$$

mely egyenlet egészelése már ismeretes előttünk, ez t. i. a

$$dy+Pydx+Qdx=0$$

egyenlettel teljes hasonlósággal bír, ezt pedig már a 62)-dik szám 4-dik példájában egészelni láttuk, hol e következő általános képletet találtuk :

$$y=e^{-\int Pdx}\left[-\int dxQe^{\int Pdx}+C\right],$$

hol y u-val, x pedig t-vel lesz felcserélendő, továbbá $P=A$ allandó mennyiség, és $Q=-(t+Ke^t)$, miknek helyettesítése adja :

$$u=e^{-At}.\left[\int tdte^{At}+K\int dte^{t(1+A)}+C\right].$$

A zárjelben előforduló egészletek elsejét, részletesen kell tárgyalni, $\int udv=uv-\int vdu$ képlet segítségével, melyben teendő :

$$dte^{At}=dv,\ \text{és}\ u=t,\ \text{s lesz}:\ du=dt,\ \text{és}\ v=\frac{e^{At}}{A},$$

minek folytán áll:

$$\int tdte^{At}=\frac{te^{At}}{A}-\frac{e^{At}}{A^2},\text{ és}$$

$$K\int dte^{t(1+A)}=\frac{Ke^t.e^{At}}{1+A},$$

miknek helyettesítése adja:

$$u=\frac{t}{A}-\frac{1}{A^2}+\frac{Ke^t}{1+A}+Ce^{-At};$$

mivel pedig K-nak, tehát A-nak is két értéke van, u-nak is két értéke lesz, ha tehát először $K=\frac{3}{2}$, tehát $A=7$, azután pedig $K=-1$, tehát $A=2$ tétetik, észre vévén még, hogy $u=x+Ky$, nyerni fogjuk:

$$x+\frac{3}{2}y=\frac{t}{7}-\frac{1}{49}+\frac{3e^t}{16}+Ce^{-7t},\text{ és}$$

$$x-y=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}-\frac{e^t}{3}+C'e^{-2t},$$

mely egyenletekből x és y-nak e következő értékeit nyerjük:

$$x=-\frac{31}{196}+\frac{5}{14}t-\frac{e^t}{8}+Ce^{-7t}-C'e^{-2t},\text{ és}$$

$$y=\frac{9}{98}-\frac{t}{7}+\frac{5}{24}e^t-Ce^{-7t}-C'e^{-2t};$$

igy tehát mind x mind y ki van fejezve t-nek függvényében.

(4-dik Példa.) Advák e következő egyenletek:

$$\frac{dx}{dt}+by+cz=0,\quad \frac{dy}{dt}+ax+c_1z=0,\quad\text{és}$$

$$\frac{dz}{dt}+a_1x+b_1y=0;$$

akkor itt mindenek előtt z eltávolítandó lesz, mi végre e következő módon kell eljárni: Külzeltessék az első és második egyenlet, s áll:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+c\frac{dz}{dt}=0,\quad\text{és}\quad \frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+c_1\frac{dz}{dt}=0,$$

ezekben pedig $\frac{dz}{dt}$-nek értéke a harmadik egyenletből helyettesíttessék, s e következő két egyenletet fogjuk nyerni:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}-ca_1x-cb_1y=0\text{, és}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}-a_1c_1x-c_1b_1y=0\text{;}$$

ezen egyenletek elsejét újra külzelvén, ered :

$$\frac{d^3x}{dt^3}+b\frac{d^2y}{dt^2}-ca_1\frac{dx}{dt}-cb_1\frac{dy}{dt}=0\text{;}$$

ha pedig ezen egyenletek másodikát b-vel szorozzuk, és az utolsó egyenletből kivonjuk, nyerni fogjuk :

$$\frac{d^3x}{dt^3}-(ca_1+ab)\frac{dx}{dt}-cb_1\frac{dy}{dt}-a_1c_1bx-b_1c_1by=0\text{;}$$

végre az adott egyenletek elsejét b_1c_1-el szorozván, és az előttünk álló egyenletből kivonván, kapjuk :

$$\frac{d^3x}{dt^3}-(ca_1+ab+b_1c_1)\frac{dx}{dt}+(cb_1a-ba_1c_1)x=0\text{,}$$

mely külzeléki egyenletnek csak x és t között van helye, és ha rövidség okáért tétetik :

$$ca_1+ab+b_1c_1=h\text{, és } cb_1a-ba_1c_1=k\text{, áll :}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}-h\cdot\frac{dx}{dt}+kx=0\text{,}$$

ez pedig, mint látjuk, egy harmad rendü vonalos külzeléki egyenlet, melynek egészelése már a 81)-dik szám alatt megmutattatott; ezen egyenletnek t. i. $x=e^{rt}$ érték által meg van felelve, áll ugyanis

$$\frac{dx}{dt}=re^{rt}\text{, és } \frac{d^3x}{dt^3}=r^3e^{rt}\text{,}$$

miknek helyettesítése által, a fenebbi egyenlet e következőbe megy át :

$$r^3-hr+k=0\text{,}$$

melynek, mint tudjuk, három gyöke van, s ezeket a, a', és a'' által jelölvén, ennek három részletes egészletei lesznek :

$$x=Ce^{at}\text{, } x=C'e^{a't}\text{, és } x=C''e^{a''t}\text{,}$$

mikből e következő általános egészlet ered :

$$x=Ce^{at}+C'e^{a't}+C''e^{a''t}\text{,}$$

mivel benne, mint látjuk, három tetszésszerinti állandó fordúl elő. Meglevén x, y nak értékét az által fogjuk kapni, ha az adott első és második egyenletekből z változót kiküszöböljük, mi által e következő egyenletre jutunk :

$$c_1\frac{dx}{dt}-c\frac{dy}{dt}+c_1by-acx=0,$$

itt pedig, ha $\frac{dx}{dt}$ és x helyébe a fenebbi egyenletből eredő értékeket helyettesítjük, e következő alaku egyenletet fogjuk kapni:

$$cdy+nydt-f(t)dt=0,$$

melynek a $dy+Pydx+Qdx=0$ egyenlettel teljes hasonlósága van, ez tehát szintén a 62)-dik szám alatti minta szerint lesz egészelhető. A kijövő eredmény x-nek az értékéhez lesz hasonló.

(5-dik Példa.) Legyenek az adott egyenletek:

$$2.\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0, \text{ és}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+96.\frac{dx}{dt}-9x+\frac{d^2y}{dt^2}+50\frac{dy}{dt}+15y=0.$$

Ezek, mint látjuk, másod rendü vonalos külzeléki egyenletek, melyekben ha $x=e^{mt}$, és $y=Ae^{mt}$ teszünk, áll:

$$\frac{dx}{dt}=me^{mt},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=m^2e^{mt},\quad \frac{dy}{dt}=mAe^{mt},\quad \text{és}\quad \frac{d^2y}{dt^2}=m^2Ae^{mt},$$

ezen értékek helyettesítése által az adott egyenletekből kapjuk:

$$2m^2+m+1+A(m^2+m+1)=0, \text{ és}$$

$$m^2+96m-9+A(m^2+50m+15)=0,$$

mely egyenletekből, ha az A tetszésszerinti mennyiséget eltávolítjuk, e következő egyenletre fogunk jutni:

$$m^4+4m^3-7m^2-22m+24=0,$$

A tényezőre nézve pedig áll:

$$A=-\frac{2m^2+m+1}{m^2+m+1}.$$

Továbbá könnyü meggyőződni, hogy az utolsó-előtti egyenlet gyökei:

$$m=1,\ m=2,\ m=-3 \text{ és } m=-4,$$

miknek folytán A-ra nézve is e következő négy értéket kapjuk:

$$A=-\frac{4}{3},\quad A=-\frac{11}{7}.\quad A=-\frac{16}{7}, \text{ és } A=-\frac{29}{13}.$$

Ezeknek következtében pedig x-re és y-ra nézve, e következő négy értéket kapjuk :

$$x=e^{t},\ x=e^{2t},\ x=e^{-3t},\ \text{és}\ x=e^{-4t},\ \text{továbbá :}$$

$$y=-\frac{4}{3}e^{t},\ y=-\frac{11}{7}e^{2t},\ y=-\frac{16}{7}e^{-3t},\ \text{és}\ y=-\frac{29}{13}e^{-4t},$$

mely kifejezéseket ha C, C', C'' és C''' állandókkal szorozzuk, ugyanannyi részletes egészleteket fogunk kapni, miknek összeadásából e következő általános egészleteket nyerjük :

$$x=Ce^{t}+C'e^{2t}+C''e^{-3t}+C'''e^{-4t},\ \text{és}$$

$$y=-\frac{4}{3}Ce^{t}-\frac{11}{7}C'e^{2t}-\frac{16}{7}C''e^{-3t}-\frac{29}{13}C'''e^{-4}.$$

(6-dik Példa.) Egészeljük még e következő két egyenletet :

$$\frac{d^2z}{dxdy}+a\frac{du}{dy}=b,\ \text{és}\ \frac{d^2u}{dxdy}+c\frac{d^2z}{dx^2}=0;$$

akkor, ha ezek elsejét x szerint külzeljük, és az így nyert eredményt a második a-val szorzott egyenletből kivonjuk, ered :

$$\frac{d^3z}{dx^2dy}-ac\frac{d^2z}{dx^2}=b,$$

mi által tehát, mint látjuk, u eltávolíttatott, s ezen harmad rendü részlet-külzeléki egyenlet nyeretett, melynek egészelése végett, azt még így is írhatjuk :

$$\frac{d^3z}{dx^2dy}=ac\frac{d^2z}{dx^2}+b,$$

hogy pedig ez első rendü egyenletre visszavezettessék, teendő :

$$\frac{dz}{dx}=v,\ \text{lesz :}\ \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dv}{dx},\ \text{és}\ \frac{d^3z}{dx^2dy}=\frac{d^2v}{dxdy},$$

miknek helyettesítése által, a fenebbi egyenlet e következőbe megy át :

$$\frac{d^2v}{dxdy}=ac.\frac{dv}{dx}+b,$$

mely már csak másod rendü külzeléki egyenlet. Itt továbbá teendő :

$$\frac{dv}{dx}=u,\ \text{lesz :}\ \frac{d^2v}{dxdy}=\frac{du}{dy},$$

mi által az előttünk álló egyenlet e következőbe megy át :

$$\frac{du}{dy}=acu+b\text{, avagy : } du=acudy+bdy\text{,}$$

mely egyenlet a 89)-dik szám (4-dik eset) alatti egyenletével összehasonlíttatván, láthatni, hogy

$$P=ac\text{, és } Q=b\text{, következőleg}$$

$$u=e^{acy}\int e^{-acy}bdy+e^{acy}.f(x)\text{, avagy :}$$

$$u=-\frac{b}{ac}+e^{acy}f(x)\text{,}$$

itt pedig u helyébe a fenebbi érték tétetvén, lesz :

$$dv=-\frac{bdx}{ac}+e^{acy}dxf(x)\text{, következőleg}$$

$$v=-\frac{bx}{ac}+e^{acy}\int dxf(x)+f(y)\text{,}$$

itt végre v helyébe a fen kitett értéket tévén, lesz :

$$dz=-\frac{bxdx}{ac}+e^{acy}dx\int dxf(x)+dxf(y)\text{, tehát :}$$

$$z=-\frac{bx^2}{2ac}+e^{acy}\int dx\int dxf(x)+xf(y)+F(y)\text{,}$$

mivel pedig $\int dx\int dxf(x)$ helyébe nyilván $\varphi(x)$-et lehet tenni, a keresett teljes egészlet lesz :

$$z=-\frac{bx^2}{2ac}+xf(y)+F(y)+e^{acy}.\varphi(x)\text{,}$$

minthogy benne három tetszésszerinti függvény fordúl elő.

EGÉSZLETI KÉPLETEK GYŰJTEMÉNYE.

Toldalék gyanánt, nagyon czélszerü lesz itt, azon egészleti képletek gyüjteményét előterjeszteni, melyek részint az előbbiekben már le voltak hozva és bebizonyítva, részint pedig az előrebocsátott elvek segítségével könnyen lehozhatók és bebizonyíthatók. Ezen gyüjteménynek azon előnye van, hogy bármiféle külzeléki kifejezésnek egészletét azonnal ki lehet írni és használni.

I. szám.

Alap egészletek.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x} = log x + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{log a} + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \text{ hol } e = 2{\cdot}7182818.$$

$$\int a^{mx} dx = \frac{a^{mx}}{m log a} + C.$$

$$\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + C.$$

$$\int dx.cos x = sin x + C.$$

$$\int dx sin x = -cos x + C.$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg x + C.$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -cot. x + C.$$

$$\int \frac{dx}{sin x} = log.tg \frac{1}{2} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{cos x} = log.tg \left(45^0 + \frac{1}{2} x\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc.sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc.tg x + C.$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} log \frac{1+x}{1-x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = log(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

II. szám.

$$\int\frac{x^m dx}{(a+bx)^n}$$

alaku egészletek.

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}log(a+bx)+C.$$

$$\int\frac{xdx}{a+bx}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}log(a+bx)+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{a+bx}=\frac{x^2}{2b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{a^2}{b^3}log(a+bx)+C.$$

$$\int\frac{x^3dx}{a+bx}=\frac{x^3}{3b}-\frac{ax^2}{2b^2}+\frac{a^2x}{b^3}-\frac{a^3}{b^4}log(a+bx)+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^2}=-\frac{1}{b(a+bx)}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^3}=-\frac{1}{2b(a+bx)^2}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^4}=-\frac{1}{3b(a+bx)^3}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^n}=-\frac{1}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+bx)^2}=\frac{a}{b^2(a+bx)}+\frac{1}{b^2}log(a+bx)+C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+bx)^3}=-\left(\frac{x}{b}++\frac{a}{2b^2}\right).\frac{1}{(a+bx)^2}+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{a+bx}\left(\frac{x^2}{b}-\frac{2a^2}{b^3}\right)-\frac{2a}{b^3}log(a+bx)+C.$$

$$\int\frac{x^3dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{a+bx}\left(\frac{x^3}{2b}-\frac{3ax^2}{2b^2}+\frac{3a^3}{b^4}\right)+\frac{3a^2}{b^4}log(a+bx)+C.$$

III. szám.

$$\int\frac{dx}{x^m(a+bx)^n}$$

alaku egészletek.

$$\int\frac{dx}{x(a+bx)}=\frac{1}{a}log\frac{x}{a+bx}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^2(a+bx)}=-\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}log\frac{a+bx}{x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^3(a+bx)}=-\frac{1}{2ax^2}+\frac{b}{a^2x}-\frac{b^2}{a^3}log\frac{a+bx}{x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x(a+bx)^2}=\frac{1}{a(a+bx)}-\frac{1}{a^2}log\frac{a+bx}{x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^2(a+bx)^2}=\frac{1}{a+bx}\left(-\frac{1}{ax}-\frac{2b}{a^2}\right)+\frac{2b}{a^3}log\frac{a+bx}{x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x(a+bx)^3}=\frac{1}{(a+bx)^2}\left(\frac{3}{2a}+\frac{bx}{a^2}\right)-\frac{1}{a^3}log\frac{a+bx}{x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^2(a+bx)^3}=\frac{1}{(a+bx)^2}\left(-\frac{1}{ax}-\frac{9b}{2a^2}-\frac{3b^2x}{a^3}\right)+$$
$$\frac{3b}{a^4}log\frac{a+bx}{x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x(a+bx)^4}=\frac{1}{(a+bx)^3}\left(\frac{11}{6a}+\frac{5bx}{2a^2}+\frac{b^2x^2}{a^3}\right)$$
$$-\frac{1}{a^4}log\frac{a+bx}{x}+C.$$

IV. szám.

$$\int\frac{x^m dx}{a+bx^2}$$

alaku egészletek.

$$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}arc.tg\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+C.$$

$$\int\frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}log(a+bx^2)+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}+C.$$

$$\int\frac{x^3dx}{a+bx^2}=\frac{x^2}{2b}-\frac{a}{2b^2}log(a+bx^2)+C.$$

$$\int\frac{x^4dx}{a+bx^2}=\frac{x^3}{3b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}\int\frac{dx}{a+bx^2}+C.$$

V. szám.

$$\int \frac{dx}{x^m(a+bx^2)}$$

alaku egészletek.

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{a} log \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{1}{a} log \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx^2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2} log \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^4(a+bx^2)} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{dx}{a+bx^2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^5(a+bx^2)} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{2a^2x^2} - \frac{b^2}{a^3} log \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^n)} = -\frac{1}{na} log \frac{a+bx^n}{x^n} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^n)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{n-2}dx}{a+bx^n} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^n)} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{n-3}dx}{a+bx^n} + C.$$

VI. szám.

$$\int \frac{x^m dx}{(a+bx+cx^2)^n}$$

alaku háromszaku egészletek.

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} arc.tg \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C.$$

$4ac > b^2$ esetére.

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot log \frac{\sqrt{b^2-4ac}-2cx-b^2}{\sqrt{b^2-4ac}+2cx+b^2} + C.$$

$4ac < b^2$ esetre.

$$\int \frac{xdx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c} log(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} + C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{a+bx+cx^2}=\frac{x}{c}-\frac{b}{2c^2}log(a+bx+cx^2)+$$

$$\left(\frac{b^2}{2c^2}-\frac{a}{c}\right)\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2}=\frac{2cx+b}{(4ac-b^2)(a+bx+cx^2)}+$$

$$\frac{2c}{4ac-b^2}\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^n}=\frac{2cx+b}{(4ac-b^2)(n-1)(a+bx+cx^2)^{n-1}}+$$

$$\frac{(2n-3)2c}{(4ac-b^2)(n-1)}\int\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n-1}}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+bx+cx^2)^n}=-\frac{bx+2a}{(4ac-b^2)(n-1)(a+bx+cx^2)^{n-1}}$$

$$-\frac{(2n-3)b}{(4ac-b^2)(n-1)}\int\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n-1}}+C.$$

VII. szám.

$$\int\frac{x^m dx}{x^n\pm a^n}$$

alaku egészletek.

$$\int\frac{dx}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a^2}\left[log\frac{x-a}{\sqrt{x^2+ax+a^2}}-\sqrt{3}.arc.tg\frac{2x+a}{a\sqrt{3}}\right]+C.$$

$$\int\frac{xdx}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a}\left[log\frac{x-a}{\sqrt{x^2+ax+a^2}}+\sqrt{3}.arctg.\frac{2x+a}{a\sqrt{3}}\right]+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{x^3-a^3}=\frac{1}{3}log(x^3-a^3)+C.$$

$$\int\frac{x^3dx}{x^3-a^3}=x+a^3\int\frac{dx}{x^3-a^3}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^4-a^4}=\frac{1}{2a^3}\left[log\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}-arctg\frac{x}{a}\right]+C.$$

$$\int\frac{xdx}{x^4-a^4}=\frac{1}{4a^2}.\ log\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{x^4-a^4}=\frac{1}{2a}\left[log\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}-arctg\frac{x}{a}\right]+C.$$

$$\int\frac{x^3dx}{x^4-a^4}=\frac{1}{4}log(x^4-a^4)+C.$$

$$\int\frac{x^4dx}{x^4-a^4}=x+a^4\int\frac{dx}{x^4-a^4}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^3+a^3}=\frac{1}{3a^2}\Big[log\frac{x+a}{\sqrt{x^2-ax+a^2}}+$$

$$\sqrt{3}.arctg\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}\Big]+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\Big[log\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}+$$

$$2.arc.tg\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\Big]+C.$$

$$\int\frac{xdx}{x^4+a^4}=\frac{1}{2a^2}arctg\frac{x^2}{a^2}+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{x^4+a^4}=-\frac{1}{4a\sqrt{2}}\Big[log\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}+$$

$$2.arctg\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\Big]+C.$$

$$\int\frac{x^3dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{4}log(x^4+a^4)+C.$$

VIII. szám.

$$\int\frac{dx}{(a+x)(b+x)(c+x)}$$

alaku egészletek.

$$\int\frac{dx}{(a+x)(b+x)}=\frac{1}{b-a}log\frac{a+x}{b+x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+x)^2(b+x)}=\frac{1}{(a-b)(a+x)}+\frac{1}{(a-b)^2}log\frac{b+x}{a+x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2}=-\frac{1}{(a-b)^2}\Big[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\Big]$$

$$-\frac{2}{(a-b)^3}log\frac{b+x}{a+x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+x)(b+x)(c+x)}=\frac{1}{(a-b)(c-b)}log(b+x)+$$
$$\frac{1}{(b-a)(c-a)}log(a+x)+\frac{1}{(b-c)(a-c)}log(c+x)+C.$$

(d) $$\int\frac{xdx}{(a+x)(b+x)}=\frac{1}{a-b}\Big[alog(a+x)-blog(b+x)\Big]+C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+x)^2(b+x)}=-\frac{a}{(a-b)(a+x)}-\frac{b}{(a-b)^2}log\frac{b+x}{a+x}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+x)^2(b+x)^2}=\frac{1}{(a-b)^2}\Big[\frac{b}{b+x}+\frac{a}{a+x}\Big]+$$
$$\frac{a+b}{(a-b)^3}log\frac{b+x}{a+x}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+x)(b+x)(c+x)}=-\frac{b}{(a-b)(c-a)}log(b+x)$$
$$-\frac{c}{(b-c)(a-c)}log(c+x)-\frac{a}{(b-a)(c-a)}log(a+x).$$

$$\int\frac{dx}{(a+x^2)(b+x^2)}=\frac{1}{b-a}\Big[\int\frac{dx}{a+x^2}-\int\frac{dx}{b+x^2}\Big]+C.$$

$$\int\frac{(x^2+1)dx}{x(x-1)(x+1)}=log\frac{(x-1)(x+1)}{x}+C.$$

$$\int\frac{(3x^2-7x+6)dx}{(x-1)^3}=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+3log(x-1)+C.$$

$$\int\frac{x^3dx}{(x+1)^4}=\frac{1}{3(x+1)^3}-\frac{3}{2(x+1)^2}+\frac{3}{x+1}+log(x+1)+C.$$

$$\int\frac{(7x^2-25x+62)dx}{(x-3)(x^2-4x+13)}=5log(x-3)+log(x^2-4x+13)$$
$$+\frac{5}{3}arctg\frac{2x-4}{6}+C.$$

IX. szám.

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx}}$$

alaku okszerütlen egészletek.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2\sqrt{a+bx}}{b^2}\left(\frac{1}{3}(a+bx)-a\right)+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2\sqrt{a+bx}}{b^3}\left[\frac{1}{5}(a+bx)^2-\frac{2}{3}a(a+bx)+a^2\right]+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{b\sqrt{a+bx}}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}=(2a+bx)\frac{2}{b^2\sqrt{a+bx}}+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{b^3\sqrt{a+bx}}\left[\frac{1}{3}(a+bx)^2-2a(a+bx)-a^2\right]+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{2}{3b(a+bx)^{\frac{3}{2}}}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2}{b^2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{3}a-(a+bx)\right]+C.$$

X. szám.

$$\int\frac{dx}{x^{\mathrm{m}}\sqrt{a+bx}}$$

alaku egészletek.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx}}=\sqrt{a+bx}\left[\frac{3b}{4a^2x}-\frac{1}{2ax^2}\right]$$
$$+\frac{3b^2}{8a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}+C.$$

$$\int\frac{dx\sqrt{a+bx}}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}+C.$$

$$\int\frac{dx\sqrt{a+bx}}{x^2}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{x}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}+C.$$

$$\int\frac{dx\sqrt{a+bx}}{x^3}=-\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{2ax^2}+\frac{b\sqrt{a+bx}}{4ax}$$
$$-\frac{b^2}{8a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}+C.$$

XI. szám.

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+cx^2}}$$

alaku egészletek.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} log(x\sqrt{c} + \sqrt{a+cx^2}) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} arc.sin \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + C.$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+cx^2}}{c}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \frac{x\sqrt{a+cx^2}}{2c} - \frac{a}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{a+cx^2}} + C.$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \sqrt{a+cx^2}\left(\frac{x^2}{3c} - \frac{2a}{3c^2}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} log \frac{\sqrt{a+cx^2} - \sqrt{a}}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+cx^2}}{ax} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+cx^2}}{2ax^2} - \frac{c}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+cx^2}} + C.$$

XII. szám.

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{bx+cx^2}}$$

alaku egészletek.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} log\,[2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{bx+cx^2}] + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx-cx^2}} = \frac{2}{\sqrt{c}} arc.cos \frac{b-2cx}{b} + C.$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{bx+cx^2}}{c} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}} + C.$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{bx+cx^2}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{bx+cx^2} + \frac{3b^2}{8c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}} + C.$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{bx+cx^2}}=-\frac{2}{b}\frac{\sqrt{b+cx}}{\sqrt{x}}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{bx+cx^2}}=-\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{5bx^2}-\frac{4c}{3b^2}\frac{\sqrt{b+cx}}{\sqrt{x}}+C.$$

XIII. szám.

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

alaku egészletek.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}log(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}arc.tg\frac{2cx-b}{2\sqrt{c}\sqrt{a+bx-cx^2}}+C.$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+C.$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{a+bx+cx^2}+$$

$$\left(\frac{3b^2}{8c^2}-\frac{a}{2c}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}log\frac{2\sqrt{a}\sqrt{a+bx+cx^2}-2a-bx}{x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}arc.sin\frac{bx-2a}{x\sqrt{4ac-b^2}}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{ax}$$

$$-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}+C.$$

XIV. szám.

Kétszaku lenyomási képletek.

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m+1)b}$$

$$-\frac{(m-n+1)a}{(np+m+1)b}\int x^{m-n}dx(a+bx^n)^p+C.$$

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{npa}{np+m+1}\int x^m dx(a+bx^n)^{p-1} + C.$$

$$\int \frac{dx(a+bx^n)^p}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)\,a\,x^{m-1}} + \frac{(np-m+n+1)b}{(m-1)a}\int \frac{dx(a+bx^n)^p}{x^{m-n}} + C.$$

$$\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^{m+1}}{na(p-1)(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{m+n-np+1}{na(p-1)}\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{p-1}} + C.$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m} + \frac{a(2m-1)}{m}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a(2m-1)x^m} + \frac{m-1}{a(2m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}} + C.$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{bx+cx^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{bx+cx^2}}{mc} - \frac{(2m-1)b}{2mc}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{bx+cx^2}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{bx+cx^2}} = -\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{(2m-1)bx^m} - \frac{2c(m-1)}{(2m-1)b}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{bx+bx^2}} + C.$$

XV. szám.

Háromszaku lenyomási képletek.

$$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^r} = \frac{2cx+b}{(4ac-b^2)(r-1)(a+bx+cx^2)^{r-1}} + \frac{(2r-3)\,2c}{(4ac-b^2)(r-1)}\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{r-1}} + C.$$

$$\int\frac{xdx}{(a+bx+cx^2)^r}=-\frac{2a+bx}{(4ac-b^2)(r-1)(a+bx+cx^2)^{r-1}}$$
$$-\frac{(2r-3)b}{(4ac-b^2)(r-1)}\int\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{r-1}}+C.$$

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}}{mc}$$
$$-\frac{(2m-1)b}{2mc}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$-\frac{(m-1)a}{mc}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{a(m-1)x^{m-1}}$$
$$-\frac{(2m-3)b}{(m-1)2a}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$-\frac{(m-2)c}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+bx+cx^2}}+C,$$

$$\int x^m dx\sqrt{X}=\frac{x^{m-1}X^{\frac{3}{2}}}{(m+2)c}-\frac{(2m+1)b}{(m+2)2c}\int x^{m-1}dx\sqrt{X}$$
$$-\frac{a(m-1)}{c(m+2)}\int x^{m-2}dx\sqrt{X}+C,$$

hol $X=a+bx+cx^2$

$$\int dx(a+bx+cx^2)^p=\frac{(2cx+b)(a+bx+cx^2)^p}{2c(2p+1)}+$$
$$\frac{p(4ac-b^2)}{2c(2p+1)}\int dx(a+bx+cx^2)^{p-1}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^m\sqrt{X}}=-\frac{b\sqrt{X}}{A(m-1)(a+bx)^{m-1}}$$
$$-\frac{(2m-3)B}{2(m-1)A}\int\frac{dx}{(a+bx)^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$-\frac{(m-2)\gamma'}{(m-1)A}\int\frac{dx}{(a+bx)^{m-2}\sqrt{X}}+C,$$

hol $X=\alpha'+\beta'x+\gamma'x^2$, továbbá : $A=\alpha'b^2-\beta'ab+\gamma'a^2$, és $B=\beta'b-2\gamma'a$, végre : $\gamma b^2=\gamma'$.

$$\int\frac{dx\sqrt{a+bx+cx^2}}{x^m}=-\frac{\sqrt{X}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{b}{2(m-1)}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{X}}+$$
$$\frac{c}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{X}}+C,$$
hol $X=a+bx+cx^2$.

XVI. szám.

Logarithmusi és kitevőleges egészletek.

$$\int dx(log x)^n=x(log x)^n-n\int dx(log x)^{n-1}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(log x)^n}=\frac{-x}{(n-1)(log x)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{(log x)^{n-1}}+C.$$

$$\int x^m dx(log x)^n=\frac{x^{m+1}(log x)^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^m dx(log x)^{n-1}+C.$$

$$\int\frac{x^m dx}{(log x)^n}=-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(log x)^{n-1}}+\frac{m+1}{n-1}\int\frac{x^m dx}{(log x)^{n-1}}+C.$$

$$\int\frac{dx}{x}(log x)^n=\frac{(log x)^{n+1}}{n+1}+C.$$

$$\int a^x x^n dx=\frac{a^x x^n}{log a}-\frac{n}{log a}\int a^x x^{n-1}dx+C.$$

$$\int\frac{a^x.dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{log a}{n-1}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}}+C.$$

$$\int\frac{a^x dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{log a}+\frac{1}{2x(log a)^2}+\frac{3}{2^2x^2(log a)^3}\right]+$$
$$\frac{3.5}{2^3(log a)^3}\int\frac{a^x dx}{x^3\sqrt{x}}+C.$$

$$\int e^{mx}dx\sin nx=\frac{e^{mx}}{m^2+n^2}[m\sin nx-n\cos nx]+C.$$

$$\int e^{mx}dx\cos nx=\frac{e^{mx}}{m^2+n^2}[m\cos nx+n\sin nx]+C.$$

$$\int e^{mx}dx\sin^2x=\frac{2e^{mx}}{m(m^2+4)}+\frac{e^{mx}\sin x(m\sin x-2\cos x)}{m^2+4}+C.$$

$$\int e^{mx}dx\cos^2x=\frac{2e^{mx}}{m(m^2+4)}+\frac{e^{mx}.\cos x(m\cos x+2\sin x)}{m^2+4}+C.$$

$$\int e^{mx}dx\sin^n x=\frac{e^{mx}\sin^{n-1}x(m\sin x-n\cos x)}{m^2+n^2}+$$
$$\frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{mx}dx\sin^{n-2}x+C.$$

$$\int e^{mx}dx\cos^n x=\frac{e^{mx}\cos^{n-1}x(m\cos x+n\sin x)}{m^2+n^2}+$$
$$\frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{mx}dx\cos^{n-2}x+C.$$

XVII.

Háromszögtani függvények egészletei.

$$\int dx\sin^n x\cos^m x=-\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n}+$$
$$\frac{n-1}{m+n}\int dx\sin^{n-2}x\cos^m x+C.$$

$$\int dx\sin^n x\cos^m x=\frac{\sin^{n+1}x\cos^{m-1}x}{m+n}+$$
$$\frac{m-1}{m+n}\int dx\ \sin^n x\cos^{m-2}x+C.$$

$$\int dx\sin^n x=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int dx\sin^{n-2}x+C.$$

$$\int dx\cos^n x=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int dx\cos^{n-2}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}+C.$$

$$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}+C.$$

$$\int\frac{dx\cos^n x}{\sin^m x}=-\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x}+\frac{m-n-2}{m-1}\int\frac{dx\cos^n x}{\sin^{m-2}x}+C.$$

$$\int\frac{dx\sin^m x}{\cos^n x}=\frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-m-2}{n-1}\int\frac{dx\sin^m x}{\cos^{n-2}x}+C.$$

$$\int dx\,tg^n x=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-\int dx\,tg^{n-2}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{tg^n x}=-\frac{1}{(n-1)tg^{n-1}x}-\int\frac{dx}{tg^{n-2}x}+C.$$

$$\int dx \sin nx \cos mx = -\frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} - \frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} + C.$$

$$\int dx \cos nx \cos mx = \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} + C.$$

$$\int dx \sin nx \sin mx = \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log tg x + C.$$

$$\int \frac{dx \sin x}{\cos x} = -\log \cos x + C.$$

$$\int \frac{dx \cos x}{\sin x} = \log \sin x + C.$$

$$\int x^r dx \sin nx = \frac{x^{r-1}}{n^2}(r \sin nx - nx \cos nx)$$

$$-\frac{r(r-1)}{n^2}\int x^{r-2} dx \sin nx + C.$$

$$\int x^r dx \cos nx = \frac{x^{r-1}}{n^2}(r \cos nx + nx \sin nx)$$

$$-\frac{r(r-1)}{n^2}\int x^{r-2} dx \cos nx + C,$$

$$\int x^m dx \, arc.\sin x = \frac{x^{m+1}}{m+1} arc\sin x - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

$$\int x^m dx \, arc.tg x = \frac{x^{m+1}}{m+1} arctg x - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1} dx}{1+x^2} + C.$$

$$\int dx (arc\sin x)^n = (arc\sin x)^{n-1} . [x \, arc\sin x + n\sqrt{1-x^2}]$$

$$-n(n-1)\int dx (arc\sin x)^{n-2} + C.$$

$$\int dx (arc\cos x)^n = (arc\cos x)^{n-1} . (x \, arc\cos x - n\sqrt{1-x^2})$$

$$-n(n-1)\int dx (arc\cos x)^{n-2} + C.$$

$$\int \frac{dx . arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}(arc\sin x)^2 + C.$$

$$\int\frac{dx\,arctgx}{1+x^2}=\frac{1}{2}(arctgx)^2+C.$$

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2cos^2x}=\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}arc.tg\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}tgx+C.$$

$$\int\frac{dx}{a+bcosx}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}arc.tg\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}tg.\frac{1}{2}x+C.$$

$$\int\frac{dx\,sinx}{a+bcosx}=\frac{1}{b}log\frac{a+b}{a+bcosx}+C.$$

$$\int\frac{dx\,cosx}{a+bcosx}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bcosx}+C.$$

XVIII. szám.

Határozott egészletek

$$\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$$

$$\int_0^\pi x\,dx\,sin\,nx=-\frac{cos\,n\pi}{n}$$

$$\int_0^\pi x\,dx\,cos\,nx=\frac{cos\,n\pi-1}{n^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,sin^2x=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,cos^2x=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,sin^nx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,sin^{n-2}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,cos^nx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,cos^{n-2}x.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,sin^6x=\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,cos^6x=\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-mx}sin\,nx=\frac{n}{m^2+n^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-mx} cosnx = \frac{m}{m^2+n^2}$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\int_{-a}^{+a} dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha+\beta cosx} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx.arc.tgx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx(arctgx)^m}{1+x^2} = \frac{1}{m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

$$\int_a^x x^m dx = \frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

$$\int_0^\infty e^{-nx}.x^{a-1} dx = \frac{1.2.3.4.5\ldots\ldots(a-1)}{n^a}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}-1}{logx}\cdot dx = logm$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{logx} dx = logn.$$

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{logx} = log\,\frac{m}{n}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}-e^{-mx}}{x} = arc.tg\,\frac{(m-k)n}{n^2+mk}$$

$$\int_0^\infty \frac{dxsinnx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-mx}dx\cos nx = -\frac{1}{2}\log(n^2+m^2)$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}dx\cos nx = -\frac{1}{2}\log(n^2+k^2)$$

$$\int_0^\infty dx.\frac{e^{-kx}-e^{-mx}}{x}\cos nx = \frac{1}{2}\log\frac{n^2+m^2}{n^2+k^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx\cos nx}{x} = \infty.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty dx.\cos rx.e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx\cos ax}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}.e^{-ma}$$

$$\int_0^\infty \frac{xdx.\sin ax}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-ma}$$

$$\int_0^\infty dx\frac{\sin ax}{x(m^2+x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}(1-e^{-ma})$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}.dx\cos 2rx = \sqrt{\pi}.e^{-r^2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots\ldots\ldots 5.3.1}{2m(2m-2)(2m-4)\ldots\ldots\ldots 4.2}.\pi$$

ÖTÖDIK FEJEZET.

A VÁLTOZTATÁSI HÁNYLAT ALAPELVEI.

1.) Ezen nevezetes módszer az 1696-dik évben vette eredetét, mely időszakban Bernoulli János híres tudós élt, ki azon nagy fontosságu feladatot terjesztette a tudományos világ elébe, mely a leggyorsabb esésü görbének meghatározásában állt, (brachistochrone), s melynek megoldásával az akkori mathematicusok szorgalmasan foglalkoztak. Addig csak az adott, tehát ismert alaku függvények maximumai és minimumairól volt szó; a fen említett feladat természeténél fogva azonban, a függvény nem adatott, hanem a kérdéses függvény alakja kerestetett azon esetre, hogy az a minimumnak fen érintett tulajdonságával bírjon. Egy ilyféle feladatnak a megfejtése pedig, az akkori Analysis elvei segítségével lehető nem volt, s ezen körülmény alkalmat nyújtott, a fen említett új és különös természetü hánylat felfedezésére.

A híres Euler-nek, ki szintén azon időszakban élt, köszönhetjük ezen és hasonló feladatok rendszeres és általános megfejtését, ő azonban ezen megfejtést többnyire mértani elvekre alapította, s meg kell vallanunk, hogy ezen nevezetes tárgynak tisztán analytikai megfejtése de Lagrange franczia tudósnak tulajdonítandó; s így ezekből nyilván következik, hogy a nevezetes változtatási hánylat, Euler és de Lagrange egyesült müködései által jött létre, mely hánylatnak fő czélja abban áll, hogy bizonyos meghatározott egészletek maximumai és minimumai fedeztessenek fel.

Ezen így felfedezett és megállapított hánylat, egy teljes módszernek volt tekinthető mind addig, míg valamely feladatnak a megfejtése csak egyszerü egészletet vett igénybe; mihelyt azonban a kérdéses feladat megfejtése kettős vagy többszörös egészletet hozott létre, már ezen hánylat alkalmazása csak nagy nehézségekkel járt, és a híres tudós Gauss volt az első, a ki ezen nehézségeket legyőzte az által, hogy ő egy kettős egészletnek a maximumát határozta meg. Később Poisson franczia tudós a kettős egészletekre vonatkozó maximumok és minimumok elméletét tökéletesítette.

2.) Ezen nevezetes hánylat kellő megértésére, jó lesz először egy, két változóval bíró függvénynek valamely rendü külzelékét tekintetbe venni. Fölvevén tehát, hogy $U = F(x,y)$ a kérdéses függvény, melyből e következő külzeléki függvény hozatott le:

$$V = f(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y \ldots\ldots),$$

akkor ez, mint tudjuk, az által történik, hogy $(x+dx)$-et x helyébe, és $(y+dy)$-t y helyébe írjuk; a változók ezen változtatása által, a függvény értéke szintén változik, a benne előforduló állandók azonban, valamint a függvény eredeti alakja is, nyilván semmi változást nem szenvednek; értvén a függvény alakja alatt azon összeköttetési módot, melylyel a változók egymás közt és az említett állandókkal egy mathematikai kifejezésre összekapcsolvák.

A függvény ezen változtatása azonban általánosabb értelmü is lehet, midőn t. i. azt felteszszük, hogy a változók változtatása nem csak a függvény értékét, hanem alakját is változtatja. Ha például $U = F(x, y)$ függvény valamely felületet terjeszt elő, akkor $(x+dx)$-et x helyébe, és $(y+dy)$-t y helyébe írván, a függvény értéke is változást szenved, minthogy a változók ezen új értékei, a felület más pontjára vonatkoznak, maga a felület azonban, alakjára és természetére nézve, semmi változást nem szenvedvén, mindig ugyanaz marad. Lehet azonban a változók változtatását oly nevezetes jelentéssel felruházni, hogy az azok által jelentett pont, nem többé az eredeti, hanem más, ahoz igen közel fekvő felületen keresendő, s így a változók ezen változtatása által, az állandók, tehát a felület alakjának változtatása is hozatik létre.

3.) Azon feladatokra nézve, melyeknek megfejtése a változtatási hánylattól függ, feltétetik ugyan, hogy a változók bizonyos egymásközti viszonyban vannak, de ezen viszony határozatlan, és ezen viszonyt meghatározni olyképen, hogy az innen eredő érték, a lehető legnagyobb, vagy legkisebb legyen, ezen hánylat feladata. Ennek felvilágosítására szolgáland e következő ide tartozó eset.

Képzeltessék egy, két pont között fekvő görbe vonal, az egyik végpontjának összrendezői legyenek a és b, a másik végpontjának pedig a' és b'; akkor ezen ív, azután a metszéki tengely $(a'-a)$ része, és a b és b' rendezők között fekvő felület nyilván $\int_a^{a'} ydx$ egészlet által fog adatni, ha t. i. $y=f(x)$ a görbe vonal egyenlete. Ha most ugyanazon két pont között több, de ugyanazon hosszuságu görbe vonalt képzelünk: akkor $y=f(x)$ egyenlet minden egyes görbe vonalra nézve más alaku lesz, s így a fen említett és $\int_a^{a'} ydx$ kifejezés által adott felület is más- más leend; itt tehát e következő nevezetes kérdésnek lesz helye: határoztassék meg azon görbe vonalnak avagy $f(x)$-nek az alakja, melynél fogva a bezárt felület $=\int_a^{a'} ydx$ a lehető legnagyobb vagy legkisebb legyen; s így az eddig mondottakból már látjuk, hogy a változtatási hánylat fő czélja azon görbe vonalok felfedezésében áll, melyek a maximum vagy minimumnak valamely tulajdonságával bírnak.

4.) A változtatási hánylat lényegének felvilágosítására szolgál még e következő értelmezés: Legyen V az x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... mennyiségek valamely függvénye, úgy hogy álljon:

$$V=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\right),$$

mely kifejezésben azonban y mennyiség x függvényének tekintendő, ez pedig úgy legyen meghatározandó, hogy

a) $\int_{x_1}^{x_2} Vdx$ határozott egészlet maximumát vagy minimumát érje el. Fölvevén itt, hogy $y=f(x)$ a keresett x és y közötti viszony, akkor ha V-nek fenebbi kifejezésében y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... helyébe rend szerint : $f(x)$, $\frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$...... tétetik, és az a) alatt kijelentett egészelés vitetik véghez, a nyerendő eredmény nyilván nem lesz egyéb, mint x_1 és x_2-nek valamely függvénye, azaz áll :

$$\int_{x_1}^{x_2} Vdx = \varphi(x_1, x_2).$$

Föltévén továbbá, hogy $f'(x)$ a $f(x)$-től csak végtelen keveset különböző függvény, akkor $f'(x)$, $\frac{df'(x)}{dx}$, $\frac{d^2f'(x)}{dx^2}$.... iratván y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... helyébe V-nek kifejezésében, és az a) alatt kijelentett egészelést véghezvivén, nyilván $\varphi'(x_1\, x_2)$ alaku függvény fog nyeretni, melyről világosan mondhatni, hogy az $\varphi(x_1\, x_2)$ függvénytől csak végtelen keveset fog különbözni, és az ezen két függvény közötti különbség, azaz $\varphi'(x_1\, x_2) - \varphi(x_1\, x_2)$, mely nyilván szintén végtelen kicsiny, $\varphi(x_1\, x_2)$ függvény változtatásának neveztetik, és δ betü által szokott kijelentetni, úgy hogy álljon :

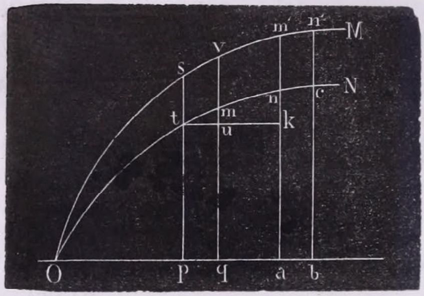
$$\varphi'(x_1\, x_2) - \varphi(x_1\, x_2) = \delta.\varphi(x_1\, x_2).$$

Látván tehát így, hogy változtatás alatt, valamely függvény végtelenig fogyó változtatása avagy δ betü szerinti külzeléke értendő, következik: hogy ha $y=f(x)$ az adott, $f'(x)$ pedig egy tőle csak végtelen keveset különböző függvény, az ezen két függvény közötti különbség $\delta y = f'(x) - f(x)$ által helyesen terjesztetik elő. Hasonló módon pedig általánosan véve áll : $\delta u = f'(x, y, z....) - f(x, y, z....)$, ha t. i. $f(x, y, z.....) = u$.

5.) Még világosabban felfogható a változtatások értelme, e következő mértani nézet megtekintéséből :

Legyen $y=f(x)$ az ON görbe vonal egyenlete (10-dik idom), melynek t pontjára nézve álljon : $Op = x$, $pt = y$, azaz : x és y, t pontnak összrendezői legyenek; akkor ha t pontból, ugyanazon görbe vonalban, de végtelen közel fekvő n pont-

(10-dik idom.)



hoz akarnánk átmenni, ez nyilván csak külzelés által történhető, midőn t. i. $Op = x$ metszéket végtelen kicsiny $pa = tk = dx$ mennyiséggel növesztjük, mi által a $pt = ak = y$ rendező, szintén végtelen kicsiny $kn = dy$ növetet nyerend, s az által az n pont el lesz érve.

Fölvevén most, hogy OM más, de ON-hez végtelen közel fekvő görbe vonal, és hogy az utóbbi görbe vonalnak t pontjából, a másik görbe vonal v pontjához akarunk átmenni: akkor ezen átmenet csak az összrendezők változtatása által eszközölhető, midőn látjuk, hogy az x metszék, $qp = \delta x$ változtatásának, a rendezőnek megfelelő $qv - pt = uv = \delta y$ változtatása felel meg, hogy tehát v pont csak az által érhető el, ha a t pont x metszékének δx változtatást tulajdonítunk. Mivel továbbá többnyire csak azon befolyást akarjuk tudni, melyet az $y = f(x)$ függvénynek változtatása az $\int Vdx$ egészletre gyakorol: elégséges lesz, függetlenül x-től, csak az y-t változtatásnak alávetni, mely esetben tehát $\delta x = 0$ lesz, és az átmenet t pontból, ugyanazon függőlegesben fekvő s ponthoz ki lesz eszközölve, hol tehát $ts = \delta y$ a rendező változtatását jelentendi.

Valamint tehát a végtelen kicsiny dy növet, mely azon esetre támad, midőn valamely görbe vonalnak t pontjából átmegyünk, ugyanazon görbe vonalban végtelen közel fekvő n ponthoz, y rendező külzelékének neveztetik; úgy azon végtelen kicsiny δy változtatás, mely y-ban támad, midőn az egyik görbe vonal t pontjából átmegyünk egy másik, de ahhoz végtelen közel fekvő OM görbe vonalnak s pontjához, y rendező változtatásának szokott neveztetni.

6.) Miután tehát az eddig mondottakból világosan láthatni, hogy δy változtatás nem egyéb, mint y-nak más jelentésü külzeléke: következik, hogy a változtatási hánylat, a külzeléki hánylattól különböző szabályokat, illetőleg elveket nem vesz igénybe, hanem a külzeléki hánylat alapelvei csak új és különös alkalmazást találnak a változtatási hánylatban. A külzeléki hánylat alapelvei tehát, a változtatási hánylatban is alkalmazhatók, csak hogy a külzelék d jele mindenütt felcserélendő a változtatási δ jellel. Így például, ha e következő függvény adatnék:

$$y=5z^4+na^x,$$

melynek valtoztatása előállítandó, akkor az ismert külzeléki avagy változtatási szabályok szerint, kell hogy álljon:

$$\delta y=20z^3\delta z+na^x.\delta x loga,$$

s ez az adott függvény változtatásának mondatik; melyben azonban a δzés δx változtatásokat, ha végtelen kicsinyek is, a dz és dx külzelékekkel nem szabad felcserélni, minthogy az előbbiek szerint, a változtatások egészen más jelentéssel bírnak.

7.) Az adott függvényben előforduló változók végtelen kicsiny változtatása, mely által a függvény alakja megváltozik, ezen változók változtatásának neveztetik, és megkülönböztetés végett az által jelöltetik, hogy az említett változók elébe δ betü tétetik. Ha tehát $x, y, z, \ldots.$ a kérdéses változók, akkor δx, δy, $\delta z \ldots.$ által jelölendők azoknak változtatásai, a megváltoztatott változók tehát $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z \ldots\ldots\ldots$ által terjesztetnek elő. Ha tehát V, x, y és z változók valamely függvénye, azaz:

$$1)\quad V=f(x, y, z),$$

akkor nyilván látjuk, hogy ezen függvénynek a változtatását úgy fogjuk kapni, ha a megváltoztatott függvényből az eredetileg adott függvényt kivonjuk, mely változtatás δV-vel jelöltetvén, áll:

$$\delta V=\varphi(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)-f(x, y, z),$$

hol φ jel által, a megváltoztatott függvény új alakját jelöljük, mivel az említett változtatás által, az x, y és z változók egészen új viszonyba léptek egymáshoz.

8.) Valamely függvény változtatásának előállítására, okvetlen szükséges azon tételnek a bebizonyítása, hogy ha az adott függvényt külzeljük és változtatjuk, akkor a számítás eredményére nézve mindegy, akár külzeljük azt először, s azután változtatjuk; akár változtatjuk azt először, s azután külzeljük; azaz: $\delta.dV = d.\delta V$, hol tehát V az adott függvényt jelenti. Ennek bebizonyítására szolgál e következő okoskodás: Az adott V függvény t. i. mindig valamely görbe vonal rendezőjének tekinthető, mely külzelékei által halad, változtatásai által pedig a szomszéd vonalra megy át; midőn tehát az, külzelés által a legközelebb pontra megy át, értéke lesz: $V + dV = V'$, következőleg $dV = V' - V$, minek folytán dV-nek változtatása így lesz képviselendő:

$$\delta.dV = \delta V' - \delta V,$$

ámde $\delta V'$ nem egyéb, mint azon legközelebbi érték, melybe δV átmegy, midőn azt külzelékével növesztjük, úgy hogy áll:

$$\delta V' = \delta V + d.\delta V, \text{ tehát } \delta V' - \delta V = d.\delta V,$$

mit a fenebbi egyenlettel összehasonlítván, következik, hogy $\delta.dV = d\delta V$, azaz: a külzelék változtatása mindig egyenlő a változtatás külzelékével.

Ugyanazt be lehet e következő egyszerü és általános módon bizonyítni; vegyük fel t. i., hogy $(V + dV)$ kifejezés változtatandó; akkor az előbbiek szerint nyilván kell állnia:

$$\delta.(V + dV) = \delta V + \delta.dV, \quad \text{miből}$$

$$\delta.dV = \delta(V + dV) - \delta V.$$

Ha pedig δV-ben V változó átmegy $(V + dV)$-re, és ebből az eredeti δV érték kivonatik: akkor nyilván dV-t külzeljük, miből tehát következik, hogy az utolsó egyenlet jobb része nem egyéb, mint δV-nek külzeléke $= d.\delta V$, s így kell, hogy álljon:

$$\delta.dV = d.\delta V,$$

mi által állításunk igazvolta szinte be van bizonyítva.

Ugyanaz lehozható a (10-ik idom) figyelmes megtekintéséből is, melyben nyilván látjuk, hogy a bn' rendező nem csak na rendezőnek változtatása, hanem qv rendezőnek külzelése által is nyerhető, mert az első esetben áll:

$$bn' = an + \delta.an = y + dy + \delta(y + dy),$$

a második esetben pedig áll:

$$bn' = qv + d.qv = y + \delta y + d(y + \delta y),$$

mely két eredmény egyenlőségéből következik :

$$y+dy+\delta y+\delta.dy=y+\delta y+dy+d.\delta y, \quad \text{avagy :}$$

$$1.)\quad \delta.dy=d.\delta y,$$

mely elemzésből egyszersmind látjuk, mily rokonságban van a külzeléki hánylat a változtatási hánylattal.

Ezen tantételt lehet azonnal az adott függvény felsőbb külzelékeire is alkalmazni, mert a második $d^2V=d.dV$ külzelék változtatása nyilván $\delta d^2V=\delta.ddV=d\delta dV$ által képviselendő, de mivel $\delta dV=d\delta V$, áll szintén :

$$\delta d^2V=\delta ddV=d\delta dV=d^2\delta V;$$

Hasonlóképen a függvény harmadik külzelékére nézve áll :

$$\delta d^3V=d\delta d^2V=dd\delta dV=d^3\delta V,$$

s így a függvény negyedik külzelékére nézve áll :

$$\delta d^4V=d\delta d^3V=dd\delta d^2V=d^3\delta dV=d^4\delta V,$$

általánosan véve tehát kell, hogy álljon :

$$\delta d^nV=d^n\delta V.$$

8.) Hogy továbbá az egészletek változtatása is tekintetbe vétessék, legyen $V=\int U$, következőleg $dV=U$, és $\delta dV=\delta U$, az 1) alatti viszony következtében tehát $d\delta V=\delta U$; akkor ennek új egészelése által kapjuk : $\delta V=\int \delta U$, és V helyébe az eredeti érték vissza-helyeztetvén, lesz :

$$\delta\int U=\int\delta U,$$

mely kifejezésből látjuk,hogy mindegy : akár először egészeljük s azután változtatjuk, akár először változtatjuk, s azután egészeljük azt. Ebből továbbá szabad következtetnünk :

$$\delta\int\int U=\int\delta\int U=\int\int\delta U, \quad \text{avagy :}$$

$$\delta\int^2 U=\int^2\delta U,$$

s így általánosan :

$$\delta\int^n U=\int^n\delta U.$$

Ugyanazt e következő módon is meg lehet mutatni: Feltévén, hogy $\int U$ x és y-nak valamely függvénye, akkor változtatásának nyerése végett, $(x+\delta x)$-et és $(y+\delta y)$-t kell írni x és y helyébe, mely esetben U nyilván átmenend $(U+\delta U)$-ra, és az adott egészlet megváltoztatott értéke lesz :

$$\int(U+\delta U)=\int U+\int\delta U;$$

mivel pedig $\int U$-nak a változtatását úgy találjuk meg, ha a megváltozott egészletből annak eredeti értékét kivonjuk, áll szintén ;

$$\delta\int U=\int(U+\delta U)-\int U,$$

miből következik :

$$\delta\int U=\int\delta U,$$

azaz : az adott egészlet változtása mindig egyenlő a változtatás egészletével.

Ha tehát $\int Vdx$ egészletnek változtatása kerestetnék, az előbbiek szerint kell, hogy álljon :

$$\delta\int Vdx=\int\delta(Vdx),$$

mely utolsó egészletre a szorzat külzelési illetőleg változtatási szabályát alkalmazván, nyerni fogjuk :

$$\int\delta(Vdx)=\int[V\delta dx+dx\delta V],$$

s minthogy $\delta dx = d\delta x$, áll még :

$$1)\quad \delta\int Vdx=\int Vd\delta x+\int dx\delta V;$$

tévén itt $\delta x=w$, lesz $d\delta x=dw$, s így áll :

$$\int Vd\delta x=\int Vdw,$$

mely kifejezésre a részletes egészelést alkalmazván, nyerni fogjuk :

$$\int V dw = Vw - \int w dV,$$

minek helyettesítése által, az előbbi 1) alatti egyenlet e következőbe megy át:

$$2) \quad \delta \int V dx = V\delta x - \int dV . \delta x + \int dx \delta V,$$

mely kifejezésnek az első tagja, egészelést nem vesz igénybe.

9.) Ezek előrebocsátása után, már könnyü lesz azon kérdésre felelni, miként határozható meg U-nak változtatása, ha az x, y, dx, dy, d^2x, d^2y ...... mennyiségek valamely függvénye? E végre az előbbiek szerint, nem lesz egyéb szükséges, mint $(x+\delta x)$-et, $(y+\delta y)$-t, $(dx+\delta dx)$-et, $(dy+\delta dy)$-t ...... írni, x, y, dx, dy....... helyébe, és az így nyert kifejezésből az eredetileg adott függvényt kivonni; mely alkalommal, mint a külzeléki hánylatban, δx-nek, δy-nak, δdx-nek .... magasabb hatványai elhanyagolandók. Ezen eljárás által, mint könnyü belátni, nem kapunk egyebet, mint U-nak közönséges külzelékét x, y, dx, dy....... változókra vonatkozva, de nem d, hanem δ betüre vagy jegyre nézve. Ha tehát U-nak külzeléke e következő kifejezés által terjesztetik elő:

$$dU = Mdx + Nd^2x + Pd^3x + \ldots\ldots + M'dy + N'd^2y + P'd^3y + \ldots\ldots$$

akkor U-nak változtatása, egy hasonló kifejezés által fog adatni, melynek alakja e következő:

$$\delta U = M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + \ldots\ldots$$
$$+ M'\delta y + N'\delta dy + P'\delta d^2y + Q'\delta d^3y + \ldots\ldots$$

mely kifejezésből láthatni, hogy az dU-nak kifejezéséből az által nyerhető, ha az U-nak külzeléséből eredő első d jel, mindenütt, a változtatási δ jelre tétetik át.

10.) Azon feltét alatt, hogy y változó x-nek valamely függvénye, lehetséges mindig, az adott függvényt Vdx alakra hozni; tévén t. i.

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r, \quad \frac{dr}{dx} = s, \ldots\ldots \text{ lesz :}$$

$$dy = pdx, \quad dp = qdx, \quad dq = rdx, \quad dr = sdx \ldots\ldots,$$

ez által pedig V kifejezés x, y, p, q, r....... változók függvényévé fog válni, külzeléke tehát e következő kifejezés által fog adatni :

a) $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \ldots\ldots,$

de látjuk, hogy :

$$M = \frac{dV}{dx}, \quad N = \frac{dV}{dy}, \quad P = \frac{dV}{dp}, \quad Q = \frac{dV}{dq} \ldots\ldots,$$

ennél fogva áll még :

$$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dp}\right)dp + \left(\frac{dV}{dq}\right)dq + \ldots,$$

mely külzelékből a változtatásra átmenvén, találjuk :

b) $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots\ldots$ avagy :

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{dV}{dq}\right)\delta q + \ldots\ldots$$

E kifejezésben δp valamint δq is, vagy úgy kifejthető, hogy dx állandónak vétessék, vagy úgy, hogy dx is változónak tekintessék; minthogy az előbbiekből látjuk, hogy

$$\delta p = \delta \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \delta q = \delta \cdot \frac{dp}{dx}, \quad \delta r = \delta \cdot \frac{dq}{dx} \ldots\ldots,$$

ha tehát dx-et is változónak veszszük, az ismert szabály szerint áll :

$$\delta p = \delta \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx.\delta dy - dy.\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dy - p.\delta dx}{dx}, \text{ továbbá:}$$

$$\delta q = \delta \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{dx.\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dp - q.\delta dx}{dx}, \text{ és}$$

$$\delta r = \delta \frac{dq}{dx} = \frac{dx.\delta dq - dq.\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dq - r.\delta dx}{dx}, \text{ s í. t.,}$$

mely értékek a fenebbi b) alatti kifejezésben helyettesítendők azon esetre, ha dx is változónak vétetik. Mivel azonban $\delta dx = d.\delta x$, $\delta dp = d\delta p$, ezen kifejezések még így is írhatók :

$$\delta p = \frac{d\delta y - p.d\delta x}{dx}, \quad \delta q = \frac{d.\delta p - q.d\delta x}{dx}, \text{ s í. t.}$$

Ha pedig csak y-t akarjuk változtatni, δx tehát legyen elenyésző, akkor a fenebbi kifejezések egyszerüen így állnak :

$$\delta p = \frac{d.\delta y}{dx}, \quad \delta q = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2}, \quad \delta r = \frac{d\delta q}{dx} = \frac{ddd\delta y}{dx^3} \ldots\ldots$$

avagy : $\delta p = \dfrac{d\delta y}{dx}, \quad \delta q = \dfrac{d^2\delta y}{dx^2}, \quad \delta r = \dfrac{d^3\delta y}{dx^3} \ldots\ldots$

(1-ső Példa.) Tudva van előttünk, hogy az alérintő egyenlete:

$$s=\frac{ydx}{dy},\quad \text{s mivel } dy=pdx, \text{ áll } s=\frac{y}{p},$$

ha ennek változtatásáról volna szó, akkor az előbbi szabályok szerint állni kell:

$$\delta s=\frac{p\delta y-y\delta p}{p^2}=\frac{\delta y}{p}-\frac{y\delta p}{p^2},$$

itt pedig δp helyébe a fenebbi értéket tévén, lesz:

$$\delta s=\frac{\delta y}{p}-\frac{y}{p^2}\left(\frac{d\delta y}{dx}-\frac{p.d\delta x}{dx}\right)=\frac{\delta y}{p}-\frac{yd\delta y}{p^2dx}+\frac{y.d\delta y}{pdx},$$

és ha p helyébe is a kellő érték tétetik, lesz:

$$\delta s=\frac{dx}{dy}.\delta y-\frac{ydx}{dy^2}d\delta y+\frac{y}{dy}d.\delta x,$$

mely eredmény az adott kifejezés közvetlen külzeléséből ered.

(2-dik Példa.) Tudjuk továbbá, hogy a görbületi sugár általános kifejezése (ha dx állandónak vétetik) e következő:

$$R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y},$$

ha ennek változtatását is meg akarnók határozni, akkor itt is $dy=pdx$ és $dp=qdx$ tétetvén, áll:

$$R=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

minek változtatása, ha a hányados külzelési illetőleg változtatási szabályát alkalmazzuk, δ betüre vonatkozva, nyilván lesz:

$$\delta R=\frac{3p\delta p}{q}\sqrt{1+p^2}-\frac{\delta q}{q^2}(1+p^2)^{\frac{3}{2}},$$

mely kifejezésben p és q, valamint δp és δq helyébe a fen kitett értékek helyettesitendők.

(Jegyzet.) Az eddig előhozott kifejtésekben csak azon eset tárgyaltatott, melyben csak egy, x változótól függő y függvény fordúl elő, mi egyébiránt elégséges azon feladatok megfejtésére, melyek a sík és egyszerü görbületü görbe vonalakra vonatkoznak. Kissé másképen áll a dolog akkor, ha kettős görbületü görbe vonalakra vonatkozó feladatok lennének megfejtendők; minthogy ezek csak térben képzelhetők, nálok szükségképen két, x-től függő y és z függvény fordúl elő, s így V-nek kifejezésében x változón kivül még y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... és z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ .... függvények foglaltatnak. Ez esetben azonban szintén nem lesz nehéz V-nek változtatására nézve, a szükséges kifejezést előterjeszteni, mert a fennebbi b) alatti kifejezésből nyilván láthatni azon szabályt, mely szerint a kérdéses változtatás előállítható lesz t. i.

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P.\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots.$$
$$+ N'\delta z + P'.\delta.\frac{dz}{dx} + Q'.\delta.\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots,$$

mely kifejezésben, valamint a b) alatti kifejezésben is, $M\delta x$ tag elmarad, ha felteszszük, hogy x változó a V-ben semmi változtatást nem szenved, mi mind azon feladatoknál előfordúl, melyekben a kérdéses görbe vonal végpontjainak metszékei állandók.

11.) **(Egyszerü egészletek változtatása.)** Azon feltét alatt, ha az adott függvényben csak két, x és y változó fordúl elő, maga a függvény pedig U-val jegyeztetik, akkor $\int U$ egyszerü egészlet lesz azon esetre, ha U-ban x és y-non kivül, ezen változóknak csak külzelékei, de bármely rendü külzelékei foglaltatnak. Ellenben ha U-ban x és y s ezeknek külzelékein kivül még s is fordúlna elő, hol s, mint tudjuk,

$$= \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

egészlettől függ: akkor az adott egészlet már nem lesz egyszerü, hanem bonyolúlt (complicirt). Feltévén tehát, hogy U kifejezés x, y, dx, dy, d^2x, d^2y .... mennyiségeknek valamely függvénye, $\int U$ egészletnek a változtatását e következő módon fogjuk kapni:

Tudván ugyanis, hogy $\delta\int U = \int \delta U$, ha δU helyébe az előbbi számban megtalált értéket helyettesítjük, lesz:

1.) $\delta\int U = \int [M\delta x + N.\delta dx + P.\delta d^2x + Q.\delta d^3x + \ldots, \ldots]$

$$+\int [M'\delta y + N.'\delta dy + P'\delta d^2y + Q'\delta d^3y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots],$$

mely kifejezés más alakra hozható az által, ha azon tagokban, melyekben a d és δ jelek együtt fordúlnak elő, a δ jel elébe d jel tétetik, azután pedig a részletes egészelés véghez vitetik, $\int udv = uv - \int vdu$ minta segélyével. Így járván el lesz:

$$\int N.\delta dx = \int N.d\delta x = N\delta x - \int \delta x.dN,$$

$$\int P.\delta d^2x = \int Pd^2\delta x = P.d\delta x - \int d\delta dP = Pd\delta x - dP.dx + \int \delta x.d^2P,$$

$$\int Q\delta d^3x = \int Qd^3\delta x = Qd^2\delta x - \int d^2\delta x.dQ = Qd^2\delta x - dQ.d\delta x + \int d\delta x.d^2Q$$

$$= Qd^2\delta x - dQd\delta x + d^2Qdx - \int \delta x.d^3Q \ldots\ldots \text{ s i. t.}$$

Minthogy továbbá a betük egyszerü felcserélése által:

$$\int M'dy, \quad \int N'\delta dy, \quad \int P'.\delta d^2y \ldots\ldots\ldots$$

tagokra nézve, hasonló kifejezések nyerhetők; ha ezen kifejezéseket a fenebbi 1) alatti egyenletbe helyettesítjük, s az egészet δx, $d\delta x$, $d^2\delta x \ldots\ldots$ szorzók szerint elrendezzük, e következő egyenletre fogunk jutni:

$$2.) \quad \delta\int U = (N - dP + d^2Q + \ldots\ldots)\delta x + (P - dQ + \ldots)d\delta x$$
$$+ (Q + \ldots\ldots\ldots)d^2\delta x + \ldots\ldots$$
$$+ (N' - dP' + d^2Q' + \ldots)\delta y + (P' - dQ' + \ldots)d\delta y$$
$$+ (Q - \ldots\ldots)d^2\delta y)$$
$$+ \int [M - dN + d^2P - d^3Q + \ldots\ldots]\delta x$$
$$+ \int [M' - dN' + d^2P' - d^3Q' + \ldots\ldots]\delta y,$$

mely kifejezés két lényeges részből áll, melyek egyike x-nek, másika pedig y-nak a változtatásából eredőnek tekintendő. Megjegyzendő még, hogy ha x és y-non kivül még egy harmadik z változó fordúlna elő az adott függvényben, akkor a fenebbi kifejezéshez még csak azon rész hozzáadandó, mely

z-nek változtatásából ered, és mely a fenebbi két részhez hasonló alakkal bír, tehát könnyen meghatározható.

Ha az előttünk álló 2) alatti kifejezésben δx és δy-nak az egészlet alatti szorzóit elenyészőknek veszszük, akkor e következő két egyenletre jutunk :

$$3.)\begin{cases} M-dN+d^2P-d^3Q+\ldots\ldots\ldots=0, \text{ és} \\ M'-dN'+d^2P'-d^3Q'+\ldots\ldots\ldots=0, \end{cases}$$

mely két egyenlet nyilván, az egészelhetőség azon feltételező egyenletei, melyeknek teljesítésétől $\int U$ kifejezésnek egészelése függ, mit e következő módon is meg lehet mutatni. Ha t. i. U két változóval biró valamely függvénynek teljes külzeléke, szabad lesz tenni $U=dU'$, minek folytán áll szintén : $\delta U=\delta dU=d.\delta U'$, miből következik, hogy δU szintén $\delta U'$-nek teljes külzeléke ; ha tehát $\int\delta U$ kifejezésnek kifejtésében, minden egészelhető tagokat megszabadítunk az egészelési jegytől, a többi megmaradó és egészelési jegy alatt meglevő tagoknak egymást szükségképen meg kell semmisítniök. Az előttünk álló 3) alatti egyenletek tehát valóban, az egészelhetőség feltételező egyenleteinek tekintendők.

12.) Az előbbi szám 2) alatti egyenlete még sokkal rövidebben terjeszthető elő, ha az adott V függvény Vdx alakra hozatik vissza, mi az ismert $dy=pdx$, $dp=qdx$, $dq=rdx\ldots$ értékek helyettesítése által éretik el ; mire nézve már a 8)-dik szám 2) alatti egyenletét megállapítottuk, melynek alakja ez :

$$\delta\int Vdx=V\delta x-\int dV.\delta x+\int dx\delta V,$$

e kifejezésben pedig ha dV és δV helyébe a 9) dik szám a) és b) alatti értékeit helyettesítjük, az utolsó két egészletet így irva képzelvén : $\int(\delta V.dx-dV\delta x)$, nyerni fogjuk :

$$dx.\delta V-dV.\delta x=N(dx\delta y-dy\delta x)+P(dx\delta p-dp.\delta x)$$
$$+Q(dx\delta q-dq\delta x)+\ldots\ldots,$$

minthogy az M-től függő tagok megsemmisítik egymást. Ezen érték helyettesítése e következő egyenletre vezet :

$$\delta\int Vdx = V\delta x + \int N(dx\delta y - dy\delta x) + \int P(dx.\delta p - dp\delta x) +$$
$$\int Q(dx\delta q - dq\delta x) + \ldots\ldots\ldots;$$

mivel pedig áll :

$$dy = pdx, \quad \text{és} \quad dp = \frac{\delta dy - p\delta dx}{dx},$$

ezeknek folytán áll szintén :

$$dx\delta y - dy\delta x = dx(\delta y - p\delta x), \text{ továbbá :}$$
$$dx\delta p - dp\delta x = \delta dy - p.\delta dx - dp\delta x = d\delta y - p.d\delta x - dp\delta x$$
$$= d(\delta y - p\delta x) = d.\left(\frac{dx\delta y - dy\delta x}{dx}\right),$$

ha t. i. a fenebbi értékek tekintetbe vétetnek. Hasonlóképen áll szintén :

$$dx\delta q - dq\delta x = d\left(\frac{dx.\delta p - dp.\delta x}{dx}\right), \quad \text{és}$$
$$dx\delta r - dr.\delta x = d.\left(\frac{dx\delta q - dq\delta x}{dx}\right) \ldots\ldots \text{s i. t.}$$

Ezen kifejezéseket továbbá még így is írhatni :

$$\delta p - q\delta x = \frac{d.(\delta y - p\delta x)}{dx},$$
$$\delta q - r\delta x = \frac{d(\delta p - q\delta x)}{dx},$$
$$\delta r - s\delta x = \frac{d(\delta q - r\delta x)}{dx}, \ldots\ldots \text{s i. t.}$$

Ha pedig rövidség okáért tétetik :

$$\delta y - p\delta x = w, \text{ lesz : } \delta p - q\delta x = \frac{dw}{dx},$$
$$\delta q - r\delta x = \frac{1}{dx}d\cdot\left(\frac{dw}{dx}\right)$$
$$\delta r - s\delta x = \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dw}{dx}\right) \ldots\ldots \text{s i. t.}$$

mindezeknek kellő helyettesítése után nyerni fogjuk :

a) $$\delta\int Vdx = V\delta x + \int Nwdx + \int Pdw + \int Qd.\left(\frac{dw}{dx}\right)$$
$$+ \int Rd.\left(\frac{1}{dx}\right)d.\left(\frac{dw}{dx}\right) + \int Sd.\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{1}{dx}\right)d.\left(\frac{dw}{dx}\right) + \ldots,$$

mely kifejezés haladásának szabálya szembe szökő. E kifejezésben egyszersmind azt is látjuk, hogy $V\delta x$ tag, egészelést nem vevén igénybe, csak δx változtatástól függ, míg a többi reá következö tagok mind δx mind δy változtatást magokban foglalják, mivel $\delta y - p\delta x = w$ tétetett. Ezen kifejezésnek második tagja tovább meg nem rövidíthető, azonban a harmadik tag, ha azt részletesen egészeljük, e következőbe megy át:

$$\int P dw = Pw - \int w.dP,$$

hol az utolsó tagban magát a w mennyiséget látjuk. A negyedik tag hasonló eljárás folytán, ebbe megy át:

$$\int Qd.\left(\frac{dw}{dx}\right) = Q\left(\frac{dw}{dx}\right) - \int dQ\left(\frac{dw}{dx}\right) = Q\left(\frac{dw}{dx}\right) - \int dw\cdot\frac{dQ}{dx},$$

mely utolsó egészletet, ha újra részletesen tárgyaljuk, adja:

$$\int Qd.\left(\frac{dw}{dx}\right) = Q\frac{dw}{dx} - \frac{dQ}{dx}w + \int w.d\left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Ha továbbá szintúgy járunk el az ötödik taggal is, nyerni fogjuk:

$$\int Rd.\frac{1}{dx}d\left(\frac{dw}{dx}\right) = R.\frac{1}{dx}.d.\left(\frac{dw}{dx}\right) - \int \frac{dR}{dx}.d.\left(\frac{dw}{dx}\right),$$

az utolsó egészlet pedig adja:

$$\int \frac{dR}{dx}d.\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{dR}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right) - \int \frac{1}{dx}d.\left(\frac{dR}{dx}\right).dw,$$

végre áll szintén:

$$\int \frac{1}{dx}d.\left(\frac{dR}{dx}\right) dw = \frac{1}{dx}d.\left(\frac{dR}{dx}\right)w - \int w.d.\frac{1}{dx}.d.\left(\frac{dR}{dx}\right),$$

s mind ezeknek egymásbai helyettesítése által kapjuk:

$$\int Rd.\frac{1}{dx}d.\left(\frac{dw}{dx}\right) = R\frac{1}{dx}d\left(\frac{dw}{dx}\right) - \frac{dR}{dx}\cdot\frac{dw}{dx} + \frac{1}{dx}d.\left(\frac{dR}{dx}\right)w - \int w.d.\frac{1}{dx}d.\left(\frac{dR}{dx}\right).$$

Ha már most az eddig kifejtetteket az a) alatti egyenletbe helyettesítjük, de oly módon, hogy az egészletek alatti tagok egybe vonassanak, a többi tagok pedig, melyek egészelést nem igényelnek, δx és δy s azoknak külzelékei szerint elrendeztetnek: akkor e következő általános változtatási képletre fogunk jutni:

$$\text{b.)}\quad \delta\int Vdx = V\delta x + w\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx} - \ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{dw}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{ds}{dx} - \ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{dx}d.\frac{dw}{dx}\left(R - \frac{ds}{dx} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dw}{dx}(s - \ldots,\ldots\ldots)$$

$$+\int wdx\left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx}d\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx} - \ldots\ldots\ldots\right].$$

E minta rövidebbé válik az által, ha dx külzelék állandónak vétetik, ez esetben t. i. áll:

$$\text{c.)}\quad \delta\int Vdx = V\delta x + w\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^3s}{dx^3} + \ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{dw}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2s}{dx^2} - \ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{d^2w}{dx^2}\left(R - \frac{ds}{dx} + \ldots\ldots\right) + \frac{d^3w}{dx^3}(s - \ldots\ldots)$$

$$+\int wdx\left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4s}{dx^4} - \ldots\ldots\right].$$

Ha ebben, vagy a fenebbi b) alatti egyenletben, csak az egészlet alatti tag vétetik tekintetbe, és ott w helyébe $(\delta y - p\delta x)$ érték helyettesíttetik, akkor ez nyilván e következő két tagra bomlik:

$$\int dx\delta y\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx} + \ldots\ldots\right), \text{ és}$$

$$\int pdx\delta x\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx} + \ldots\ldots\right),$$

a c) alatti képletre nézve pedig áll:

$$\int dx\delta y\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\ldots\right), \text{ és}$$

$$\int pdx\delta x\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^4} + \ldots\right);$$

mely két kifejezésből már könnyü belátni, mily viszonyban állnak egymáshoz a δx és δy változtatások együtthatói; mert ha δy-nak tényezőjét φ-vel, δx-nek tényezőjét pedig ψ vel jelöljük, akkor nyilván ezen egyenletnek kell állnia :

$$\text{e).}\quad \varphi = -p\psi.$$

Ha tehát felteszszük, hogy ezen tényezők egyike elenyészik, a másiknak szintén elenyészőnek kell lenni, és a kérdéses Vdx kifejezés egészelhetővé válik, erre az esetre tehát e következő egyenleteknek kell állniok :

$$\text{K.)}\left\{\begin{array}{l} N-\frac{dP}{dx}+\frac{1}{dx}d.\frac{dQ}{dx}-\frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx}+\ldots\ldots=0, \quad \text{avagy} \\ N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\ldots\ldots=0. \end{array}\right.$$

Még megjegyzendő, hogy mindezen kifejezésekben $N, P, Q\ldots$ helyébe rend szerint $\frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dp}, \frac{dV}{dq}\ldots$ értékek is helyettesíthetők.

A FÜGGVÉNYEK LEGNAGYOBB ÉS LEGKISEBB ÉRTÉKEI.

13.) Miután a változtatási hánylatban többnyire csak bizonyos adott egészletek maximumai és minimumairól van szó, itt mindenekelőtt meg kell említnünk, hogy határozatlan egészleti képletek alatt mit kell érteni. E végre adva legyen $\int Vdx$ egészlet, melyben V szorzó $x, y, p, q\ldots$ mennyiségek valamely függvénye, azaz :

$$V = F(x, y, p, q\ldots\ldots),$$

y alatt pedig x-nek valamely függvényét kell érteni ; akkor mindaddig, míg az x és y közötti viszony határozatlan, $\int Vdx$ egészlet is határozatlannak tekintendő. Ezen egészletnek maximumát vagy minimumát tehát úgy kell felfogni, hogy azon $y = f(x)$ viszony meghatározandó, melyre nézve az adott egészlet értékeinek maximumát vagy minimumát éri el; mire nézve már az előbbiekben megemlitetett, hogy ennek csak bizonyos határok között lehet helye, mi miatt itt többnyire csak határozott egészletekről lesz szó.

Ily határozatlan egészletek legnagyobb vagy legkisebb értékei, bizonyos határok között, egyedül csak a változtatási hánylat segélyével találtatnak meg, még pedig egy ahhoz hasonló elv alkalmazása által, milyent már a külzeléki hánylatban megállapitottunk az adott függvény legnagyobb vagy legkisebb értékeinek meghatározására. Ezen elvre e következő okoskodás által jutunk: Ha u azon változtatandó függvény, melynek maximuma vagy minimuma keresendő, akkor ezen esetre az u változtatásának azaz δu-nak elenyészőnek kell lenni; mert ha u növekedő mennyiség, akkor ez változtatás által $(u+\delta u)$-ra, ha pedig u fogyó mennyiség, akkor ez változtatás által $(u-\delta u)$-ra menend át. Ha pedig u mennyiség először nő, azután pedig fogy, ez tehát bizonyos pontban maximumát érte el: akkor a δu változtatás szükségképen tevőleges állapotból nemleges állapotba ment át, mely alkalommal szükségképen zéruson megy keresztül, s így $\delta u=0$. — Ha pedig u mennyiség először fogy, azután pedig nő, az tehát bizonyos pontban minimumát érte el: akkor δu változtatásnak szintén zéruson kell keresztül mennie, s így megint $\delta u=0$ lesz.

Valamint tehát már a külzeléki hánylatban bebizonyítottuk, hogy valamely adott függvény maximumára vagy minimumára nézve, annak első külzeléke szükségkép elenyésző lesz: ugy áll itt is a dolog a változtatási hánylatra nézve. Egy adott függvénynek tehát csak akkor lesz maximuma vagy minimuma, ha annak első rendü azaz δu változtatása elenyésző.

Hogy pedig az adott függvény a legnagyobb vagy a legkisebb értékkel bír-e, a függvény másod rendü változtatásából az az $\delta^2 u$-ból következtetendő, melynek az első esetben nemlegesnek, a második esetben pedig tevőlegesnek kell lenni, azaz: az első esetben áll $\delta^2 u<0$, és a második esetben áll $\delta^2 u>0$. Ha pedig $\delta^2 u$ szintén $=0$ volna, akkor a felsőbb foku változtatásokhoz kell folyamodnunk.

14.) Az eddig előrebocsátottakat tehát így kell érteni: Azon feltét alatt, hogy Vdx kifejezés $x, y, p, q \ldots$ mennyiségek valamely függvénye, $y=\varphi(x)$ viszony lenne meghatározandó olyképen, hogy erre nézve $\int Vdx$ egészlet $x=b$ és $x=a$ határok között maximumát vagy minimumát érje el, azaz, hogy:

$$\int_a^b Vdx=F(a,b) \text{ kifejezés}$$

legnagyobb vagy legkisebb értéket kapjon.

Erre nézve világos ugyan, hogy ha $y=\varphi(x)$ egyenletben x változó bizonyos változtatást szenved, ez valamely más $y=\psi(x)$ egyenletre menend át, mely csak végtelen keveset különbözik az első egyenlettől: ez esetben azonban $F(b,a)$ függvény szintén egy végtelen kis változtatást szenvedend, melyet $\delta.F(b,a)$ jelkép által kellőleg terjesztünk elő. Ha tehát azt akarnók, hogy $F(b,a)$ a maximumot vagy minimumot képviselje, $\delta F(b,a)$-nak szükségképen elenyészőnek kell lenni, az az $\delta.F(b,a)=0$, azon felsöbb rendű $\delta^2F(b,a)$, $\delta^3F(b,a)$, $\delta^4F(b,a)$ változtatások egyikének pedig (mely el nem enyésző), páros rendűnek kell lenni; áll tehát általánosan:

$$1) \quad \delta\int_a^b Vdx=0.$$

Ezen feltételező egyenletnél fogva, jogunk van, az előbbi szám b) alatti általános egyenletének értékét a felvett b és a határok között venni, és ennek megtörténte után, ugyanannak jobb részét zérussal egyenlítni; minek kellő előterjesztésére, legyen B az egészlet előtti tagok összege azon esetre, ha $x=b$, A pedig ugyanazon tagok öszszege, ha $x=a$ iratik, a határozott egészletek értelmében állnia akkor kell e következő egyenletnek:

$$2) \; 0=B-A+\int_a^b wdx\left[N-\frac{dP}{dx}+\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dQ}{dx}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{dx}d\cdot\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dR}{dx}+\ldots\right],$$

mely egyenlet, a fenebbi értékek értelmében, még így is irható:

$$3)\ 0{=}B{-}A+\int_a^b wdx\left[\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dV}{dp}+\frac{1}{dx^2}d^2\cdot\frac{dV}{dq}-\ldots\ldots\right],$$

mely kifejezésben $w{=}\delta y{-}p\delta x$. Az itten behozott b és a határok vagy állandók vagy változók is lehetnek; az első esetben nyilván láthatni, hogy b-nek és a-nak mind külzelékei mind változtatásai elenyészők, s ennek folytán mind A-nak mind B-nek szintén elenyészőnek kell lenni, minek következtében az előttünk álló egyenlet ebbe megy át:

$$4)\ 0{=}\int_a^b wdx\left[\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dV}{dp}+\frac{1}{dx^2}d^2\cdot\frac{dV}{dq}+\ldots\ldots\right],$$

s minthogy w határozatlan mennyiség, mely természeténél fogva nem lehet zérus, szükségkép áll:

$$5)\ 0{=}\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dV}{dp}+\frac{1}{dx^2}d^2\cdot\frac{dV}{dq}+\ldots\ldots;$$

ez pedig azon nevezetes külzeléki egyenlet, melyből egyedül határozható meg azon y és x közötti viszony, melynek folytán a fen adott határozott egészlet, maximumát vagy minimumát érheti el, ha t. i. az a fen kitett $\delta^2F(b,a)$.,.. feltétnek megfelel.

Ha pedig változók volnának a fen említett b és a határok, akkor ha b' és a' b-nek és a-nak azon értékei volnának, melyek a fenebbi 3) alatti egyenletnek eleget tesznek, már b' és a' ezen esetre állandóknak volnának tekinthetők; ha pedig ez áll, akkor b'-nek és a'-nek változtatásai elenyészvén, B' és A' szintén elenyészők lesznek, és az említett 3) alatti egyenletből megint a 4) alatti egyenlet fog következni; így tehát a határok változásának nem lesz befolyása azon $y{=}\varphi(x)$ viszonyra, melylyel az $\int_a^b Vdx$-nek maximuma vagy minimuma van összeköttetésben. Mindezeknek folytán áll:

$$B'{-}A'{=}0,$$

és mivel a b' és a' határok függetlenek egymástól, áll különkülön:

$$B'{=}0 \quad \text{és} \quad A'{=}0,$$

mely két egyenletből az a' és b' határok értékei meg határozhatók, azért is a $B'{-}A'{=}0$ egyenlet határok egyenletének mondatik, melyből, mint látjuk, a határok magok mindig meghatározhatók. E következő példák az előrebocsátott elmélet felvilágositására szolgálnak:

(1-ső Példa.) x mily függvényének kell lenni az y-nak, hogy ezen értékre nézve

$$s=\int(y^2dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ egészlet}$$

értékeinek minimumát érje el? Ámbár ezen feladatnál azon határok kijelölve nincsenek, melyek között a kérdéses minimumnak van helye, a tárgy általános értelmében még is kell hogy álljon:

$$\delta s=\delta\int(y^2dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=0,$$

azaz, a függvény változtatásának, minimumának esetére, elenyészőnek kell lenni. Ha tehát a változtatási hánylat előrebocsátott elvei szerint az adott függvényt változtatjuk, e következő eredményre fogunk jutni:

$$\delta s=\int\left[\frac{y\delta y dx^2}{ds}+\frac{y^2dx.\delta dx}{ds}+\frac{dy.\delta dy}{ds}\right]=0;$$

ha pedig itt az utolsó két tagban a d és δ jeleket felcseréljük, áll:

$$\delta s=\int\left[\frac{y\delta y dx^2}{ds}+\frac{y^2dx.d.\delta x}{ds}+\frac{dy.d.\delta y}{ds}\right]=0, \text{ avagy:}$$

$$\delta s=\int\frac{y\delta y dx^2}{ds}+\int\frac{y^2dx.d.\delta x}{ds}+\int\frac{dy.d.\delta y}{ds}=0.$$

A δx és δy változtatások külzelékeinek eltávolitására, szükség leend az utolsó két egészletet részletesen tárgyalni, még pedig $\int udv=uv-\int vdu$ minta segélyével, melyben az első egészletre nézve teendő:

$$d.\delta x=dv, \text{ tehát } \delta x=v \text{ és } y^2\cdot\frac{dx}{ds}=u, \text{ s lesz:}$$

$$du=d.\left(y^2\cdot\frac{dx}{ds}\right),$$

a másikra nézve pedig teendő:

$$d\delta y=dv, \text{ tehát } \delta y=v \text{ és } \frac{dy}{ds}=u, \text{ s lesz: } du=d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

miknek helyettesitése által kapjuk:

$$\int\frac{y^2dx.d\delta x}{ds}=\frac{y^2dx}{ds}\cdot\delta x-\int d\cdot\left(\frac{y^2dx}{ds}\right)\delta x,\quad \text{és}$$

$$\int\frac{dy.d.\delta y}{ds}=\frac{dy}{ds}\delta y-\int d\cdot\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y,$$

s ezeknek folytán, e következő egyenletre jutunk :

$$0=\frac{y^2dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y-\int d\cdot\left(\frac{y^2dx}{ds}\right)\delta x+$$

$$\int\left[\frac{ydx^2}{ds}-d.\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]\delta y;$$

az utolsó szám 4) alatti általános egyenlete szerint tehát, küllön-külön állnia kell :

$$d.\frac{y^2dx}{ds}=0,\quad \text{és}\quad \frac{ydx^2}{ds}-d.\frac{dy}{ds}=0,$$

miből következik :

$$\frac{y^2dx}{ds}=c,\quad \text{és}\quad \frac{ydx^2}{ds}=d.\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

Ezen egyenletek elsejében, ha ds helyébe a fen adott érték helyettesítetik lesz :

$$y^2dx=cds=c(y^2dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}},$$

és ha ezt négyzetre emeljük, áll :

$$y^4dx^2=c^2y^2dx^2+c^2dy^2,\quad \text{miből}$$

$$dx^2=\frac{c^2dy^2}{y^2(y^2-c^2)},\quad \text{következőleg}$$

$$dx=\frac{cdy}{y\sqrt{y^2-c^2}},$$

minek az ismert alakra hozása végett tétessék :

$$y=\frac{1}{z},\quad \text{s lesz}\quad dy=-\frac{dz}{z^2},\quad \text{és}\quad z=\frac{1}{y},$$

s így áll :

$$dx=-\frac{cdz}{\sqrt{1-c^2z^2}},\quad \text{tehát}\quad x=-arcsincz+K,$$

és z helyébe a kellő értéket téve, lesz :

$$x=-arcsin\frac{c}{y}+k,\quad \text{miből}$$

$$arcsin\frac{c}{y}=k-x,\quad \text{tehát}\quad c=y.sin(k-x).$$

Visszaemlékezvén már most az egyenes vonal sarkegyenletére, áll :

$$r=\frac{bcos\alpha}{sin(v-\alpha)}, \text{ miből } bcos\alpha=rsin(v-\alpha),$$

hol r a vezérsugár, v pedig azon szög, melyet az a sarktengelylyel képez, végre α azon szög, melyet az egyenes képez ugyanazon tengelylyel, mihez ha még azt is tekintetbe veszszük, hogy $bcos\alpha$ állandó szám, ha azt c-vel jelöljük, lesz :

$$c=r.sin(v-\alpha),$$

mely egyenlet a fen talált egyenlettel ugyanaz; a megfejtett feladatnak tehát mértani jelentése van, mely nyilván abban áll, hogy azon ívnek minimuma határoztassék meg, melynek egész hossza két vezérsugár között foglaltatik, a vezérsugár y által jelöltetvén; a fenebbi eredményből világosan látható, hogy ezen tulajdonság csak az egyenes vonalhoz tartozik.

(2-dik Példa.) Ugyanazon feladat még e következő módon is megfejthető : Határoztassék meg azon legrövidebb vonal, mely valamely síkon fekvő két pont között húzható. Minthogý a keresett vonal csak egyszerü görbületü görbe vonal lehet, az adott feladatnak megoldása nyilván oda irányúl, hogy

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2} \text{ egészlet részére}$$

azon x és y közötti viszony határoztassék meg, melyre nézve az adott egészlet értékeinek minimumát érje el. E végre pedig a változtatási hánylat elvei szerint kell hogy álljon :

$$\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\frac{dxd\delta x+ydδy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}, \text{ avagy :}$$

$$\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\left(\frac{dx}{ds}\right)d\delta x+\int\left(\frac{dx}{ds}\right)d.\delta y.$$

Itt mindenekelött a δx és δy változtatások külzelékei eltávolítandók, mi végre az utolsó két egészlet részletesen tárgyalandó, minek folytán kapjuk :

$$\int\left(\frac{dx}{ds}\right)d\delta x=\left(\frac{dx}{ds}\right)\delta x-\int d.\left(\frac{dx}{ds}\right)\delta x, \text{ és}$$

$$\int\left(\frac{dy}{ds}\right)d\delta y=\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y-\int d.\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y,$$

s így egészletünk változtatására nézve nyerni fogjuk :

$$\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\left(\frac{dx}{ds}\right)\delta x+\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y$$

$$-\int d.\left(\frac{dx}{ds}\right)\delta x-\int d.\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y,$$

miből a fen kimondott elv szerint, azaz az utolsó szám 4) alatti egyenlete értelmében, e következő egyenleteket kapjuk :

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)=0, \text{ és } d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0, \text{ miből :}$$

$$\frac{dx}{ds}=c, \text{ és } \frac{dy}{ds}=c',$$

mely két egyenlet osztásából ered :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c'}{c}=C, \text{ tehát : } dy=Cdx, \text{ és}$$

$$y=Cx+C',$$

ez pedig azon x és y közötti viszony, melyre nézve az adott egészlet értékeinek minimumát kapja. Itt nyilván láthatni, hogy ezen minimumnak x' és x'' határok között van helye, ha t. i. x' és y', azután y'' és x'' az adott két pont összrendezői, s így

$$\int_{x'}^{x''}\sqrt{dx^2+dy^2} \text{ egészletnek minimuma kerestetett.}$$

Hogy e minimum nem egyéb mint egyenes vonal, a fenebbi utolsó egyenletből látjuk, s nincs egyéb hátra, mint a C és C' állandók értékeinek meghatározása; mire nyilván a fen említett határok egyenlete használandó, mely a jelen esetben e következő :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)\delta x+\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y=0,$$

melynek értéke, ha x' és x'' határok között vétetik, lesz :

$$\left[\left(\frac{dx''}{ds''}\right)\delta x''+\left(\frac{dy''}{ds''}\right)\delta y''\right]-\left[\left(\frac{dx'}{ds'}\right)\delta x'+\right.$$

$$\left.\left(\frac{dy'}{ds'}\right)\delta y'\right]=0,$$

melyből semmi más, x és y közötti viszony nem következik, minthogy $\delta x'=\delta x''=\delta y''=0$ miatt ezen egyenlet $0=0$ azonossá válik, a fen talált viszony tehát az adott feladat teljes megoldásának tekintendő. A C és C' állandók pedig úgy határozandók meg, hogy a megtalált egyenes x' y' és x'' y''

pontokon menjen keresztül. Erre nézve pedig a mértan elvei szerint áll:

$$y''=Cx''+C,\ \text{és}\ y'=Cx'+C',\ \text{miből:}$$

$$y''-y'=C(x''-x'),\ \text{tehát:}\ C=\frac{y''-y'}{x''-x'};$$

mivel pedig szintén áll: $y-y'=C(x-x')$, hol x egy tetszésszerinti metszék, következik:

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x'),$$

mely már a kérdéses egyenes keresett egyenlete.

(3-dik Példa.) Meghatározandó azon görbe vonal, melyre nézve az

$$\int\frac{ds}{\sqrt{x_1-x}}$$

egészlet, ha $x=x_1$-től $x=x_2$-ig vétetik, és

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

értékeinek minimumát érje el, hol x és y a derékszögü összrendezőket jelentik.

Minthogy az adott egészlet minimumára nézve kell, hogy álljon:

$$\delta\int\frac{ds}{\sqrt{x_1-x}}=0,$$

ha erre a kifejezésre a változtatási hánylat szabályai alkalmaztatnak, e következő eredményre fogunk jutni:

$$\delta\int\frac{ds}{\sqrt{x_1-x}}=\int\left[\frac{\delta ds}{\sqrt{x_1-x}}-\frac{ds(\delta x_1-\delta x)}{2(x_1-x)^{\frac{3}{2}}}\right]=0.$$

Következik továbbá a második adott egyenletből:

$$\delta.ds=\frac{dx.d\delta x+dy.d\delta y+dzd\delta z}{ds},$$

mely értéket az előttünk álló egészleti egyenletbe tévén, és az egészet egyes tagokra bontván, nyerni fogjuk:

$$\int\frac{dxd\delta x}{uds}+\int\frac{dyd.\delta y}{uds}+\int\frac{dz.d\delta z}{uds}-\int\frac{ds.\delta x_1}{2u^3}+\int\frac{ds.\delta x}{2u^3}=0,$$

hol $\sqrt{x_1-x}$ helyébe u tétetett rövidség okáért. Ezen egyenletnek első három tagját szükség lesz tárgyalni, az ismert részletes egészelés által, hogy a változtatások külzelékei eltüntessenek, ha tehát az első egészletet $\int udv = uv - \int vdu$ mintával összehasonlitjuk, teendő lesz :

$$dv = d\delta x \quad \text{és} \quad u = \frac{dx}{uds}, \quad \text{tehát} \quad v = \delta x \quad \text{és} \quad du = d.\left(\frac{dx}{uds}\right),$$

míknek helyettesitése adja :

$$\int \frac{dx.d.\delta x}{uds} = \frac{dx.\delta x}{uds} - \int \delta x.d\left(\frac{dx}{uds}\right), \text{ és hasonló módon}$$

$$\int \frac{dy.d\delta y}{uds} = \frac{dy\delta y}{uds} - \int \delta y.d\left(\frac{dy}{uds}\right), \quad \text{és}$$

$$\int \frac{dz.d\delta z}{uds} = \frac{dz.\delta z}{uds} - \int \delta z.d\left(\frac{dz}{uds}\right),$$

miknek további összeállitása végett, mindenekelőtt szükség lesz, az egészelést igénybe nem vevő tagokat x_2 és x_1 határok között venni, hogy az úgy nevezett határok egyenlete nyeressék, s így a 14)-ik szám 3) alatti egyenlete szerint álljon :

$$\frac{1}{u^2_2}\left[\frac{dx_2\delta x_2}{ds_2} + \frac{dy_2\delta y_2}{ds_2} + \frac{dz_2\delta z_2}{ds_2}\right] - \frac{1}{u_1}\left[\frac{dx_1\delta x_1}{ds_1} + \frac{dy_1\delta y_1}{ds_1} + \frac{dz_1\delta z_1}{ds_1}\right]$$

$$-\delta x_1 \int \frac{ds}{2u^3} + \int\left[\left(\frac{ds}{2u^3} - d.\frac{dx}{uds}\right)\delta x - d\frac{dy}{uds}\delta y - d\frac{dz}{uds}\delta z\right] = 0,$$

miből a változtatások függetlensége miatt,a 14)-ik szám 4) alatti egyenlete szerint, külön-külön állnia kell :

$$\frac{ds}{2u^3} - d.\frac{dx}{uds} = 0, \quad d.\left(\frac{dy}{uds}\right) = 0, \quad \text{és} \quad d.\left(\frac{dz}{uds}\right) = 0\,;$$

az utolsó két egyenletből következik :

$$\frac{dy}{uds} = A, \quad \text{és} \quad \frac{dz}{uds} = B, \quad \text{tehát :}$$

$$uds = \frac{dy}{A}, \quad \text{és} \quad uds = \frac{dz}{B},$$

s ennek folytán :

$$\frac{dy}{A} = \frac{dz}{B}, \quad \text{avagy} \quad Adz - Bdy = 0, \text{ s így :}$$

$$Az - By = C,$$

mely egyenlet, mint a mértanból tudjuk, egy az x-ek tengelyéhez párhúzamos síkhoz tartozik, melyen a kérdéses görbe vonal fekszik ; ha ezen síkra nézve, magát az xy síkot választjuk, akkor nyilván $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ lesz, és ds-nek ezen értéke a $\frac{dy}{uds}=A$ egyenletbe lesz helyettesítendő oly módon, hogy $A=\frac{1}{\sqrt{2a}}$ tétessék; s ennek folytán lesz:

$$dy=\frac{u\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{x_1-x}.\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2a}}, \text{ avagy}$$

$$\frac{2a.dy^2}{x_1-x}=dx^2+dy^2,$$

miből nyerjük:

$$dy=\frac{dx\sqrt{x_1-x}}{\sqrt{2a-x_1+x}},$$

tévén továbbá $2a-x_1+x=x'$, tehát $2a-x'=x_1-x$, lesz még:

$$dy=\frac{dx'\sqrt{2a-x'}}{\sqrt{x'}}=\frac{dx'(2a-x')}{\sqrt{2ax'-x'^2}},$$

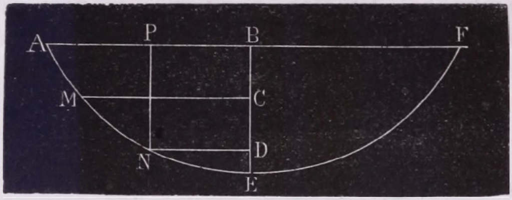
mely kifejezés, mint látjuk, nem egyéb, mint a hengerlék külzeléki egyenlete, hol a a nemző kör sugara.

Azon tulajdonságnál fogva tehát, mely magában az adott feladatban foglaltatik, következik, hogy ha egy oly hengerléket képzelünk, melynek csúcsa legmélyebb fekvésü levén, tengelye fekmentesen áll, annak minden íve, egy nehéz lefutó test által a lehető legrövidebb idő alatt hagyatik hátra, mi miatt a hengerlék a leggyorsabb esésü görbének (brachistochrone) mondatik; s így ezen feladat megfejtése által, a Brachistochronénak híres feladata meg van fejtve.

Ezen most megfejtett feladathoz tartozik még az is, hogy a hengerléki ív, egy rajta lefutó nehéz testre nézve, nem csak a legrövidebb idejü ív, hanem a hengerlék bármely hosszuságu íve, még maga a fél hengerlék is, egy ugyanazon idő alatt futtatik át, mi miatt az nem csak brachistochronénak, hanem tautochronénak is (egyidejünek) neveztetik; minek bebizonyítását az előrebocsátott feladathoz csatolni érdekesnek tartván, e következő módon lehet eljárni:

Legyen AEF (11-dik idom) egy közönséges hengerlék, tehát $BE=2a$ a nemző kör átmérője; M-ben képzeltessék egy nehéz pont, akkor ez magára hagyatván E felé fog mo-

(11-dik idom.)



zogni, és a tetszés szerint felvett $MN = s$ tér bizonyos t idő alatt fog hátra hagyatni; M-nél az említett pont természetesen nyugvásban képzelendő. Az N-re érkező pont nyilván a $CD = z$ magasságnak megfelelő sebességgel bír, mely sebesség e következő kifejezés által fog adatni :

$$v^2 = 2gz, \quad \text{tehát} \quad v = \sqrt{2gz},$$

és mivel $v = \frac{ds}{dt}$, ezen érték helyettesítése adja :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gz}, \quad \text{miből}$$

$$1) \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2gz}}.$$

Feltévén most, hogy a metszékek kezdőpontja E-ben van, akkor $EC = h$ és $ED = u$ tétetvén, lesz $CD = z = h - u$, s ennek folytán

$$2) \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-u)}},$$

mely egyenletben a ds mennyiség u-nak függvényében lesz kifejezendő, mi végre a hengerlék ismert egyenlete szolgál, melyre nézve jó lesz, a metszékeket A ponttól számítni; tevén tehát $AP = x$, lesz $NP = y$, s áll :

$$x = a.arc.cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

mely egyenlet külzelése által nyerjük :

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

mivel pedig áll :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ha dx helyett a fenebbi érték tétetik, lesz :

$$ds = dy\sqrt{\frac{2a}{2a-y}},$$

ámde idomunkból láthatni, hogy $(2a-y)$ nem egyéb mint $BE-BD=DE=u$, tehát külzelés által $dy=-du$, minek következtében áll még :

$$ds = -du\sqrt{\frac{2a}{u}},$$

ezen érték a fenebbi 2) egyenletbe tétetvén, lesz :

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}.\frac{du}{\sqrt{hu-u^2}},$$

minek egészelése által kapjuk :

$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}}.arc.sin.ver.\frac{2u}{h}+C.$$

C állandónak a meghatározására látjuk, hogy t idő elenyészik, midőn a nehéz pont M-ben van, mely esetben $u=h$, lesz tehát :

$$0 = -\sqrt{\frac{a}{g}}.arc.sin.ver2+C, \quad \text{miből } C=\pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

következőleg

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\left[\pi - arcsin.ver.\frac{2u}{h}\right],$$

mely kifejezés azon időt adja, mely alatt az $NM=s$ ív futtatik át. Hogy tehát azon T idő meghatároztassék, mely alatt az ME ív hagyatik hátra, nyilván csak $u=0$ teendő, minek folytán lesz :

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

mely nevezetes kifejezésből láthatni, hogy T-nek értéke h-tól nem is függ, azaz, T idő mindig ugyanaz marad, bárhol kezdődik a nehéz pont mozgása; NE, vagy ME, vagy AE ív tehát, ugyanazon idő alatt futtatik át, ez oknál fogva tehát ezen görbe vonal egyidejü görbének neveztetik.

15.) **(A viszonyos Maximumok és Minimumokról.)** Az előrebocsátott esetekben mindig feltétetett, hogy a V függvényben foglalt változók függetlenek egymástól, minthogy ezeknek egymásközti viszonya, csak a szükséges megvizsgálás által meghatározandó. Sokszor azonban nem úgy áll a dolog, hanem az adott egészleten kivül, melynek maximuma vagy minimuma kerestetik, még egy vagy több feltételező egyenlet van adva, melyek által a változók bizonyos egymástóli függése ki van fejezve.

Ily esetben az adott V függvényből annyi változó lesz kiküszöbölendő, a hány feltételező egyenlet van adva, a többivel pedig úgy kell eljárni, mint az előbbiekben már láttuk. Az ily esetek pedig az úgynevezett viszonyos maximumokat vagy minimumokat képezik, s ezek sorába tartozik e következő feladat :

Azon görbe vonal meghatározandó, melynek egy adott hosszuságu íve, a lehető legnagyobb vagy legkisebb területet zárja be. Ez esetben bizonyos határok között az $\int V dx$ egészlettől az kivántatik, hogy maximumát vagy minimumát érje el azon feltét alatt, hogy az ugyanazon határok között vett $\int V' dx$ egészlet, bizonyos állandó értéket tartson meg, azaz, hogy álljon :

$$\int_b^a V' dx = C,$$

hol a és b az említett határok, V és V' szorzók pedig az x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... mennyiségek függvényeinek tekintendők. Az előrebocsátott elvek szerint, az adott feladat feltételeinél fogva, kell, hogy álljon e következő két egyenlet :

$$\delta\int_b^a V dx = 0, \quad \text{és} \quad \delta\int_b^a V' dx = 0,$$

mely egyenletek utolsóját ha egy állandó k tényezővel szorozzuk, és az elsőhöz hozzáadjuk, áll szintén :

$$\delta\int_b^a V dx + k\delta\int_b^a V' dx, \quad \text{avagy} \quad \delta\int_b^a [V + kV'] dx = 0,$$

s ezen utolsó egyenlet nyilván úgy tárgyalandó, mintha :

$$\int_b^a [V + kV'] dx$$

egészletnek feltétlen maximumáról vagy minimumáról lenne szó, minthogy azon x és y közötti viszony, mely az utolsó kifejezésnek megfelel, az $\int_b^a Vdx$ egészletnek is megfelelend. A behozott k állandót illetőleg pedig, az nyilván úgy lesz meghatározandó, hogy az $\int_b^a V'dx$ egészlet, az adott állandó értéket vegye föl. Következő példák a tárgy felvilágositására szolgálnak:

(1-ső Példa.) Határoztassék meg azon görbe vonalnak alakja, mely állandó hosszusága mellett, a lehető legnagyobb vagy legkisebb területet zárja be. (Itt könnyü belátni, hogy ezen terület két meghatározott rendező között foglaltatik.)

Miután az előbbiekből tudva van előttünk hogy a kérdéses terület $\int ydx$ egészlet által helyesen fejeztetik ki, az előterjesztett feladat még így is formulázható: Határoztassék meg $\int ydx$ egészletnek legnagyobb vagy legkisebb értéke azon esetre, hogy

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ív, állandó c hosszusággal bírjon, azaz hogy álljon:

$$\int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=c.$$

Minthogy ez esetben állniok kell e következő egyenleteknek:

$$\delta\int ydx=0, \text{ és } \delta\int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=0,$$

az előrebocsátott elvek szerint, ha C egy új állandót jelent, egyszersmind kell, hogy álljon ez is:

$$\delta\int ydx+C\delta\int \sqrt{dx^2+dy^2}=0.$$

Itt pedig, ha a kellő változtatási mütétel véghez vitetik, nyerni fogjuk:

$$\int dx\delta y+\int y.\delta dx+C\int\frac{dx.\delta dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}+C\int\frac{dy.\delta dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=0,$$

és ha még dx is állandónak vétetik, tehát $\delta dx=0$, áll:

$$\int dx\delta y + C\int \frac{dy.d.\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0\,;$$

ha továbbá az utolsó egészletet részletesen tárgyaljuk, a $d\delta y$ külzelék eltávolítására, könnyü módon nyerni fogjuk :

$$\int \frac{dy.d\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy.\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}} - \int \delta y \cdot d \cdot \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

minek helyettesitése által, kapjuk még :

$$\frac{Cdy.\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}} + \int dx.\delta y - \int \delta y \cdot d \cdot \frac{Cdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0, \text{ avagy}$$

$$\frac{Cdy.\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}} + \delta y \int \left[dx - d \cdot \frac{Cdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} \right] = 0,$$

a változtatási hánylat elvei szerint tehát, külön-külön is kell, hogy álljon :

$$dx - d.\frac{Cdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0,$$

miből egészelés által :

$$x - \frac{Cdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = A, \text{ ebből továbbá kapjuk :}$$

$$x - A = \frac{Cdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}, \quad \text{és} \quad (x-A)^2(dx^2+dy^2) = C^2dy^2,$$

honnét :

$$dy = \frac{(x-A)dx}{\sqrt{C^2-(x-A)^2}},$$

minek egészelése végett tétessék $x-A=z$, s lesz $dx=dz$, következőleg

$$dy = \frac{zdz}{\sqrt{C^2-z^2}}, \quad \text{tehát} \quad y = -\sqrt{c^2-z^2} + B,$$

hol z helyébe a fenebbi értéket téve lesz :

$$y - B = -\sqrt{c^2-(x-A)^2}, \quad \text{avagy} \quad (x-A)^2+(y-B)^2 = c^2.$$

Ezen egyenlet figyelmes megtekintéséből azonnal látjuk, hogy ez nem egyéb, mint a kör egyenlete ; a kör tehát azon nevezetes görbe vonal, mely ha a rendezők két végpontjain keresztül húzatik, az így bezárt terület a lehető legnagyobb vagy legkisebb lesz, még pedig legnagyobb akkor, ha homorúsága, legkisebb akkor, ha domborúsága van a metszéki tengely felé irányozva.

(2-dik Példa.) Mily viszonynak kell állnia x és y között, hogy az $x=a$ és $x=b$ határok között vett $\int y^2 dx$ egészlet értékeinek maximumát vagy minimumát érje el, azon feltétellel, hogy az ugyanazon határok között vett $\int xydx$ egészlet állandó értékkel bírjon? Az előbbiek szerint azon függvény, melynek maximuma vagy minimuma kerestetik, e következő alakban fordúl elő:

$$V=\int y^2 dx+k\int xydx,$$

minek változtatása ezen eredményre vezet:

$$\delta V=\int 2y\delta y dx+k\int x\delta y dx=\int (2y+kx)\delta y dx,$$

ha t. i. sem x sem dx változtatást nem szenved. Ezen utolsó egyenletből nyerjük:

$$2y+k=0, \quad \text{miből} \quad y=-\frac{kx}{2}, \quad \text{és ha}$$

$$\int_a^b xydx=A, \quad \text{áll szintén:}$$

$$\int_a^b -\frac{kx2}{2}dx=A, \quad \text{mivel pedig} \quad \int_a^b -\frac{kx^2}{2}dx=\frac{k}{b}(a^3-b^3),$$

lesz még:

$$\frac{k}{6}(a^3-b^3)=A, \quad \text{tehát} \quad k=\frac{6A}{a^3-b^3}.$$

Mivel végre a fenebbi kifejezésből kapjuk:

$$\delta^2 V=\int 2\delta y^2 dx,$$

tehát egy lényegesen tevőleges mennyiséget: következik, hogy az adott egészletnek minimuma van.

(3-dik Példa.) Meghatározandó legyen azon legrövidebb vonal, mely két adott pont között húzható a térben.

Az elemző mértanból tudjuk, hogy a térben fekvő valamely görbe vonal ívének a hossza, e következő egészlet által van adva:

$$s=\int \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

hol x, y és z alatt az épszögü összrendezők értendők. Miután a fen említett két pont összrendői adatnak, legyenek a_1, b_1, és c_1 a görbe vonal egyik, a_2, b_2, és c_2 pedig a másik végpontjának összrendezői ; akkor a fen kitett egészlet nyilván $x=a_1$, és $x=a_2$ határokra vonatkozik, s így mind y mind z mennyiség, x függvényének tekintendő. Hogy tehát a kérdéses görbének minimuma legyen, δs változtatásának elenyészőnek kell lenni, azaz áll :

$$\int \delta ds = \int \frac{dx.\delta dx + dy.\delta dy + dz.\delta dz}{ds} = 0,$$

itt pedig a d és δ jegyeket felcserélvén, és az egészletet egyes tagokra bontván, lesz :

$$\int \frac{dx.d\delta x}{ds} + \int \frac{dy.d.\delta y}{ds} + \int \frac{dz.d\delta z}{ds} = 0,$$

mely egészletek, a változtatások külzelékeinek eltüntetése végett, részletesen tárgyalandók, minek eredménye lesz :

$$\int \frac{dx.d\delta x}{ds} = \frac{dx.\delta x}{ds} - \int \delta x.d.\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

$$\int \frac{dy.d.\delta y}{ds} = \frac{dy.\delta y}{ds} - \int \delta y \cdot d \cdot \left(\frac{dy}{ds}\right), \text{ és}$$

$$\int \frac{dz.d\delta z}{ds} = \frac{dz.\delta z}{ds} - \int \delta z \cdot d \cdot \left(\frac{dz}{ds}\right),$$

minek elrendezése után kapjuk :

$$\frac{dx\delta x}{ds} + \frac{dy\delta y}{ds} + \frac{dz\delta z}{ds} - \int \left[\delta x.d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \delta y.d.\left(\frac{dy}{ds}\right) + \delta z.d.\left(\frac{dz}{ds}\right) \right] = 0.$$

Ha most a határok egyenletének felállítására, az első három tag $x=a_1$ és $x=a_2$ határok között vétetik, e következő egyenletet kapjuk :

$$0 = \frac{da_2\delta a_2 + db_2\delta b_2 + dc_2\delta c_2}{ds_2} - \frac{da_1\delta a_1 + db_1\delta b_1 + dc_1\delta c_1}{ds_1}$$
$$- \int \left[\delta x.d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \delta y.d.\left(\frac{dy}{ds}\right) + \delta z.d.\left(\frac{dz}{ds}\right) \right],$$

miből nyilván e következő három egyenletre jutunk :

$$da_1\delta a_1 + db_1\delta b_1 + dc_1\delta c_1 = 0,$$
$$da_2\delta a_2 + db_2\delta b_2 + dc_2\delta c_2 = 0, \text{ és}$$

$$\text{a)}\quad \delta x.d.\left(\frac{dx}{ds}\right)+\delta y.d.\left(\frac{dy}{ds}\right)+\delta z.d.\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Az elsö két egyenlet által határoztatik meg a kérdéses görbe végpontjainak térbeni fekvése, a harmadik egyenlet pedig ezen görbe vonal természetét tartalmazza magában, melyre nézve, minthogy δx, δy és δz változtatások függetlenek egymástól, tehát tetszésünk szerint fölvehetők, szabad lesz azokat oly értelemmel felruházni, hogy külön-külön is álljon :

$$d.\left(\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad d.\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,\quad \text{és}\quad d.\left(\frac{dz}{ds}\right)=0,$$

mely egyenletekből egészelés által kapjuk :

$$\frac{dx}{ds}=A,\quad \frac{dy}{ds}=A',\quad \text{és}\quad \frac{dz}{ds}=A'',$$

hol A, A' és A'' három tetszésszerinti állandó. Ha ezen egyenletekből ds-t eltávolítjuk, nyerni fogjuk :

$$ds=\frac{dx}{A},\quad ds=\frac{dy}{A'},\quad \text{és}\quad ds=\frac{dz}{A''},\quad \text{miből}$$

$$Adz=A''dx,\quad \text{és}\quad A''dy=A'dz,$$

s ebből új egészelés által :

$$Az+C=A''x,\quad \text{és}\quad A''y=A'z+C',\ \text{avagy :}$$

$$x=az+\alpha,\quad \text{és}\quad y=a'z+\beta,$$

ha t. i. rövidség okáért $\frac{A}{A''}=a$, és $\frac{C}{A''}=\alpha$, továbbá $\frac{A'}{A''}=a'$ és $\frac{C'}{A''}=\beta$ tétetik. Ezen egyenletek pedig, mint az elemző mértanból tudjuk, egy a térben fekvő egyeneshez tartoznak, mely tehát az adott két pont között a legrövidebb vonal.

Másképen áll azonban a dolog, ha még az is kivántatnék, hogy a kérdéses vonal bizonyos felülethez legyen kötve, melynek egyenlete : $z=f(x,y)$, avagy külzeléki egyenlete :

$$dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$$

adva van; mert ez esetben könnyü belátni, hogy a δx, δy és δz változtatások szintén ezen felülethez kötvék, úgy hogy a kérdéses vonal egy ahhoz végtelen közel fekvő vonalba menjen át, és ezen új vonal még mindig az adott felületen feküdjék. Ennek eszközlése végett pedig, a változtatási szabályok szerint kell, hogy álljon :

$$\delta z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\delta y,$$

mely egyenlet az előbbi a) alatti egyenlettel összekapcsolandó, mi legkönnyebben az által történik, ha δz-nek értéke, az említett egyenletben helyettesítetik, minek eredménye e következő :

$$\left[d\cdot\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dz}{dx}\cdot d\cdot\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]\delta x+$$
$$\left[d\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{dy}\cdot d\cdot\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]\delta y=0,$$

és a δx és δy változtatások függetlensége miatt, külön-külön állnia kell :

$$d.\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dz}{dx}\cdot d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0, \text{ és}$$
$$d.\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{dy}\, d\cdot\left(\frac{dz}{ds}\right)=0,$$

mely egyenletek mindegyike azon sík egyenlete, mely az adott felületet a keresett görbe vonalban metszi, s melyre nézve a kérdéses maximumnak van helye. Ha az utolsó két egyenletből $d.\left(\frac{dz}{ds}\right)$ szorzót eltávolítjuk, akkor e következő egyenletre jutunk :

$$\frac{dz}{dx}\cdot d\cdot\left(\frac{dy}{ds}\right)=\frac{dz}{dy}\cdot d\cdot\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

mely által azon nevezetes tulajdonság mondatik ki, hogy a görbületi sík az x,y,z ponthoz tartozó érintkezési síkra merőlegesen áll.

Ha például felteszszük, hogy a keresett görbe azon gömb felületén feküdjék, melynek középpontja az összrendezők kezdőpontjával összeesik, melynek egyenlete tehát :

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

akkor ezen egyenletből kapjuk :

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}, \text{ és } \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z},$$

miket az utolsó három egyenletbe tévén, lesz :

$$d.\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{x}{z}d\left(\frac{dz}{ds}\right),\quad d\left(\frac{dy}{ds}\right)=\frac{y}{z}d\left(\frac{dz}{ds}\right),\text{ és}$$

$$d.\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{x}{y}d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

itt pedig (ds állandónak vétetvén) ha a kijelentett külzelések véghez vitetnek, nyerni fogjuk:

$$\frac{zd^2x-xd^2z}{ds}=0,\quad \frac{zd^2y-yd^2z}{ds}=0,\text{ és }\frac{yd^2x-xd^2y}{ds}=0,$$

miből egészelés által kapjuk:

$$zdx-xdz=bds,\quad zdy-ydz=ads,\text{ és }ydx-xdy=cds,$$

hol a, b, és c a három tetszésszerinti állandó. Most már minden további egészelés nélkül, könnyen meghatározható azon felület egyenlete, mely a gömb felületét a kérdéses görbe vonalban metszi; ha t. i. a fenebbi egyenletek elsejét y-nal, másikát $(-x)$-el, és a harmadikát $(-z)$-vel szorozzuk, és ez után öszszeadjuk, nyerni fogjuk:

$$ax+by+cz=0,$$

mely egyenlet azt mondja, hogy az ahhoz tartozó felület egy sík, mely a gömb középpontján megy keresztül, miből egyszersmind következik, hogy két pont között a gömb felületén húzható legrövidebb vonal, a legnagyobb körnek egy íve.

(4-dik Példa.) Bizonyos görbe vonalra nézve

$$\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

avagy $\int yds$ egészletnek maximuma vagy minimuma meghatározandó, azon feltét alatt, hogy $\int ds$, azaz ezen görbe vonal ívének hossza állandó maradjon.

Az előrebocsátott változtatási elvek szerint kell, hogy álljon:

$$\delta\int yds+k\delta\int ds,\text{ avagy : }\int\delta(y+k)ds=0,$$

mely kifejezés változtatása ha a szorzat változtatási szabálya szerint eszközöltetik, nyerni fogjuk:

$$\int\left[ds\delta y+\frac{y+k}{ds}\left(dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z\right)\right]=0,\text{ avagy :}$$

$$\int ds\delta y+\int\frac{y+k}{ds}dxd\delta x+\int\frac{y+k}{ds}dyd\delta y+\int\frac{y+k}{ds}dzd\delta z=0,$$

és ha az utolsó három egészletet részletesen tárgyaljuk, a változtatások külzelékeinek eltávolítására, ered :

$$\int\frac{y+k}{ds}dx d\delta x=\frac{y+k}{ds}dx\delta x-\int\delta x d.\left(\frac{y+k}{ds}dx\right),$$

$$\int\frac{y+k}{ds}dy d\delta y=\frac{y+k}{ds}dy\delta y-\int\delta y d\left(\frac{y+k}{ds}dy\right), \text{ és}$$

$$\int\frac{y+k}{ds}dz d\delta z=\frac{y+k}{ds}dz\delta z-\int\delta z d\left(\frac{y+k}{ds}dz\right),$$

minek helyettesítése által e következő egyenletre jutunk :

$$0=\frac{y+k}{ds}dx\delta x+\frac{y+k}{ds}dy\delta y+\frac{y+k}{ds}dz\delta z$$
$$-\int\delta x d\left(\frac{y+k}{ds}dx\right)-\int\left[d.\frac{y+k}{ds}dy-ds\right]dy$$
$$-\int\delta z\left(d\frac{y+k}{ds}dz\right),$$

a δx, δy, és δz változtatások függetlensége miatt tehát áll külön-külön :

$$d(y+k)\frac{dx}{ds}=0,\quad d.(y+k)\frac{dz}{ds}=0,\text{ és } d\left[(y+k)\frac{dy}{ds}-ds\right]=0,$$

mely egyenletek egészelése által kapjuk :

$$(y+k)\frac{dx}{ds}=A,\quad (y+k)\frac{dz}{ds}=C \text{ és } (y+k)\frac{dy}{ds}-ds=B,$$

hol A, B és C az egészelések tetszésszerinti állandói. Ezen egyenletek elsejét és másodikát elosztván egymással, kapjuk :

$$\frac{A}{C}=\frac{dx}{dz} \text{ avagy } Adz=Cdx,$$

mely egyenlet nyilván azt mondja, hogy a kérdéses görbe az összrendezők xz síkjában fekszik. Ha azonban fölvesszük, hogy a keresett görbe az összrendezők xy síkjában fekszik, akkor a fenebbi egyenletek másodika elmarad, a többi két egyenletből pedig, ha $(x+k)$-t és ds-et kiküszöböljük, nyerni fogjuk :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s+B}{A},\text{ avagy } \frac{dy}{dx}=\frac{s}{A},\text{ ha t. i. } B=0.$$

Ezen utolsó egyenletre nézve, az egyensúlytan azt mutatja, hogy ez azon görbe vonalhoz tartozik, melyet egy, két pontból szabadon lelógó nehéz zsinor a függőleges síkban képez, és lánczgörbének neveztetik. Hátra van még ezen utolsó egyenletnek egészelése úgy, hogy vagy x, y által, vagy y, x által fejeztessék ki; mi végre ha ezen egyenletet különzeljük, és $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ tétetik, lesz:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{hol} \quad a=\frac{1}{A},$$

mivel pedig:

$$\frac{dy}{dx}=p, \quad \text{lesz} \quad p^2=\frac{dy^2}{dx^2}, \quad \text{tehát}$$

$$pdp=\frac{dy.d^2y}{dx^2},$$

miből:

$$\frac{pdp}{dy}=\frac{d^2y}{dx^2},$$

minek helyettesítése adja:

$$\frac{pdp}{dy}=a\sqrt{1+p^2}, \quad \text{következőleg}$$

$$dy=\frac{pdp}{a\sqrt{1+p^2}},$$

s ebből

$$y=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}+C.$$

Az állandó az által meghatározható, ha $p=0$ értékre nézve y is elenyészik, minek folytán lesz:

$$C=-\frac{1}{a}, \quad \text{következőleg}$$

$$y=\frac{1}{a}(\sqrt{1+p^2}-1),$$

mely egyenlet ha dx-re és dy-ra visszahozatik, nyerni fogjuk:

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{2ay+y^2}},$$

minek egészelése által kapjuk:

$$x=log(a+y+\sqrt{2ay+y^2}),$$

mely nem egyéb, mint a lánczvonal egyenlete. Az adott $V=\int yds$ függvénynek további megvizsgálása azt mutatja, hogy $\delta^2 V$ változtatás vagy tevőlegessé vagy nemlegessé válik, a mint a kérdéses görbe vonalnak vagy a domború, vagy a homorú oldala fekszik a metszéki tengely felé. Mivel pedig V, avagy $\int 2\pi y ds$ egészlet nem egyéb, mint a görbe vonal x tengely körüli forgása által képzett felület: következik, hogy minden görbe vonalok között, melyek két ponton keresztül menvén, egyenlő hosszusággal bírnak, a lánczvonal az, mely x tengely körül forogván, a lehető legkisebb vagy legnagyobb felületet írja le, a mint t i. annak vagy domború vagy homorú része van a metszéki vagy forgási tengely felé irányozva.

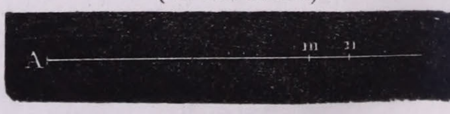
HATODIK FEJEZET.

ALKALMAZÁS A MECHANIKÁRA.

1.) Ezen alkalmazás végrehajtásánál csak azon alapelveket fogjuk igénybe venni, melyek pusztán csak a testek mozgási állapotára vonatkoznak; minthogy az előterjesztendő esetek mind a mozgás elméletéből vétettek. Itt azonban nem lesz felesleges megemlítni, hogy a következendő elmélet megértésére okvetetlen megkivántatik, hogy az olvasónak az egyensúly szabályai, illetőleg törvényei, ismeretesek legyenek; különösen pedig az erők alapos elméletével bírjon, t. i. miként összeteendők, szétbontandók az erők, és miként meghatározandó bármely esetben a müködő erők eredője; továbbá mily különbség van egy pillanatnyi és egy folytonos erő között. Hasonlóképen a súlypontok elméletének ismerete is szükséges lesz, minthogy a megemlített tárgyak mind olyanok, melyek a mozgás elméleténél is minduntalan előfordúlnak, tehát az előterjesztendő elmélet megértésére okvetetlen kivántatnak.

2.) (**A mozgás külzeléki egyenletei.**) Itt mindenekelőtt egy olyféle pontnak haladó mozgásáról lesz szó, mely pont valamely folytonos, tehát sebesítő erő hatásának van kitéve; egy ilyféle pont mozgásánál e következő okoskodás helyessége könnyen felfogható: Legyen $Am = s$ (12-dik idom) azon út, melyet valamely anyagi pont sebesítő mozgással hagyott

(12-dik idom.)



hátra bizonyos t idő alatt, ekkor az, m pontban bizonyos v sebességgel el lesz látva (el nem felejtvén azt, hogy sebesített mozgásnál, a pont sebességei mindig nőnek) és ha most azt felteszszük, hogy a pont mozgása még végtelen kicsiny dt idő alatt folytattatik, az igy leírt mn tér szinte végtelen kicsiny lesz, tehát ds által kijelölendö, a pont v sebessége azonban változatlannak tekintendő, minthogy a t végtelen kicsiny változásának, v sebességnek is csak végtelen kicsiny dv változása felel meg, s miután $v+dv=v$, a kérdéses sebesség, dt idő alatt állandónak tekinthető, s így ds tér egyenletes mozgássa hagyatván hátra, nyilván e következő egyenlet által fog adatni

$$ds=vdt, \quad \text{miből} \quad v=\frac{ds}{dt} \; \ldots\ldots \; 1);$$

mely egyenletből látni való, hogy sebesített mozgásnál a bár mely pontnak megfelelő sebesség azon külzeléki hányadossal egyenlő, melyet kapunk, ha a hátra hagyott tér külzelékét elosztjuk a megfelelő idő külzelékével.

A mi továbbá a müködő sebesítő erőnek a mértékét illeti, ez közönségesen azon sebesség szokott lenni, melyet a test az idő egysége (egy másodpercz) alatt kap, de azon feltét mellett, hogy a működő erő ez idő alatt folytonos és állandó legyen. Ezen mértéket, ha φ-nek nevezzük, e következő arányból kapjuk:

$$1 : \varphi = dt : dv, \quad \text{miből}$$

$$\varphi=\frac{dv}{dt} \; \ldots\ldots\ldots \; 2).$$

s ebből látjuk, hogy az állandó erő mértékét mindig, megkapjuk, ha az elért v sebesség külzelékét a hozzá tartozó t időnek külzelékével elosztjuk.

Ha az 1) alatti egyenletet külzeljük, lesz:

$$dv=\frac{d^2s}{dt},$$

mely érték a 2) alatti egyenletbe tétetvén, kapjuk:

$$\varphi=\frac{d^2s}{dt^2} \; \ldots\ldots\ldots \; 3),$$

miből következik, hogy az állandó erő mértéke azon második külzeléki hányadossal is egyenlő, melyet kapunk, ha a tér második külzelékét, a megfelelő idő külzelékének négyzetével elosztjuk.

Ha végre az 1) és 2) alatti egyenletekből dt külzeléket kiküszöböljük, e következő egyenletre jutunk :

$$vdv = \varphi ds \ldots\ldots 4),$$

mely egyenlet segítségével minden egyenes mozgásnak törvényei meghatározhatók, mihelyt φ szorzó v vagy s nek függvényében adatik.

3.) **(Az egyenletes mozgás.)** Ha felteszszük, hogy valamely pont egyenes vonal szerint mozog, és hogy reá semmi sebesítő erő nem hat, akkor $\varphi=0$ levén, a 2) alatti egyenletből kapjuk :

$$dv=0, \text{ következőleg } v=a,$$

azaz : a mozgó test sebessége állandó, mint azt az egyenletes mozgásnál már régóta tudjuk.

4.) **(Az egyenletesen sebesített mozgás.)** Tudván azt, hogy az egyenletesen sebesített mozgás csak állandó működéssel bíró erő által hozható létre, ha a kérdéses állandó erőnek mértékét g-vel jegyezzük, e következő egyenletnek kell állnia :

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g, \text{ miből : } \frac{d^2s}{dt}=gdt,$$

s ennek egészelése által kapjuk :

$$\frac{ds}{dt}=gt+a,$$

s ezt az 1) alatti egyenlettel összehasonlítván, lesz :

$$v=gt+a \ldots\ldots (n).$$

Továbbá az utolsó-előtti egyenletből kapjuk :

$$ds=gtdt+adt,$$

minek egészelése által e következő egyenletre jutunk :

$$s=\frac{1}{2}gt^2+at \ldots\ldots (m).$$

Az (n) és (m) alatti egyenletekben, a nyilván a mozgó test kezdő sebességét jelenti, mely ha elenyészőnek vétetik, e következő egyenletek állnak elő :

$$v=gt, \quad \text{és} \quad s=\frac{1}{2}gt^2$$

mely egyenletek által a szabad esési szabályok képviseltetnek, ha t. i. g a nehézségi erőnek sebesítése.

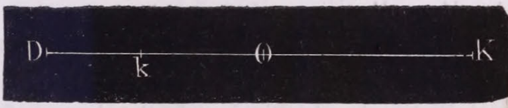
Ha az (n) és (m) alatti egyenletekben felteszszük, hogy a sebesítő erő, a kezdő a sebességgel ellenkező iránynyu, akkor a pont mozgása egyenletesen lassított lesz, és erre a mozgásra nézve áll :

$$x = a - gt, \quad \text{és} \quad s = at - \frac{1}{2}gt^2,$$

mely egyenleteket a függőlegesen felfelé hajított testeknél lehet használni.

5.) (**A lengő mozgás.**) A lengő mozgás természetének megismertetésére vegyük fel, hogy a (13-dik idom) O pontjára

(13-dik idom.)



OK irányban egy pillanatnyi erő hat ; akkor ez vele bizonyos sebességet fog közölni, melylyel a pont nyilván végtelenig fogna mozogni, ha semmiféle ellentállásra nem talál. De máskép van a dolog, ha azt teszszük fel, hogy a kérdéses pont ellentálló rugalmas szerben mozog, mert ez esetben az O-tól K felé mozgó pont sebessége folytonos fogyást fog szenvedni, miből következik, hogy sebessége OK vonalnak bizonyos pontjában lesz elenyésző. Feltévén tehát, hogy K az a pont, melyben a test sebessége elenyészik, akkor a mozgó test meg nem állhat K-nál, hanem az ellentálló szer rugalmasságánál fogva vissza, azaz O felé fog hajtatni, még pedig úgy, hogy O-hoz érkezvén ugyanazon sebességgel bírand, melylyel O-tól kiindúlt K felé ; mi által, mint könnyü belátni, képességet kap, megint O-tól D-ig lassított mozgással haladni, hol az, ha $OD = OK$, megint elveszti sebességét, és a rugalmas erő hatása által megint D-től O felé hajtatni fog ; s így világosan látjuk, hogy a mozgó pont, ezen lengő mozgást K-tól D-felé és D-től K-felé örökké folytatná, ha végre más ellentállások által O pontban nyugalomba nem hozatnék.

Látván így, hogy midőn a mozgó test O-tól K felé vagy O-tól D felé halad, a rugalmassági erő folyvást nő, feltehetjük, hogy ezen erőnek hatása, a mozgó test O-tóli távolával egyenes viszonyban van; akkor az $Ok = x$ távolságnak megfelelő rugalmassági erő $\varphi = mx$ kifejezés által kellőleg terjesztetik elő, hol m egy meghatározandó tényező.

Ez meglevén már könnyü lesz azon időnek a meghatározása, mely alatt a mozgó pont által egy lengés vitetik véghez; látván t. i. azt, hogy φ erő a hátra hagyott tér függvénye, feladatunk megfejtésére nyilván a 2-dik szám 4) alatti egyenlete szolgáland, melyben φ helyett az imént megtalált érték oly módon helyettesítendő, hogy az nemlegesen vétessék, minthogy ha x tér nő, a mozgó test sebessége fogy, áll tehát:

$$vdv = -mxdx,$$

minek egészelése adja:

$$v^2 = -mx^2 + C,$$

hol C az egészelésnek állandója, melynek meghatározására látjuk, hogy v sebesség akkor elenyészik, ha $x = OK = r$, s ennek folytán áll:

$$0 = -mr^2 + C, \text{ miből}$$

$$C = mr^2,$$

s ennek folytán:

$$v^2 = mr^2 + mx^2 = m(r^2 - x^2), \text{ s így}$$

$$v = \pm\sqrt{m(r^2 - x^2)} \; \ldots\ldots\ldots \; (q),$$

miből láthatni, hogy v-nek két értéke felel meg, az x bármely értékének, a test pályájának bármely pontja tehát, ugyanazon de ellenkező jellel biró sebességgel futtatik át, mint ez a mozgás természetéből világosan belátható. Hogy ezen sebességnek maximuma azon esetre áll be, ha $x = 0$, magából a képletből valamint az idomból is következik, e maximum tehát lesz:

$$V = \pm r\sqrt{m},$$

a minimuma pedig ezen sebességnek akkor áll be, ha $x = r$, mely esetben a test D vagy K pontban létezik, ezen sebesség pedig $v = 0$, mint azt a mozgás természete mutatja. A test tehát O ponttól K felé lassított mozgással halad K-ig, a hol sebessége elenyészik; honnan megint O felé hajtatik, de sebesített mozgással, mely alkalommal O-nál azon sebességet éri el, melynél fogva megint képes D-ig haladni s í. t.

A legfontosabb itt előforduló kérdés, azon időnek a meghatározásában áll, mely idő egy egész lengésnek véghez vitelére kivántatik; minek meghatározására, a fenebbi (q) alatti egyenletbe v-nek $\frac{ds}{dt}$ értéke tétessék, mi által ered:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{m(r^2-x^2)},$$

hol könnyü belátni, hogy x-et kellett tenni s helyébe, ebből kapjuk:

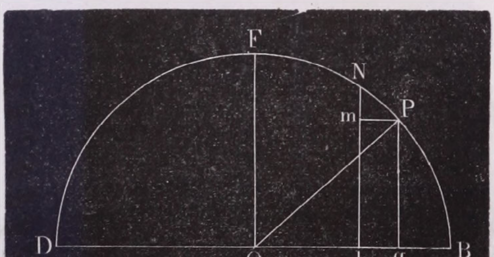
$$dt=\frac{dx}{\sqrt{m(r^2-x^2)}},$$

minek egészelése adja:

$$t=\int\frac{dx}{\sqrt{m(r^2-x^2)}}+C.$$

Hogy ez valóban egészeltessék, czélszerü lesz e következő mértani megtekintés: Legyen DB (14-dik idom) azon út, melyet a lengő test, O pontból kiindúlva ír le, és $OB=OD=r$

(14-dik idom.)



sugárral irassék le félkör; továbbá a lengő test q pontban képzeltessék; s lesz $Oq=x$, és a qP függély $=y$, valamint $OP=r$; akkor az OPy háromszögből következik:

$$y^2=r^2-x^2, \quad \text{tehát} \quad y=\sqrt{r^2-x^2},$$

mely értéket a fenebbi egyenletbe tévén, lesz:

$$t=\int\frac{dx}{y\sqrt{m}},$$

avagy inkább:

$$t=-\int\frac{dx}{y\sqrt{m}},$$

minthogy x fogy ha t nő, az időt t. i. B-től O felé számítván. Ha már most $qk=dx$, azaz ha x tér dx-el fogy, a P ponthoz tartozó $FP=s$ ív szinte $NP=ds$ mennyiséggel fog kisebbedni, s így az OPq és NPm háromszögök hasonlóságából következik :

$$OP:Pq=NP:mP,\quad \text{avagy}\quad r:y=ds:dx,$$

honnan kapjuk :

$$yds=rdx,\quad \text{tehát :}\quad \frac{dx}{y}=\frac{ds}{r},$$

mely értéket az utolsó egészletbe tévén, lesz :

$$t=-\int\frac{ds}{r\sqrt{m}}=-\frac{s}{r\sqrt{m}}+C,$$

minthogy r és m állandó mennyiségek. C állandónak a meghatározására, látjuk, hogy B pontra nézve az s ív $FB=\frac{1}{2}\pi r$ négyedet teszi, t idő pedig ezen pontra nézve elenyészik ; midőn tehát $t=0$, lesz $s=\frac{1}{2}\pi r$, s így az állandónak meghatározására áll :

$$0=-\frac{\pi r}{2r\sqrt{m}}+C,\quad \text{miből :}\quad C=\frac{\pi}{2\sqrt{m}},$$

a lengési idő teljes értéke tehát lesz :

$$t=\frac{\pi}{2\sqrt{m}}-\frac{s}{r\sqrt{m}};$$

azon időre nézve, mely alatt a lengő test B pontból kiindúlva O pontot elér, nyilván $s=0$, tehát a fél lengésre kivántató idő :

$$t=\frac{\pi}{2\sqrt{m}};$$

hogy tehát egész lengés vétessék véghez, B-től D-ig az arra kivántató idő lesz :

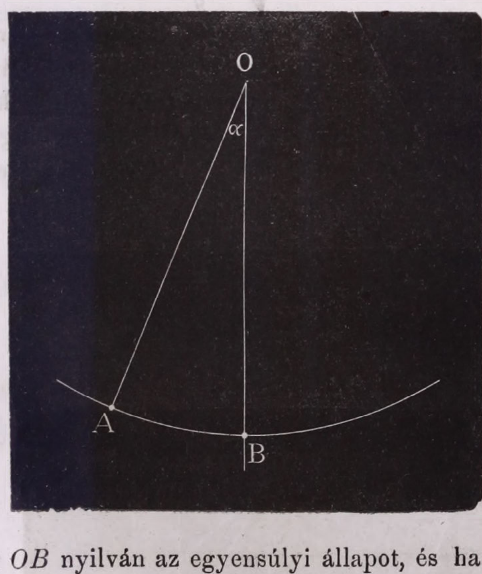
$$T=\frac{\pi}{\sqrt{m}}\ \ldots\ldots\ldots\ (\text{b}),$$

miként pedig az m tényező különféle esetekben határoztatik meg, e következő példából fogjuk látni ;

6.) **(Az inga mozgása.)** Az előrebocsátott elmélet segítségével, az ingának lengési ideje is könnyen meghatározható. Igaz ugyan, hogy az ily ingának lengési pontja nem egyenes hanem görbe vonalon mozog, de mivel az ingak eltérési szögei csak kicsinyek, (mint ezt az óráknál látjuk), az inga lengési pontja által leirt ív, minden hiba nélkül egyenesnek tekinthető; s így az előre bocsátott elmélet erre is alkalmazható lesz, mivel az inga mozgásánál müködő erő, szintén a leirt ív hosszával lesz aránylagos.

Hogy tehát az inga lengési idejét meg határozzuk, csak oda kell törekednünk, hogy a megtalált (b) alatti képletben m tényező határoztassék meg a kérdéses esetre nézve. E végre a (15-dik idom)-ban egy egyszerü inga legy en képvisel

(15-dik idom.)



ve, akkor OB nyilván az egyensúlyi állapot, és ha azt ferde OA helyzetbe viszszük át, akkor az a nehézségi erő hatása által B-felé vissza hajtatni fog; ha tehát a nehézségi g erőt A pontban függőleges vonal által állítjuk elő, és azt két mellék erőre bontjuk, akkor az A pontnak érintője irányában ható $(g\sin\alpha)$ erő, az inga mozgását hozandja létre, hol α az eltėrési szögöt jelenti; és ezen szög sinusa, azon esetre, ha az csak kicsiny, e következő hányados által fog adatni:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{x}{l},$$

ha t. i. BA tér x-nek, és az inga hossza l-nek neveztetik. Ennek folytán, ha a működő erőnek ($g\sin\alpha$) kifejezésében $\sin\alpha$-nak a megtalált értékét írjuk, φ részére e következő egyenletet fogjuk kapni:

$$\varphi = \frac{gx}{l},$$

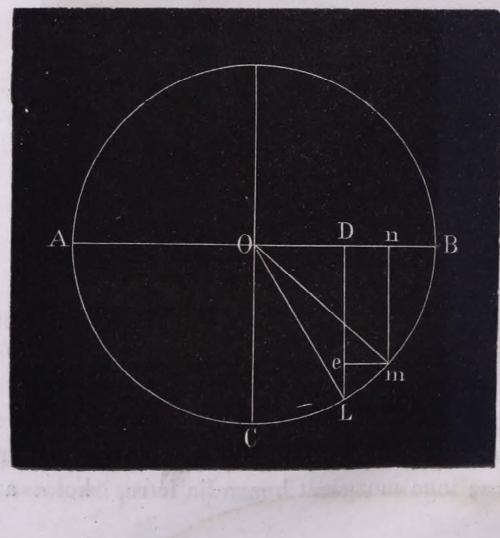
s ezt a fent előhozott $\varphi = mx$ kifejezéssel összehasonlítván látjuk, hogy $m = \frac{g}{l}$, mely értéket az előbbi szám (b) alatti egyenletébe tévén, az inga lengési idejére nézve e következő ismert értéket nyerjük:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

miből egyszersmind látjuk, hogy az előterjesztett elmélet, az inga lengési idejének a legegyszerűbb meghatározási módja.

7.) **(A lengő pont sebességeinek és szakainak a meghatározása.)** Vegyük fel e végre, hogy m tömegü anyagi pont O-tól kezdve (16-dik idom), oly sebességgel tétetik moz-

(16-dik idom.)



gásba OB irányban, hogy az képes legyen lassított mozgással B-ig haladni; továbbá legyen t azon idő, mely $OD=s$ térnek hátrahagyására kivántatik, és v legyen a mozgó pontnak D-beni sebessége; akkor $Dn=ds$ lesz azon végtelen kis tér, mely dt idő alatt fog hátra hagyatni, maga a v sebesség pedig dv fogyást fog szenvedni, úgy hogy a mozgó test n pontbani sebessége $v-dv$ által képviselendő; végre a dt idő alatt leírt tér lesz $ds=vdt$. Ha azon mozgó erő, melylyel a mozgó pont D-ben bír, φ-vel jegyeztetik, akkor az előbbiek szerint lesz $\varphi=m\frac{dv}{dt}$; mivel pedig ugyanazon erö aránylagos az $OD=s$ térrel, azt még így is szabad lesz kifejezni:

$$\varphi=mks,$$

hol k egy meghatározandó tényező, s így áll:

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=mk.s\text{, avagy: }\frac{dv}{dt}=ks,$$

mely egyenletet ds-el szorozván, lesz:

$$\frac{ds.dv}{dt}=ksds\text{; mivel pedig }\frac{ds}{dt}=v\text{, lesz még:}$$

$$vdv=k.sds\text{, miből: }\frac{vdv}{k}=sds, \quad (1)$$

mit így is irhatni:

$$\frac{vdv}{\sqrt{k}\sqrt{k}}=sds,$$

ez egyenletből pedig e következő arányt kapjuk:

$$ds:\frac{dv}{\sqrt{k}}=\frac{v}{\sqrt{k}}:s \quad (2).$$

Ez meglevén, húzassanak D és n pontokból a DL és nm függölegesek, és csináltassék

$$DL=\frac{v}{\sqrt{k}}\text{ és }nm=\frac{v-dv}{\sqrt{k}},\text{ s lesz:}$$

$$Le=DL-nm=\frac{dv}{\sqrt{k}}.$$

Végre L és m pontokat összekötvén, és megjegyezvén, hogy $Dn=em=ds$, szabad lesz a megtalált értékeket a fenebbi (2) arányba helyettesítni, mi által kapjuk:

$$em:Le=DL:OD,$$

mely arány azt mondja, hogy az ODL és Lem háromszögökben, ugyanazon szögöt bezáró oldalak arányosak, ezen háromszögöknek tehát hasonlóknak kell lenni, s így áll:

$$DLO \text{ szög} = emL, \text{ és } DOL \text{ szög} = mLe;$$

mivel továbbá:

$$emL+eLm=90, \text{ és } emL=OLD \text{ lesz } OLD+eLm=90^0,$$

azaz: OL vonal Lm-re függőlegesen áll. Ha már most az OB tér bárhány és sok részekre osztatik, minden osztási pontból pedig függőlegesek emeltetnek, és ezen függőlegeseknek oly hosszuság adatik, melyet találjuk, ha a mozgó test minden pontbani sebessége $\sqrt{k}$-val elosztatik, s végre a megnyert pontokat összekötjük: akkor egy folytonos görbe vonalt fogunk kapni, melynek az a nevezetes tulajdonsága van, hogy annak minden elemének kezdő pontját O ponttal összekötvén, ezen összeköttetési vonal, a kérdéses elem irányára függőlegesen áll, miből tehát világosan következik, hogy ezen görbe vonal nem más mint kör, még pedig azon kör, melynek sugara a lengési $OB=a$ távolával ugyanaz.

Hogy az említett görbe vonal kör, abból is következik, hogy az elemek végpontjainak O-tóli távolai mind egyenlők, mit így lehet megmutatni: Legyen $OL=x$, és $Om=x'$, akkor áll:

$$x^2=OD^2+DL^2=s^2+\frac{v^2}{k}, \text{ és}$$

$$x'^2=On^2+nm^2=(s+ds)^2+\frac{(v-dv)^2}{k},$$

kifejtvén ezen kifejezést, és azon tagokat, melyek ds-nek és dv-nek négyzeteit foglalják magukban, elhanyagolván, kapjuk:

$$x'^2=s^2+2sds+\frac{v^2}{k}-\frac{2vdv}{k},$$

ámde az előbbi 1) alatti egyenletből nyerjük:

$$\frac{2vdv}{k}=2sds,$$

minek helyettesitése adja:

$$x'^2=s^2+\frac{v^2}{k},$$

mely kifejezést x^2-nek előbbi értékével összehasonlítván, látjuk, hogy $x^2=x'^2$, tehát $x=x'$; az L és m pontok tehát egyenlő O-tóli távollal bírnak, s mivel ugyanazt bármely más két pontról is be lehet bizonyítni, kétséget nem szenved, hogy a kérdéses görbe vonal kör.

8.) Ha tehát $OB = a$ sugárral kört irunk le, és a pont mozgása B töl A-felé jár: akkor AB vonal különféle pontjaiból függőlegeseket húzván lefelé, ezen függőlegesek nyilván aránylagosak azon sebességekkel lesznek, melyekkel a mozgó pont BA vonalnak megfelelö pontjaiban bir. Azon függőlegesek pedig, melyek AB vonalnak különféle pontjaiból emeltetnek felfelé, a pont mozgásának sebességeit A-tól B-felé fogják jellemezni. A mozgó pont sebességei tehát, egyenlő O-tóli távolokban egyenlök is lesznek, csak hogy ellenkező iránynyal fognak bírni.

Mindezekből már világosan látjuk, hogy ezen mozgás törvényeinek a megismertetésére, okvetetlen két kifejezés kivántatik, melyek egyike a mozgó test bármely pontbani sebességét, másika pedig azon O-tóli távolt adja, mely tetszésszerinti t időnek megfelel, mely idő szakasz idejének is szokott neveztetni. E végre az OLD és Lem háromszögök hasonlóságából következik:

$$Lm : em = OL : LD, \quad \text{avagy} \quad Lm : ds = a : \frac{v}{\sqrt{k}}, \quad \text{miből}$$

$$Lm = \frac{ads}{v} \cdot \sqrt{k}, \quad \text{mivel pedig} \quad ds = vdt, \quad \text{tehát}$$

$$\frac{ds}{v} = dt, \quad \text{áll még} \quad Lm = adt\sqrt{k};$$

ha végre CL ív $= \varphi a$, lesz $Lm = ad\varphi$, és az utolsó egyenlet még így is írható: $ad\varphi = adt\sqrt{k}$, minek egészelése adja:

$$\varphi = t\sqrt{k}, \quad \text{mivel pedig áll:}$$

$$OD = s = asin\varphi, \quad \text{és} \quad DL = acos\varphi = \frac{v}{\sqrt{k}},$$

φ-nek értékét ide helyettesítvén, lesz:

$$s = asint\sqrt{k}, \quad \text{és} \quad v = a\sqrt{k}cost\sqrt{k};$$

és ha a mozgó pontnak O-bani sebessége $= V$, mely egyszersmind az itten elöforduló sebességek maximuma, lesz $a = \frac{V}{\sqrt{k}}$, tehát $a\sqrt{k} = V$, és az utolsó két egyenlet még igy is fog állni:

$$s = a sin t\sqrt{k}, \quad \text{és} \quad v = V . cos t \sqrt{k}.$$

Hogy még a $\sqrt{k}$ tényező is meghatároztassék legyen T egy egész lengésnek ideje, mely alatt tehát a mozgó test B-től A-ig és A-tól megint B-ig visszatér, vagy mely idő alatt a test helyzetének bármely pontjából, ugyanazon ponthoz viszszatér; akkor $\frac{T}{4}$ lesz nyilván azon idő, mely alatt $OB = a$ tér hagyatik hátra, és mivel az ezen térhez tartozó ív $\varphi = \frac{\pi}{2}$, állni fog szintén: $\frac{\pi}{2} = \frac{T}{4}\sqrt{k}$, miből:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}, \quad \text{következőleg} \quad \sqrt{k} = \frac{2\pi}{T},$$

mely értéket a fenebbi két képletbe helyettesítvén, lesz:

$$(1.) \quad s = a sin \frac{2\pi t}{T}, \quad \text{és} \quad v = V . cos \frac{2\pi t}{T},$$

mely egyenletek azonban csak azon esetre állnak, ha a lengési időt azon pillanattól számítjuk, melyben a lengő test O pontban fordúl elő. Ha tehát a lengési időt netalán E pontból akarnánk számítni, akkor D pontban fordúlván elő a mozgó test, a megfelelő $BL = 90 - \varphi$ ívet számításba kell hozni, mi által az utolsó két képlet e következőbe megyen át:

$$(2.) \quad s = a cos \frac{2\pi t}{T}, \quad \text{és} \quad v = V sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Ha végre valamely phasisnak ideje $\left(\frac{T}{2} + t\right)$ volna, akkor az utolsó két egyenletből kapjuk:

$$s = a . cos\left(\pi + \frac{2\pi t}{T}\right) = -a cos \frac{2\pi t}{T}, \quad \text{és}$$

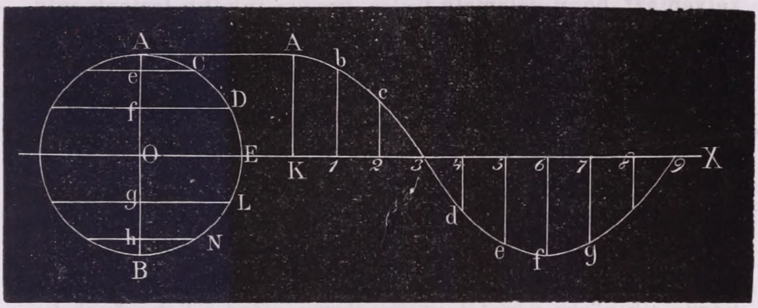
$$v = V . sin\left(\pi + \frac{2\pi t}{T}\right) = -V sin \frac{2\pi t}{T},$$

miből látjuk, hogy a sebesség valamint a hátra hagyott tér is ugyanaz, de ellenkező iránnyal bír.

Ha a fenebbi (2) alatti egyenlet görbe vonal egyenletének vétetik, oly módon, hogy benne t a metszékeket, tehát s a rendezőket jelenti: akkor az ezen egyenlet szerint szerkesztett görbe vonal rezgési görbének (Schwingungs Curve) mondatik, szerkesztése pedig e következő módon kieszközöltetik.

Legyen AB (17-dik idom) azon tér, melyet egy rezgő

(17-dik idom.)



test A-tól B felé és azután B-től A felé hagy hátra, tehát O a test úgynevezett egyensúlyi helyzete; az előbbiek szerint a test az AEB kör kerületét ugyanazon idő alatt futja át, mely idő alatt egy egész rezgés vitetik véghez, csak hogy a körbeni mozgás egyenletes, a test rezgése pedig egyenlőtlen lesz; mert láttuk, hogy a rezgő test sebességei eC, fD, OE . . . , . függőlegesekkel egyenes viszonyban vannak. Ha tehát AB-re függőleges OX húzatik, melynek a közép O ponton keresztül kell mennie, és a kör kerülete 12 egyenlő részre osztva képzeltetik: akkor ezen részek mindegyike $\frac{T}{12}$ idő alatt fog átfutatni, ha t. i. T az egész rezgési időt jelenti. Feltévén most, hogy K a metszékek kezdő pontja, ha K-tól X felé 12 egyenlő $K1$, 12, 23, 34 . . . . . rész tétetik át, és most az említett képlet szerint $K1$, $K2$, $K3$ . . . . metszékeknek megfelelő rendezői kiszámíttatnak, azoknak e következő sorát fogjuk kapni:

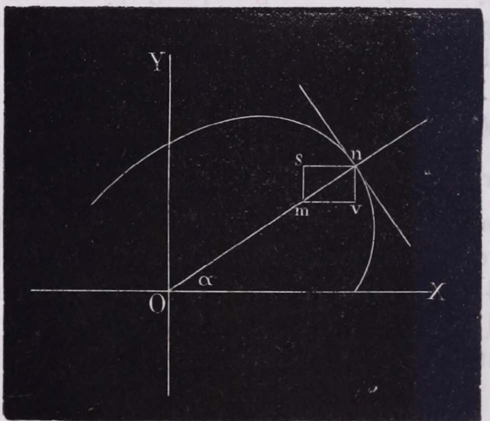
K-ban $KA = a\cos 0$
I-ben $1b = a\cos 30^0$
2-ben $2c = a\cos 60^0$
3-ban $3 = a\cos 90^0 = 0$
4-ben $4d = a\cos 120^0$
5-ben $5e = a\cos 150^0$ s így tovább;

akkor ezen függőlegesek végpontjait összekötvén, nyerni fogjuk az $Abcdefg$. . . . görbe vonalt, mely rezgési görbének mondatik. Még itt szükségképen megemlítendő, hogy a rezgő pont sebességeinek maximuma, melynek O pontban van helye, a rezgés benségének mondatik.

9.) **(A görbe vonalu mozgásnak alapképletei.)** Képzelvén azt, hogy valamely testre, vagyis inkább testnek súlypontjára két erő hat, melyek egyike pillanatnyi, másika pedig állandó, és bizonyos meghatározott álló pont felé van irányozva: akkor az első erőnek hatásánál fogva, a test bizonyos változatlan sebességet kap, melynél fogva az egyenes vonalszerint végtelenig is haladna, ha a második állandó erő nem volna, mely szögöt képezvén az első erővel, a mozgó pontot egyenes irányától folyvást elvonja, s így a mozgó pontot kényszeríti görbe vonal leirására, mely görbe vonal szükségképen sík görbe vonal lesz, minthogy mind a két erönek hatása egy ugyanazon síkon történik.

Egy ilyen pont mozgási szabályainak a meghatározására, legyen O azon nevezetes pont (18-dik idom), mely felé

(18-dik idom.)



folyvást törekszik az állandó erőnek iránya, n a mozgó pont, és OX és OY azon épszögü tengelyrendszer, melyre az n pontnak fekvését vonatkoztatjuk; lesz nyilván O egyszersmind az összrendezők kezdő-pontja; s már könnyü belátni, hogy ha az állandó vonzó erőnek irányát nO, magát az erőt pedig $nm = \varphi$ vonal által képviseljük, akkor ezen erő mindig, a felvett tengelyek szerint két mellék erőre bontható, melyek egyike $=\varphi \cos\alpha$, másika pedig $\varphi \sin\alpha$, hol α azon szöget jelenti, melyet az $On=r$ vezérsugár az OX tengelylyel képez.

Továbbá az n pontnak összrendezőit x és y által jelölvén; minthogy x és y egyszersmind azon útak is, melyek OX és OY tengelyek szerint bizonyos t idő alatt hagyatnak hátra, az előbbiek folytán azon erők, melyek ezen tengelyek szerint hatnak, $\frac{d^2x}{dt^2}$ és $\frac{d^2y}{dt^2}$ kifejezések által fognak adatni, s így e következő egyenleteket kapjuk:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi \cos\alpha, \quad \text{és} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=p \sin\alpha,$$

mely kifejezések, ha bennök φ bármiféle módon adva van, és t időt kiküszöböljük, a leírt görbe vonal egyenletének a meghatározására szolgálnak, minthogy úgy, egy x és y összrendezők közötti egyenletet fogunk kapni, mely nem egyéb, mint a görbe vonal keresett egyenlete.

Hogy ezen egyenleteket egy pár különleges esetre alkalmazzuk, tegyük fel először, hogy a mozgó pontra semmi állandó erő nem hat, akkor lesz $\varphi=0$, tehát

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \text{és} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

melyekből első egészelés által kapjuk:

$$\frac{dx}{dt}=a, \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dt}=b, \text{ s innen:}$$

$$dx=adt, \text{ és } dy=bdt, \text{ következőleg}$$

$$x=at+c, \quad \text{és} \quad y=bt+k,$$

hol c és k a második egészelésnek állandói. Ha ezen egyenletekből t időt eltávolítjuk, lesz:

$$t=\frac{x-c}{a}, \quad \text{tehát: } y=\frac{b(x-c)}{a}+k, \text{ avagy:}$$

$$y=\frac{bx}{a}+\frac{ak-bc}{a},$$

mely egyenletben ha rövidség okáért

$$\frac{b}{a}=A, \text{ és } \frac{ak-bc}{a}=B \text{ tétetik, áll:}$$

$$y=Ax+B,$$

mely egyenlet nyilván egyenes vonalhoz tartozik, a kérdéses pont tehát egyenes vonalon fog mozogni, mint az magától értetődik, ha az állandó erő nem hat reá.

Tegyük fel másodszor, hogy azon út meghatározandó, melyet egy ferdén hajított test fog leírni. Ha ezen feladatnak a megfejtésére, egy fekmentes vonal metszéki, egy függőleges vonal pedig rendezői tengelynek vétetik: akkor világos, hogy a metszéki tengely szerint semmi állandó erő nem hat, a rendezői tengely szerint pedig, az állandó nehézségi erő, de nemleges irányban működik, mely körülmény e következő két egyenletre vezet:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \text{és} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g,$$

mely egyenletek első egészelése ezt adja:

$$\frac{dx}{dt}=a, \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dt}=-gt+b,$$

ezekből továbbá következik:

$$dx=adt, \quad \text{és} \quad dy=-gtdt+bdt,$$

és a második egészelés végbevitele után:

$$x=at+n, \quad \text{és} \quad y=bt-\frac{1}{2}gt^2+m,$$

hol az n és m állandók elenyészők, ha azt teszszük fel, hogy a mozgás az összrendezők kezdőpontjában kezdődik, s így rővidebben áll:

$$x=at, \quad \text{és} \quad y=bt-\frac{1}{2}gt^2.$$

Még hátra van t-nek az eltávolítása, mi végre áll:

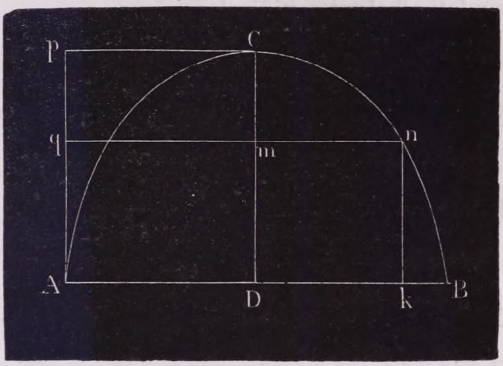
$$t=\frac{x}{a},$$

mely érték helyettesítése ezt adja:

$$\alpha) \ldots\ldots y=\frac{bx}{a}-\frac{gx^2}{2a^2},$$

s ez a görbe vonal keresett egyenlete, mely, mint látjuk, a hajtalékhoz tartozik; a ferdén hajított test tehát, ha a lég ellentállása tekintetbe nem vétetik, hajtalékot irand le. Mivel azonban ezen utolsó egyenletnek nincs hasonlósága a közönséges hajtalék egyenletével, minek oka a tengelyek fekvésében keresendő: jó lesz az ezen egyenletben előforduló összrendezőket átalakítni úgy, hogy az új metszéki tengely, a görbe vonal legmagasabb pontján azaz csúcsán menjen keresztül mi végre legyen ACB (19-dik idom) a hajított test pályája,

(19-dik idom.)



tehát AB és Ap azon tengelyek, melyekre nézve a fenebbi egyenlet áll; CD és Cp pedig legyenek az új tengelyek, melyekre az átalakítás történendő, s melyek a görbe vonal C csúcsán mennek keresztül; akkor egy tetszésszerinti n pontot vevén föl, lesz $Cm=x'$ és $mn=y'$, mint az n pontnak új összrendezői. Feltévén most, hogy a ferdén hajított testnek kezdő sebessége $=u$, azon szög pedig, melyet a hajítási irány a látkörrel képez $=\alpha$, akkor u sebesség mindig két mellék sebességre bontható, melyek egyike fekmentes $=u\cos\alpha$ másika függőleges $=u\sin\alpha=c$, s ezeknek folytán a test függőleges sebessége t idő után $v=c-gt$, és ugyanazon időnek megfelelő fekmentes út $x=at$. Ha már most ezen időt akarnók meghatározni, mely alatt a hajított test pályájának legmagasabb pontját éri el, akkor e pontban $v=0$ levén, áll: $c-gt=0$, tehát: $t=\frac{c}{g}$. Ezek meglevén, legyen $Dm=y$ mint $AD=x$ metszéknek megfelelő rendező, lesz $DC=y+x'$ azon magasság, mely a függőleges c sebességnek megfelel, áll tehát:

$$y+x'=\frac{c^2}{2g},\quad \text{miből}\quad y=\frac{c^2}{2g}-x'.$$

Továbbá az n ponthoz tartozó metszék $=AK=AE+mn$ $=AD+y'$, AD pedig a hajítási távolság levén, nyilván $\frac{c}{g}\cdot a$ kifejezés által adandó, s így áll:

$$x = y' + \frac{ac}{g}.$$

Ha már most x-nek és y-nak megtalált értékeit a fenebbi α) alatti egyenletbe helyettesítjük, lesz :

$$\frac{c^2}{2g} - x' = \frac{c}{a}\left(y' + \frac{ac}{g}\right) - \frac{g}{2a^2}\left(y' + \frac{ac}{g}\right)^2,$$

honnan a kijelentett műtételek végbevitele után kapjuk :

$$\frac{c^2}{2g} - x' = \frac{cy'}{a} + \frac{c^2}{g} - \frac{gy'^2}{2a^2} - \frac{cy'}{a} - \frac{c^2}{2g},$$

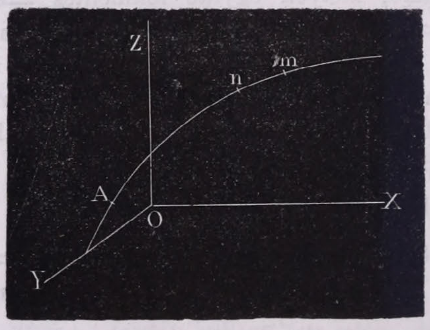
miből a kellő rövidítések megtörténtével lesz :

$$-x' = -\frac{gy'^2}{2a^2}, \text{ s ebből } y'^2 = \frac{2a^2}{g}x',$$

mely egyenlet nyilván azon hajtalékhoz tartozik, melynek góczhúrja $= \frac{2a^2}{g}$.

10.) **(A térbeni mozgás általános egyelete.)** Ha valamely pontot a térben mozogni képzelünk, ezen pontnak a fekvése tehát egy három tengelyü OX, OY és OZ rendszerre vonatkozik, akkor itt e következő kérdés megfejtése merűl föl : Ha a mozgó A pontra (20-dik idom) az említett három

(20-dik idom.)



engely szerint ugyanannyi erő hat, és pedig X erő OX szerint, Y erő OY szerint és Z erő OZ szerint, annak valódi n pontbani sebességét meghatározni. Vegyük föl e végre, hogy az A pont bizonyos t idő alatt $An = s$ útat ír le; ha ezen pontnak a mozgása még végtelen kis dt idő alatt tart, akkor ez alatt a végtelen kis $nm = ds$ tér azon sebességgel fog leiratni, melylyel az n pontban bírt. Ha a mozgó pontnak n pontbani összrendezői x, y és z által jegyeztetnek, akkor dx, dy és dz mennyiségek, azon végtelen kis téglánynak a méretei lesznek, melynek átlója $nm = ds$ által képviseltetik, minthogy dx, dy és dz mennyiségek nem egyebet, mint ds-nek a vetületeit a három tengelyre állítják elő. Mindezekből egyszersmind következik, hogy midőn a kérdéses pont bizonyos irányban ds útat ír le, az nyilván dx útat OX tengely szerint, dy útat OY tengely szerint, és dz útat OZ tengely szerint hagy hátra, a pont e három iránybani sebessége tehát:

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, és $\frac{dz}{dt}$ kifejezések által fog adatni.

Magok az X, Y és Z erők pedig a második szám 3) alatti egyenlete szerint, e következő kifejezések által fognak adatni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \text{ és } \frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

mely egyenletek elsejét $2dx$-el, a másikát $2dy$-al, és a harmadikát $2dz$-vel szorozván, és a kijövő eredményeket összeadván, lesz:

$$\frac{2dxd^2x + 2dyd^2y + 2dzd^2z}{dt^2} = 2Xdx + 2Ydy + 2Zdz.$$

Ezen egyenlet bal részének a számlálóját figyelmesen megtekintvén, könnyü belátni, hogy az nem egyéb, mint a

$(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ összeg külzeléke;

mivel pedig tudjuk, hogy áll:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

az utóbbi egyenlet nyilván még így is írható:

$$d.\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right) = 2(Xdx + Ydy + Zdz),$$

mely egyenlet egészelése által kapjuk:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) + C;$$

ámde tudjuk, hogy $\frac{ds}{dt}$ hányados nem egyéb, mint a mozgó pont sebessége, melyet v-nek nevezvén, áll:

$$\text{(m)} \ldots\ldots v^2 = 2\int (Xdx + Ydy + Zdz) + C,$$

mely egyenlet segítségével (ha csak annak egészelése lehetséges) mindig meghatározható azon sebesség, melylyel a mozgó pont ott bír, a hol annak összrendezői x, y és z által vannak kifejezve. Ezen egyenlet egészelése által nyilván e következő eredményre kell jutnunk:

$$v^2 = f(x, y, z) + C,$$

ez pedig nyilván nem lehet egyéb, mint a mozgó pont pályájának az egyenlete. C állandónak a meghatározására az kivántatik, hogy a mozgó pontnak valamely pontbani sebessége ismeretes legyen, mely sebesség V-vel jegyeztetvén, lesz:

$$V^2 = f(a, b, c) + C,$$

ha t. i. a pont összrendezői azon pontban, melyben az V sebességgel bír, a, b és c által jegyeztetnek, következik tehát:

$$C = V^2 - f(a, b, c),$$

mely értéknek a helyettesítése ezt adja:

$$v^2 - V^2 = f(x, y, z) - f(a, b, c).$$

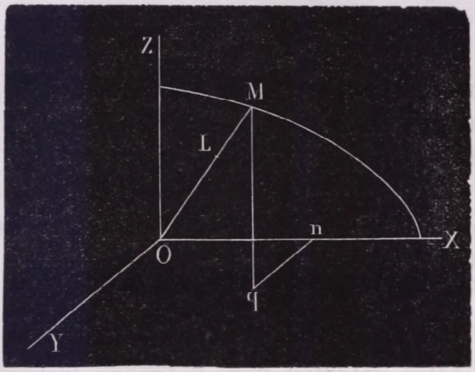
Lássuk most egy olyféle esetnek a tárgyalását, melyben a fen talált m) alatti egyenlet egészelhető.

11.) (**A felületek elve**) A fen említett m) alatti egyenlet mindig egészelhető azon esetre, ha a mozgó pont egy olyféle vonzó erőnek van kitéve, melynek törekvése folyvást bizonyos álló pont felé van irányozva, mert ez esetben minden a mozgó pontra ható erőknek az eredője e ponton megy keresztül.

Legyen e végre M a mozgó pont (21-dik idom), ZMX a pályájának egy része, és O az említett álló pont, mely felé az M pont állandóan húzatik; lesz $OM = r$ annak vezérsugara, és egyszersmind azon három erő eredőjének az iránya, melyek OX, OY és OZ tengelyek szerint hatnak, Legyenek továbbá α, β és γ azon szögök, melyeket az OM vezérsugár, tehát az R eredő is a felvett három tengelylyel képez; akkor szabad lesz az R eredőt tetszésszerinti OL vonallal képviseltetni, és az X, Y és Z erők az ismert okból e következő egyenletek által fognak adatni:

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\cos\beta, \quad \text{és} \quad Z = R\cos\gamma.$$

(21-dik idom.)



Feltévén most, hogy $On=x$, $nq=y$ és $Mq=z$ az M pont összrendezői, akkor hasonló módon áll szintén :

$$x=r\cos\alpha\,,\quad y=r\cos\beta \quad \text{és} \quad z=r\cos\gamma\,,$$

mely egyenletek osztásából kapjuk :

$$\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \frac{y}{z}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \quad \text{és} \quad \frac{z}{x}=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha};$$

a fent előhozott három egyenletből pedig ezt nyerjük :

$$\frac{X}{Y}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \frac{Y}{Z}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \quad \text{és} \quad \frac{Z}{X}=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha},$$

mely egyenletek két rendszerének összehasonlításából ered :

$$\frac{X}{Y}=\frac{x}{y},\quad \frac{Y}{Z}=\frac{y}{z} \quad \text{és} \quad \frac{Z}{X}=\frac{z}{x},$$

honnan e következő egyenleteket származtatjuk :

$$yX-xY=0\,,\quad zY-yZ=0 \quad \text{és} \quad xZ-zX=0\,,$$

mely egyenletekben ha X, Y és Z helyébe az előbbi számban megtalált értékeket tesszük, állni fog :

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}=0 \quad \text{és}$$

$$x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

mely egyenletek elseje így is írható :

$$y\frac{d^2x}{dt}-x\frac{d^2y}{dt}=0;$$

ezt pedig t szerint egészelvén, lesz :

$$y\int\frac{d^2x}{dt}-x\int\frac{d^2y}{dt}=C\text{, avagy :}$$

$$\frac{ydx-xdy}{dt}=C.$$

Hasonlóképen járván el a többi két egyenlettel is, e következő három kifejezésre jutunk :

$$ydx-xdy=Cdt\text{, } zdy-ydz=C'dt\text{, és}$$
$$xdz-zdx=C''dt\text{;}$$

mely egyenletek elsejét z-vel, a másikát x-el és a harmadikát y-al szorozván, s azután összeadván, kapjuk :

$$0=(Cz+C'x+C''y)dt\text{, avagy :}$$
$$Cz+C'x+C''y=0\text{;}$$

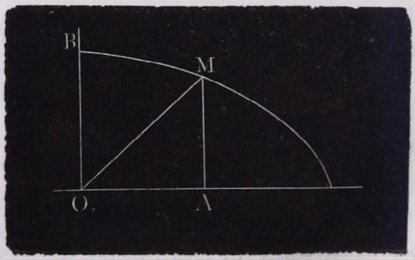
s ezen nevezetes egyenlet, mint a felsőbb mértanból tudva van, egy a térben fekvő síknak felel meg, mely sík az álló O ponton megy keresztül; honnan tehát világosan következtethetjük, hogy a kérdéses pont mindig egy sík görbe vonalán mozog, mely síkot ha az XY síkba helyezzük, lesz $Z=z=0$, és a feladatnak megfejtése csak e következő egyenletnek egészelésétől fog függni :

$$ydx-xdy=Cdt\text{, következőleg}$$

$$1.)\quad \int ydx-\int xdy=Ct+c'\text{;}$$

a mi az ydx kifejezést illeti, erről tudjuk, hogy ez egy görbe vonal által bezárt területnek a külzeléke, mely terület ha az $x=0$ és $x=OA$ (22-dik idom) metszékek között vétetik, akkor az $\int ydx$ kifejezés az $OAMB$ területet fogja képviselni;

(22-dik idom.)



mely területből az $OMA=\frac{xy}{2}$ területet kivonván, az OMB kivágásnak a területét fogjuk nyerni, s állni fog :

$$OMB \text{ kivágás } = \int ydx - \frac{xy}{2},$$

mely egyenlet külzelése által ezt kapjuk :

$$d.(OMB \text{ kivágás}) = \frac{ydx - xdy}{2},$$

s ezen egyenletnek új egészelése által ered :

$$2(OMB \text{ kivágás}) = \int ydx - \int xdy,$$

ezt pedig az előbbi 1) alatti egyenlettel összehasonlítván, lesz :

$$2(OMB \text{ kivágás}) = Ct + C';$$

ha pedig $t=0$ értékre nézve a kivágás területe is elenyésző volna, akkor $C'=0$ miatt áll még :

$$2(OMB \text{ kivágás}) = Ct,$$

végre C állandót $2A$-val felcserélvén, lesz:

$$(OMB \text{ kivágás}) = At;$$

mely nevezetes eredményből láthatni, hogy valahányszor egy álló pont felé vont test, görbe vonalt ír le, akkor az általa leirt OMB kivágásnak a területe a mozgási idővel mindig egyenes viszonyban áll, mely nevezetes tulajdonság a területek elvének szokott neveztetni. Ez elvben a híres Kepler szabályainak egyike is foglaltatik, mely szerint a nap körül mozgó égi testek vezérsugarai szintén az időkkel aránylagos területeket súrolnak, hogy pedig ezen testek mind a nap középpontja felé húzatnak, mindenki előtt ismeretes tény.

A BOLYGÓK KERÜLÉKENI MOZGÁSÁNAK ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

12.) Ezen nagy érdekü feladványnak a megfejtése kétféle szempontból felfogható, még pedig (1-ször) ha feltesszük, hogy az említett mozgás szabályai adatnak, s ennek folytán meghatározandó volna azon erő, mely szükséges ilyen mozgás létre hozására; vagy 2-szor adva van azon erő, mely által a bolygó pályájában megtartatik, meghatározandók a mozgás szabályai.

Itten helyesebbnek kell tartani azon feloldási módot, mely szerint a mozgás szabályai adatnak, és meghatározandó azon erő, mely ezen mozgás létre-hozására kivántatik, annál inkább, minthogy ismeretes előttünk, hogy a bolygók mozgási szabályai már a 16 dik században Kepler János híres csillagász által fel valának fedezve; ezen szabályok e következők :

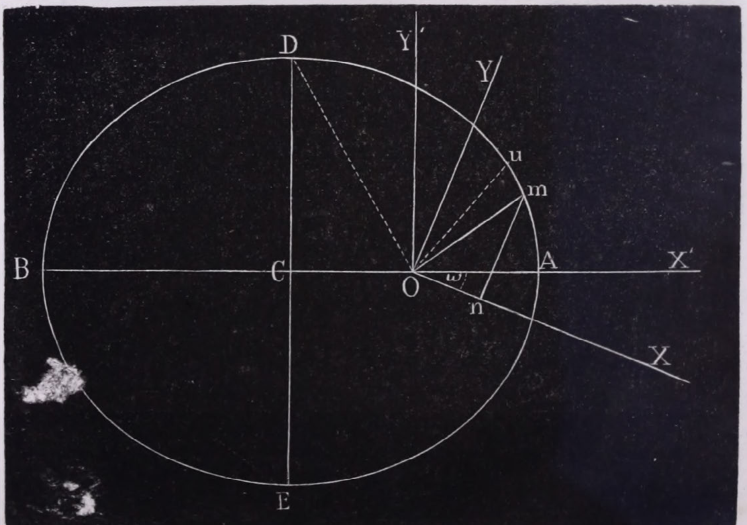
I.) A bolygók sík görbe vonalokat írnak le a nap körül, és a vezér sugarak az időkkel aránylagos felületeket súrolnak.

II.) A bolygók pályái kerülékek, melyeknek egyik gyupontjában van a nap.

III.) A keringési idők négyzetei úgy vannak egymáshoz, mint a nagyobb fél-tengelyek köbei. Ez egyszersmind a legfontosabb szabály.

13.) Ismervén így a bolygók mozgási szabályait, legyen *ADBE* (23-dik idom) azon korülék, melyet va-

(23-dik idom.)



lamely bolygó ír le a nap körül, O pedig legyen azon pont, melyben a nap vagyis inkább a nap súlypontja van, egy tetszésszerinti m pontban pedig a bolygó súlypontja képzelendő; akkor $Om=r$ egyenes a bolygó m pontbani vezérsugarának tekintendő, melynek iránya azon erőnek irányával esik össze, melylyel a nap a bolygóra hat, s mely által az megtartatik pályájában.

Továbbá az OX és OY, épszög alatt egymást metsző egyenesek, azon tengelyrendszert terjeszszék elő, melyre a bolygó súlypontjának fekvése vonatkozik, minek folytán az $On=x$ és $mn=y$ vonalak, a bolygó súlypontjának összrendezői lesznek. Az $mOX=v$ szög nyilván az, melyet a vezérsugár a metszéki tengelylyel képez; azon szög pedig, melyet a kerülék nagyobbik tengelye a metszéki tengelylyel képez, w-nak neveztessék. Végre az elemző mértan alapelveiből ismeretes előttünk, hogy $OC=ae$ a kerülék külpontisága, ha t. i. a fél nagyobbik tengely $CA=a$, következőleg a bolygó legkisebb naptóli távola lesz $OA=a-ae=a(1-e)$ mely távol napközelének is szokott hivatni (Perihelium), s így egyszersmind látjuk, hogy $OB=a+ae=a(1+e)$ a bolygó naptóli legnagyobb távola, mely naptávolnak (Aphelium) is szokott neveztetni; mindezekből tehát világosan következik, hogy $DO=CA$ a bolygó közép távolának nevezendő. Még megemlítendő, hogy $mOX=v$ szög a bolygó hosszuságának mondatik, az OX tengely tehát az éjnapegyen pont felé, van irányozva, mivel a hosszuságok az egen ezen pontból számíttatnak; az w szög tehát az A pontnak hosszuságát terjeszti elő, az $mOA=v-w$ szögöt illetőleg pedig, az nagy fontosságu a csillagászatban, és valódi rendhíjának (Anomalia vera) neveztetik.

14.) Azon feltét alatt, hogy a bolygó qm útja t idő alatt hagyatott hátra, mely útnak tehát v szög felel meg, vegyük föl, hogy a bolygó mozgása még végtelen kis dt idő alatt tart, akkor v szög is dv külzelékével fog nőni, és az ezen idő alatt súrolt uOm felület nyilván $=\frac{1}{2}r^2dv$ lesz; ha tehát c által azon felületnek kettőzetét jelentjük, melyet a vezér sugár az idő egysége alatt súrol, akkor dt idő alatt nyilván cdt felület fog leiratni, és e következő egyenletnek kell állnia:

$$1)\quad r^2dv=cdt, \quad \text{miből} \quad dt=\frac{r^2dv}{c}.$$

Feltévén továbbá, hogy R azon vonzó erő, mely mO irányban hatván, a bolygót pályájában megtartja, egyszersmind pedig ezen erőnek nagyságát mO vonal által képviselvén, akkor ez nyilván OX és OY tengelyek szerint két mellék erőre bontható, melyek egyike $mn=Rsinv$, másika pedig $=Ov=Rcosv$, mely egyenletekből czélszerü lesz a háromszögtani függvények kiküszöbölése, mi végre az Omn háromszögből ezt kapjuk:

$$sinv=\frac{y}{r}, \quad \text{és} \quad cosv=\frac{x}{r},$$

mely két érték helyettesítése által, e következő két, az m pont összrendezői szerint ható erő áll elő:

$$mn=R\frac{y}{r}, \quad \text{és} \quad On=\frac{x}{r}R,$$

látjuk azonban, hogy ezen két erő, minthogy mO és nO irányban hatnak, m pontnak összrendezőit kisebbítni törekszenek. Ha tehát ezen erők mértékét számításba hozni akarnók oly módon, mint a 3-dik szám 3) alatti egyenlet tanitja, akkor e következő két egyenlet áll elő:

$$2)\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-R\frac{x}{r}, \quad \text{és} \quad 3)\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-R\frac{y}{r},$$

mely egyenletek elsejét $2dx$-el, másikát $2dy$-al szorozván, e következő eredményre jutunk:

$$\frac{2dxd^2x}{dt^2}+\frac{2dyd^2y}{dt^2}=-\frac{R}{r}(2xdx+2ydy),$$

ha t. i. a mondott szorzás megtörténte után az egyenletek összeadatnak. Ezen egyenlet, könnyebb egészelése végett, még így is írható:

$$d\left(\frac{dx^2}{dt^2}\right)+d.\left(\frac{dy^2}{dt^2}\right)=-\frac{R}{r}(2xdx+2ydy).$$

Mivel továbbá az Omn háromszögből nyerjük:

$$x^2+y^2=r^2, \quad \text{következőleg} \quad 2xdx+2ydy=2rdr,$$

ennek helyettesitése által az előbbi egyenlet e következőbe megy át:

$$d.\left(\frac{dx^2}{dt^2}\right)+d\cdot\left(\frac{dy^2}{dt^2}\right)=-2Rdr,$$

s ezen egyenlet egészelése által ezt kapjuk :

$$4)\quad \frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=b-2\int Rdr,$$

hol b az egészelésnek tetszéss zerinti állandója, mely,mint később látni fogjuk, nagy fontosságu.

Hogy az előttünk álló egyenletből R-nek értékét meg lehessen találni, okvetetlen szükséges lesz, hogy ezen egyenlet bal része szintén sark-összrendezők által fejeztessék ki, mi végre nyilván áll :

$$x=rcosv, \text{ és } y=rsinv,$$

s ezen egyenletek külzelése által ezt kapjuk :

$$dx=drcosv-rdvsinv, \text{ és}$$
$$dy=drsinv+rdvcosv, \text{ következőleg :}$$
$$dx^2=dr^2cos^2v-2rdrdvsinvcosv+r^2dv^2sin^2v, \text{ és}$$
$$dy^2=dr^2sin^2v+2rdrdvsinvcosv+r^2dv^2cos^2v,$$

ezen két egyenlet összeadása által pedig ered :

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2dv^2;$$

s ha ezt, és dt nek az 1) alatti egyenletből vett értéket a fenebbi 4) alatti egyenletbe helyettesítjük, lesz :

$$5)\quad \frac{c^2}{r^4}\frac{dr^2}{dv^2}+\frac{c^2}{r^2}=b-2\int Rdr.$$

Ezen egyenlet további tárgyalására szükséges lesz, a kerülék sark-egyenletét tekintetbe venni, mi végre az elemző mértanból tudjuk, hogy a kerülék sarkegyenlete :

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+ecos\varphi},$$

hol φ azon szög, melyet a vezér sugár a sark-tengelylyel képez, mely a kerülék nagyobbik tengelyével összeesik ; esetünkben azonban, mint az idomból látjuk, ezen szög $(v-w)$ különbség által fejeztetik ki, s így az általunk használandó sark-egyenlet ez lesz :

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+ecos(v-w)},$$

melynek megfordított értéke így erjeszthető elő :

$$6)\quad \frac{1}{r}=\frac{1+ecos(v-w)}{a(1-e^2)};$$

s ennek külzelése által kapjuk :

$$\frac{dr}{r^2dv}=\frac{esin(v-w)}{a(1-e^2)},$$

mely egyenletet négyzetre emelvén, kapjuk :

$$7)\quad \frac{dr^2}{r^4dv^2}=\frac{e^2sin^2(v-w)}{a^2(1-e^2)^2},$$

és ha a *sinus* négyzete helyébe az ismert érték tétetik, ezen egyenlet e következőbe megyen át :

$$8.)\quad \frac{dr^2}{r^4dv^2}=\frac{e^2}{a^2(1-e^2)^2}-\frac{e^2cos^2(v-w)}{a^2(1-e^2)^2}.$$

A fenebbi 6) alatti egyenletből könnyü módon ezt nyerjük

$$ecos(v-w)=\frac{a(1-e^2)}{r}-1, \text{ következőleg}$$

$$e^2cos^2(v-w)=1-\frac{2a(1-e^2)}{r}+\frac{a^2(1-e^2)^2}{r^2},$$

honnan ezt találjuk :

$$\frac{e^2cos^2(v-w)}{a^2(1-e^2)^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{2}{ra(1-e^2)}+\frac{1}{a^2(1-e^2)^2},$$

ezen értéket pedig, ha a 7) alatti egyenletbe helyettesítjük, e következő eredményre jutunk :

$$\frac{dr^2}{r^4dv^2}=\frac{e^2}{a^2(1-e^2)^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{2}{ra(1-e^2)}-\frac{1}{a^2(1-e^2)^2}.$$

Végre ha ezen egyenletnek mind két részét c^2-vel szorozzuk, és a nyert eredményt az 5) alatti egyenletbe helyettesítjük, lesz :

$$\frac{2c^2}{ra(1-e^2)}-\frac{c^2}{a^2(1-e^2)}=b-2\int Rdr,$$

mely egyenlet figyelmes megtekintéséből látjuk, hogy benne csak r fordúlelő mint változó mennyiség, ezen egyenlet külzelése által tehát, e következő nevezetes eredményre jutunk :

$$\frac{c^2dr}{ar^2(1-e^2)}=Rdr, \text{ honnan : } R=\frac{c^2}{ar^2(1-e^2)},$$

és ha rövidség okáért tétetik :

$$\frac{c^2}{a(1-e^2)}=\mu, \text{ lesz még :}$$

$$8)\quad R=\frac{\mu}{r^2},$$

mely egyenlet nyilván azt mondja, hogy az R erő, a bolygó naptóli távolságának négyzetével fordított viszonyban áll, ezen egyenlet által tehát világosan fejeztetik ki azon törvény, mely szerint a bolygókra hat a nap vonzó ereje, azon bolygó tehát, melynek a naptóli távola 2-szer vagy 3-szor nagyobb, 4-szer vagy 9-szer kisebb vonzó erőnek van kitéve; azért is az úgynevezett külső bolygók sokkal kisebb sebességgel mozognak mint a belsők, mi a keringési időből könnyen meg lehet magyarázni. A mi a fenebbi egyenletben előforduló μ-nek értékét illeti, ennek meghatározására csak $r=1$ teendő, mi által lesz $R=\mu$, azaz μ nem egyéb, mint az egységül vett távolságnak megfelelő vonzó erő, mely tehát minden bolygóra nézve állandó.

15.) Az eddig előadottak segítségével igen könnyü lesz, a híres Kepler harmadik és legfontosabb szabályának a lehozása; legyen t. i. T valamely bolygónak egész keringési ideje, akkor a fenebbi számításokban behozott c-nek értékét tekintetbe vevén, lesz cT azon területnek kettözete, melyet a bolygó egy keringés alatt súrolt; mivel pedig a súrolt felület kerülék, melynek felülete, mint tudjuk, $=\pi ab$, (hol a és b a fél tengelyeket jelenti) állnia kell e következő egyenletnek:

$cT=2\pi ab$; mivel pedig $a^2e^2=a^2-b^2$, tehát:

$b=a\sqrt{1-e^2}$, ennek helyettesítése folytán lesz:

$$cT=2\pi a^2\sqrt{1-e^2}, \quad \text{miből:} \quad c=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T},$$

az előbbiekben pedig találtuk:

$$\mu=\frac{c^2}{a(1-e^2)},$$

mely egyenletben c-nek imént megtalált értékét helyettesítvén, nyerjük:

$$\mu=\frac{4\pi^2a^3}{T^2};$$

ha pedig más valamely bolygó pályájának fél nagyobbik tengelye a'-el, és a keringési ideje T'-el jegyeztetik, akkor részére egy hasonló és pedig következő egyenlet áll:

$$\mu'=\frac{4\pi a'^3}{T'^2};$$

az előrebocsátottak szerint pedig kell hogy $\mu=\mu'$ legyen, áll tehát szintén:

$$\frac{4\pi a^3}{T^2}=\frac{4\pi a'^3}{T'^2}, \text{ avagy : } \frac{a^3}{T^2}=\frac{a'^3}{T'^2}, \text{ miből :}$$

$$a^3T'^2=a'^3T^2, \text{ következőleg}$$

$$T^2 : T'^2=a^3 : a'^3,$$

mely nevezetes arányzatban nem egyebet látun k, mint a Kepler harmadik szabályát, mely szerint a keringési idők négyzetei úgy vannak egymáshoz, mint a nagyobbik féltengelyek köbei; egyszersmind pedig látjuk, mily könnyü módon hozatott le ezen szabály az előrebocsátott általános elméletből.

16.) **(A feladat megfordított feloldása.)** Ezen megfordított feloldásnál a feladatot e következőképen kell formulázni; Adva van azon vonzó erő, mely által a bolygó megtartatik pályájában, meghatározandó 1-ször) azon görbe vonal, melyet az a nap körül le ír, és 2-szor) meghatározandók a mozgás törvényei.

Legyen tehát $R=\frac{\mu}{r^2}$ az adott vonzó erő, mely képes a bolygót pályájában megtartani; hol μ állandó s egyszersmind ismert mennyiség; akkor R-nek ezen értéke a 14)-dik szám 4) alatti egyenletében helyettesíttetvén, lesz :

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=b-2\mu\int\frac{dr}{r^2}=b+\frac{2\mu}{r};$$

minthogy pedig az előrebocsátottak szerint áll :

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2dv^2,$$

az előbbi egyenlet még így is lesz írható :

$$\text{(n)} \qquad \frac{dr^2+r^2dv^2}{dt^2}+b-\frac{2\mu}{r}=0.$$

Ebből az egyenletből még szükséges lesz dt-nek a kiküszöbölése, mi végre az előbbiekben találtuk :

$$dt=\frac{r^2dv}{c},$$

mely érték helyettesítése ezt adja :

$$\frac{c^2dr^2}{r^4dv^2}+\frac{c^2}{r^2}-\frac{2\mu}{r}+b=0,$$

melyben $\frac{1}{r}=z$ tétetvén, lesz :

$$dz = -\frac{dr}{r^2},\ \text{tehát}:\ dr = -r^2dz \ \text{és}\ dr^2 = r^4dz^2,$$

miknek helyettesítése által ezt kapjuk :

$$\frac{c^2dz}{dv^2} + c^2z^2 - 2\mu z + b = 0,$$

mely kifejezés nyilván nem egyéb, mint a kérdéses görbe vonal külzeléki egyenlete: hogy tehát maga a görbe vonal határoztassék meg, az előttünk álló egyenlet egészelendő lesz, mi végre a fenebbi egyenletből nyerjük :

$$dv = \frac{cdz}{\sqrt{2\mu z - b - c^2z^2}};$$

mielőtt azonban ennek egészelését véghez vinni lehetne, a z-vel ellátott tag kiküszöbölendő lesz, mi végre az ismert szabály szerint tétessék : $z = u + \frac{\mu}{c^2}$, akkor könnyü műtételek végbevitele után ezt kapjuk :

$$dv = \frac{\frac{c^2dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c^2z - \mu}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}\right)^2}},$$

mely kifejezés még így is írható :

$$dv = \frac{\frac{c^2dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu - c^2z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}\right)^2}},$$

mely kifejezést helyettesítés által egészelvén, e következő eredményre jutunk :

$$v = w + arc.cos\frac{\mu - c^2z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}},$$

hol w az egészelésnek tetszésszerinti állandója. Ezen egyenletből ered :

$$v - w = arc.cos\frac{\mu - c^2z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}},$$

s ennek folytán :

$$cos(v - w) = \frac{\mu - c^2z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}},$$

mely egyenletből ezt kapjuk:

$$c^2z=\mu-\sqrt{\mu^2-bc^2cos(v-w)};$$

mivel továbbá az egyenletben w szög tetszésünktől függ, azt mindig úgy lehet választani, hogy az utolsó tag tevőleges legyen, és az egyenlet így álljon:

$$c^2z=\mu+\sqrt{\mu^2-bc^2cos(v-w)},$$

ez egyenletben pedig z helyébe $\frac{1}{r}$ értéket visszahelyezvén, lesz:

$$9)\quad c^2=\mu r+r\sqrt{\mu^2-bc^2.cos(v-w)}.$$

Ez egyenletben látjuk, hogy benne az r vezérsugár és a hozzá tartozó v szög mint változó mennyiségek fordúlnak elő, ez tehát nem lehet egyéb, mint a kérdéses görbe vonal egyenlete, melyet a bolygó a nap körül le ír. Hogy ezen egyenlet ismert alakban terjesztessék elő, következik belőle

$$r=\frac{c^2}{\mu+\sqrt{\mu^2-bc^2.cos(v-w)}},$$

mely egyenletet így is lehet írni:

$$r=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+\sqrt{1-\frac{bc^2}{\mu^2}\cdot cos\,(v-w)}},$$

ebben pedig ha

$$\sqrt{1-\frac{bc^2}{\mu^2}}=e \text{ tétetik, lesz:}$$

$$1-e^2=\frac{bc^2}{\mu^2},\quad \text{következőleg}\quad \frac{c^2}{\mu}=\frac{\mu}{b}(1-e^2),$$

s ezeket az utolsó egyenletbe helyettesítvén, lesz:

$$r=\frac{\frac{\mu}{b}(1-e^2)}{1+ecos(v-w)},$$

és $\frac{\mu}{b}=A$ tétetvén, lesz még:

$$r=\frac{A(1-e^2)}{1+ecos(v-w)},$$

mely már nagyon ismert alaku egyenlet, mert az elemző mértanból tudjuk, hogy ez a kúpszeletek egyikéhez tartozik, miből következik, hogy a bolygók, a nap körül mozogván, kúpszeleteket írnak le, mely kúpszeleteknél A mint fél nagyobbik tengely fordúl elő; s melyeknek külpontisága $=e$, még pedig, ha $e<1$ akkor kerülék, ha $e>1$ akkor mentelék, ha $e=1$ akkor hajtalék jö létre, melynek góczhúrja $=2A$; mind ezek azonban, mint látjuk, csak b állandónak értékétől függnek, mert ha $b=0$, akkor áll $1-e^2=0$, tehát $e=1$, hogy pedig b tevőleges legyen, kell hogy $e<1$ legyen, végre hogy $e>1$ legyen meg kivántatik, hogy b nemleges legyen. Magát a b állandót illetőleg pedig, az megint azon viszonytól függ, mely viszonynak, a bolygó pályájának valamely pontbani sebessége, és a nap vonzó erejének hatása között, van helye, mint azt később meg fogjuk mutatni.

Ugyanazt épszögü összrendezők behozása által is meg lehet mutatni, és pedig e következő módon: Legyen OX' és OY' (23-dik idom) azon új tengelyrendszer, melyre az összrendezőket akarjuk vonatkoztatni; akkor $X'OX=w$ azon szög lesz, melyet az új metszéki tengely a régivel képez, az m pont összrendezői pedig, az új tengelyrendszerre vonatkozva legyenek x' és y', akkor nyilván áll:

$$x'=r\cos(v-w),\quad \text{és}\quad y'=r\sin(v-w),\quad \text{végre}$$

$$r=\sqrt{x'^2+y'^2},$$

mely értékeket a 9) alatti egyenletbe helyettesítvén, lesz:

$$c^2=\mu\sqrt{x'^2+y'^2}+x'\sqrt{\mu^2-bc^2},\quad \text{miből}$$

$$\mu\sqrt{x'^2+y'^2}=c^2-x'\sqrt{\mu^2-bc^2};$$

mely egyenletet négyzetre emelvén, lesz:

$$\mu^2x'^2+\mu^2y'^2=c^4-2c^2x'\sqrt{\mu^2-bc^2}+\mu^2x'^2-bc^2x'^2,\quad \text{avagy:}$$

$$\mu^2y'^2+bc^2x'^2=c^4-2c^2x'\sqrt{\mu^2-bc^2},$$

mely x' és y' összrendezök közötti egyenlet nyilván vagy a kerülékhez, vagy a mentelékhez, vagy a hajtalékhoz tartozik, valamint t. i. a b állandó vagy tevőleges, vagy nemleges, vagy elenyésző; s így ebből is következtethetjük, hogy ha valamely bolygóra olyféle erő hat, melynek hatása a távolság négyzetével forditott viszonyban áll, akkor a bolygó mindig kúpszeletet kénytelen leírni a nap körül.

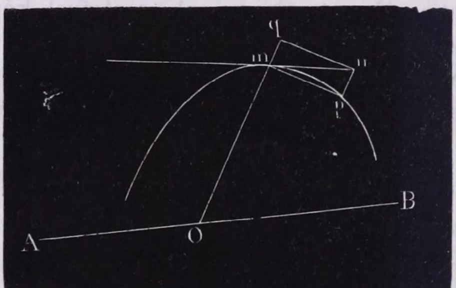
A fenebbi egyenletben előfordúló b és c állandóktól függ tehát azon görbe vonal természete és méretei, melyet valamely bolygó ír le a nap körül, magok ezen állandók pedig megint azon nevezetes körülményektől fognak függni, melyek alatt a bolygó mozgása kezdődött pályájában, mely körülményeket most tekintetbe kell venni, hogy ezen állandók meg határoztassanak.

Vegyük fel e végre, hogy a mozgó test súlypontja l távolsággal bírt a ható erő középpontjától, és hogy az a mozgás kezdetén V sebességgel volt ellátva; akkor ez esetben $l=r$ lesz a hozzá tartozó vezérsugár, és

$$\frac{ds}{dt}=V=\frac{\sqrt{dr^2+r^2dv^2}}{dt} \text{ annak kezdő sebessége.}$$

Legyen továbbá Θ azon szög, melyet a V sebesség iránya az $r=l$ vezérsugárral képez; akkor $Om=l$ (24-dik idom) tévén, és $mn=V$ vonal által a bolygó sebességét terjesztvén elő, ezen

(24-dik idom).



sebesség nyilván az $mqnp$ egyenköz alakítása által két mellék sebességre bontható, melyek egyike $mp=V\sin\Theta$ a vezérsugárra merőlegesen áll, másika pedig $mq=V\cos\Theta$ a vezérsugár irányával összeesik, és erre nézve áll:

$$\frac{dr}{dt}=V\cos\Theta.$$

A mozgás kezdetére nézve tehát, e következő egyenleteknek kell állniok:

$$r=l,\ \frac{dr}{dt}=V\cos\Theta,\quad \text{és}\quad \frac{dr^2+r^2dv^2}{dt^2}=V^2,$$

honnan $\frac{dr^2}{dt^2}=V^2\cos^2\Theta$, mely értéket az előttünk álló utolsó egyenletből kivonván, lesz:

$$\frac{r^2dv^2}{dt^2}=V^2(1-\cos^2\Theta)=V^2\sin^2\Theta,$$

következőleg:

$$\frac{rdv}{dt}=V\sin\Theta,$$

és l-et tévén r helyébe, áll:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{V\sin\Theta}{l}.$$

Ha tehát a most megtalált értékeket, r, $\frac{dr}{dt}$ és $\frac{dv}{dt}$ helyébe teszszük a 16)-dik szám n) alatti egyenletébe, akkor e következő eredményre fogunk jutni:

$$V^2\cos^2\Theta+V^2\sin^2\Theta=\frac{2\mu}{l}-b,\quad \text{honnan}$$

$$m)\quad V^2=\frac{2\mu}{l}-b,\quad \text{tehát}\quad V=\sqrt{\frac{2\mu}{l}-b},\quad \text{és}\quad b=\frac{2\mu}{l}-V^2$$

mely egyenletből látjuk, hogy b állandó a Θ szögtől nem függ, és ha $V^2<\frac{2\mu}{l}$, akkor b tevőleges levén, a bolygó kerüléket irand le a nap körül; ha pedig $\frac{2\mu}{l}<V^2$, akkor b állandó nemlegessé válik, és a bolygó menteléket irand le a nap körül; végre ha $V^2=\frac{2\mu}{l}$, akkor b állandó elenyészik, és a bolygó hajtalékban fog mozogni a nap körül.

Mivel továbbá $b=\frac{\mu}{a}$, mint később látni fogjuk, ezen értéket tévén b helyébe, lesz:

$$V=\sqrt{\frac{2\mu}{l}-\frac{\mu}{a}},$$

s azonnal látjuk, hogy a kör-mozgásra nézve kell, hogy $a=l$ legyen, minek folytán lesz:

$$V=\sqrt{\frac{\mu}{a}}, \text{ avagy } V=\sqrt{\frac{\mu}{l}},$$

mely egyenlet azon feltétet foglalja magában, mely alatt a bolygó körben fog mozogni.

Minthogy továbbá az előbbiekben találtuk :

$$c=r^2\frac{dv}{dt},$$

ha ide is r és $\frac{dv}{dt}$ helyébe a fen talált értékek tétetnek, lesz :

$$c=Vl\sin\Theta,$$

miből láthatni, hogy a második c állandó már Θ szögtől függ, tehát vele is változik, s így a pálya külpontisága is α szögtől nem lesz független, mint azt a fen talált

$$e=\sqrt{1-\frac{bc^2}{\mu^2}}$$ képletből világosan látjuk.

Végre az előbbiekben kaptuk : $A=\frac{\mu}{b}$, honnan következik, hogy a bolygók pályáinak fél nagyobbik tengelyei is, csak az r, μ és V mennyiségektől függnek; a nagyobbik tengely minden bolygó pálya- elemei között az egyetlen egy változatlan mennyiség levén.

17.) Minthogy az előbbiekből tudjuk, hogy a vezető sugár legkisebb a napközelben, legnagyobb pedig a naptávolban, a bolygó sebessége az első esetben lesz a legnagyobb, a második esetben pedig a legkisebb. Azon esetre tehát, ha valamely bolygó kerülékben mozog, melynek nagyobbik fél tengelye $r=a$, és keringési ideje $=t$, akkor a később bekövetkezendő bebizonyítás szerint, kell hogy álljon :

$$\mu=\frac{4\pi^2a^3}{t^2};$$

mivel pedig a vonzó μ erő egyenes viszonyban van a vonzó tömeggel, ha M és m által a nap és a bolygó tömegét jelentjük állni fog szintén :

$$M+m=\frac{4\pi^2a^3}{t^2}.$$

Ha pedig valamely más m' tömegü bolygó vétetik tekintetbe, melynek keringési ideje $=t'$, akkor e következő egyenlet fog állni :

$$M+m'=\frac{4\pi^2a'^3}{t'^2},$$

hol a' az új bolygó pályájának fél nagyobbik tengelye, akkor e következő arányzatra jutunk :

$$M+m : M+m'=\frac{a^3}{t^2} : \frac{a'^3}{t'^2},$$

mivel pedig a Kepler harmadik szabálya szerint kell, hogy legyen $\frac{a^3}{t^2}=\frac{a'^3}{t'^2}$, következik, hogy a bolygók tömegei a naptömeg irányában elenyészők.

Ha a sebesség fen talált egyenletében :

$$V=\sqrt{\frac{2\mu}{l}-\frac{\mu}{a}}$$

μ helyébe a fen kitett érték tétetik, akkor kapjuk :

$$V=\frac{2\pi a}{t}\sqrt{\frac{2a}{l}-1}\,;$$

mivel pedig a napközelre nézve $l=a(1-e)$, a naptávolra nézve pedig $l=a(1+e)$, lesz a bolygó legnagyob sebessége :

$$V=\frac{2\pi a}{t}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

a bolygó legkisebb sebessége pedig lesz :

$$V=\frac{2\pi a}{t}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}},$$

mely képletekből egyszersmind világosan olvasható, hogy a bolygó sebessége a napközelben annál nagyobb, minél nagyobb pályájának a külpontisága ; azért is az üstökösök, a napközelben megjelenvén, roppant sebességgel mozognak, mivel nagy külpontiságu kerülékeket írnak le a nap körül.

Ezelőtt ugy találtuk, hogy :

$$M+m=\frac{4\pi^2a^3}{t^2}.$$

Ha m' azon mellék bolygó tömege, mely az m tömegü bolygó körül T idő alatt egy keringést végez, s melynek pályájának nagyobbik fél tengelye $=a'$, akkor hasonlóképen kell, hogy álljon :

$$m+m'=\frac{4\pi^2a'^3}{T^2},$$

és az utolsó két egyenlet osztása által ezt kapjuk :

$$\frac{M+m}{m+m'}=\frac{a^3T^2}{a'^3t^2},$$

s mivel m elhanyagolható M irányában, és hasonló oknál fogva m' is elhanyagolható m irányában, állni fog még :

$$\frac{M}{m}=\frac{a^3T^2}{a'^3t^2},$$

mely nevezetes egyenlet segítségével könnyen meghatározható a nap tömege, valamely bolygó tömegéhez képest, ha annak mellék bolygója van. Ezen képlet szerint könnyü módon azt találjuk, hogy a nap tömege több mint 350000-szer nagyobb a föld tömegénél.

18.) Miután a csillagászok észleletei által megállapitatott, hogy a bolygók mind kerülékeket írnak le a nap körül, nem lesz érdektelen, itt még ezen kerüléki mozgást külön megvizsgálni oly módon, hogy az r és v mennyiségek, melyektől a bolygó helye a pályájában különösen függ, t időnek függvényében fejeztessenek ki. E végre az előbbiekben ezt találtuk :

$$r^2dv=cdt, \quad \text{miből} \quad dv=\frac{cdt}{r^2},$$

mit a 16) szám n) alatti egyenletébe helyettesitvén, lesz :

$$k). \quad \frac{dr^2}{dt^2}+\frac{c^2}{r^2}-\frac{2\mu}{r}+b=0;$$

minthogy pedig az r mennyiseg legkisebb vagy legnagyobb értéke akkor áll be, ha $\frac{dr}{dt}=0$, ezen értékek meghatározására ezen egyenlet fog szolgálni :

$$\frac{c^2}{r^2}-\frac{2\mu}{r}+b=0, \quad \text{avagy:} \quad c^2-2\mu r+br^2=0, \quad \text{vagyis:}$$

$$r^2-\frac{2\mu r}{b}+\frac{c^2}{b}=0.$$

Ha továbbá r-nek a legnagyobb és lekisebb értéke, mint ezelött, $a(1+e)$ és $a(1-e)$ kifejezések által jegyeztetik, következik nyilván, hogy $\frac{2\mu}{b}$ ezen értékek összege, $\frac{c^2}{b}$ pedig ezen értékek szorzata, áll tehát:

$$a(1+e)+a(1-e)=\frac{2\mu}{b}, \text{ avagy } \frac{\mu}{b}=a, \text{ honnan}$$

$b=\frac{\mu}{a}$; továbbá:

$$\frac{c^2}{b}=a^2(1-e^2), \quad \text{miből } c^2=ba^2(1-e^2),$$

és b helyett értékét téve, lesz:

$$c^2=\mu a(1-e^2), \quad \text{miből} \quad \frac{c^2}{\mu}=a(1-e^2);$$

továbbá áll:

$$c^2=ba^2-ba^2e^2, \quad \text{s ebből}$$

$$ba^2e^2=ba^2-c^2, \quad \text{tehát} \quad e^2=1-\frac{c^2}{ba^2}=1-\frac{c^2b}{\mu^2},$$

következőleg

$$e=\sqrt{1-\frac{c^2b}{\mu^2}};$$

miből láthatni, hogy ha a és e mennyiségek észleletek által határoztatnak meg, b és c állandóknak értékei is kiszámíthatók.

Ha a megtalált értékeket a k) alatti egyenletbe helyettesítjük, és az így nyert egyenletből dt-nek értéke kikerestetik, e következő egyenletet kapjuk;

$$dt=\frac{\sqrt{\frac{a}{\mu}}.rdr.}{\sqrt{2ra-r^2-a^2+a^2e^2}}.$$

Hogy ezen egyenletet egészelni lehessen, azt először okszerűvé kell tenni, mit e következő helyettesítés által elérünk:

b) $r=a-aecosu,$

hol u egy változó szög, s hogy ezen helyettesítés igen helyes és czélszerü, következik abból, hogy ha $u=0$ lesz $r=a-ae$, és ha $u=180^0$, lesz $r=a+ae$, mint lenniök is kell; az r vezérsugár tehát ezen kifejezés által kellőleg van adva, hagyan az u szögöt 0-tól kezdve 180^0-ig számítjuk. Az utolsó egyenlet külzelése által ezt kapjuk:

$$dr=aedusinu,$$

továbbá a gyök alatti mennyiség :

$$a^2e^2-(r-a)^2=a^2e^2sin^2u, \text{ következőleg}$$

$$dt=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}du(1-ecosu),$$

és ha itt $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}=\frac{1}{n}$ tétetik, lesz még :

$$ndt=du(1-ecosu),$$

s ennek egészelése által ezt nyerjük :

$$nt=u-esinu+C.$$

Ezen egyenletből u mennyiség t időnek függvényében lenne kifejezendő, minek megtörténte után, r is következnék a fenebbi b) alatti egyenletből, s ennek következtében v is meghatározható volna, a bolygó pályája egyenletének segítségével. De mivel ezen mütételek nem könnyen eszközölhetők, jobbnak tartjuk mindezeket más úton kikeresni, mely út e következő :

Észleletek által t. i. ismeretessé vált, hogy a bolygók pályáinak külpontiságai igen csekélyek, az e mennyiség tehát igen kicsiny törtszám, minek folytán lehetségessé válik, az u, r, és v mennyiségeket, e mennyiségnek növekedő hatványai szerint haladó és igen összetartó sorba fejteni. Ha azonban abban megállapodunk, hogy e-nek második és magasb hatványait érezhető hiba nélkül elhanyagolni lehetne, akkor u szögnek a behozása nem is szükséges, minthogy ez esetben az r és v mennyiségeket igen egyszerü és czélszerü módon lehet kifejteni, ugyanis a bolygó pályájának egyenletéből :

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+ecos(v-w)},$$

e következő eredményt kapjuk :

$$r^2[1+2ecos(v-w)+e^2cos^2(v-w)]=a^2(1-e^2)^2,$$

itt pedig, mint mondók, e^2-t elhanyagolván, lesz :

$$r^2\Big(-1+2ecos(v-w)\Big)=a^2, \text{ következőleg}$$

$$r^2=\frac{a^2}{1+2ecos(v-w)},$$

és ha itten az osztást végheznviszszük, lesz :

$$\text{h)}\quad r^2 = a^2\left(1-2e\cos(v-w)\right).$$

Továbbá, az előbbiekből tudjuk, hogy áll :

$$r^2dv = cdt = dt.\sqrt{\mu a(1-e^2)},$$

hol e^2-t elhanyagolván, lesz :

$$r^2dv = dt\sqrt{\mu a},$$

ide pedig a h) alatti értéket helyettesítvén r^2 helyébe, ezt kapjuk :

$$a^2[1-2e\cos(v-w)]dv = dt\sqrt{\mu a},\quad \text{avagy :}$$

$$[1-2e\cos(v-w)]dv = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}dt,$$

honnan egészelés által ezt nyerjük :

$$v - 2e\sin(v-w) = nt + k,$$

hol $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$ tétetett. Hátra van még az w és k állandóknak a meghatározása, mi végre csak annak a fölvétele lesz szükséges, hogy a bolygó a napközelben kezdte mozgását, mi által mind w mind k elenyésznek, és az egyszerüsített egyenlet e következő lesz :

$$v - 2e\sin v = nt,\quad \text{miből}$$

$$v = nt + 2e\sin v.$$

Ezen nevezetes egyenletből látni való, hogy ha $e=0$ volna, azaz, ha a bolygók körökben mozognának a nap körül, akkor lenne: $v=nt$, azaz, a középponti szögök az idővel egyenes viszonyban volnának; v-nek ezen értékét a fenebbi egyenletbe tévén, nyerjük :

$$\text{q)}\quad v = nt + 2e\sin nt,$$

és mind ezeknek folytán, a h) alatti egyenlet megtekintéséből, a vezérsugár számára e következő egyenletet kapjuk :

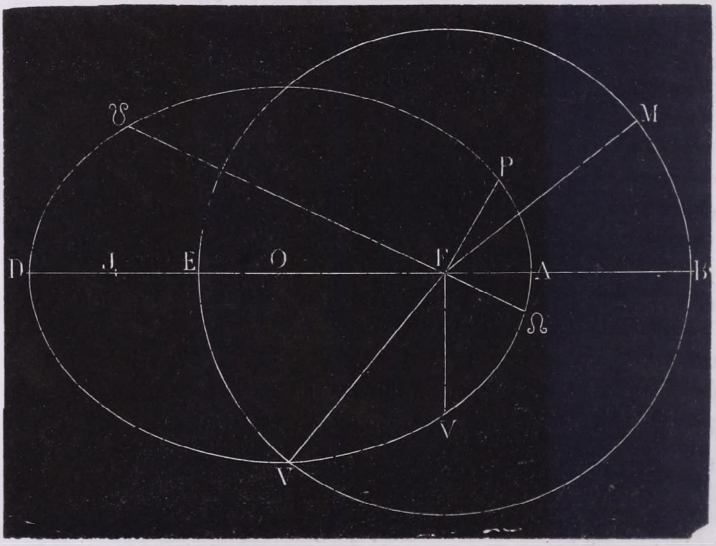
$$\text{p)}\quad r = a(1-e\cos nt),$$

mely utolsó két egyenlet, mint látjuk arra szolgál, hogy a bolygó helyzetét pályájában minden időben és könnyü módon meg lehessen határozni.

19.) Az előrebocsátottak segítségével nem lesz érdektelen itt megmutatni, miként képzelendő valamely bolygónak mozgása a nap körül. A fenebbi q) egyenlet értelmében t. i.

a csillagászok egy képzelt bolygót (astre fictif) vesznek föl, mely a nap körül oly körben mozog, melynek középpontja, a nap súlypontjával összeesik, mely bolygó mozgása tehát egyenletes lesz; maga a mozgás azonban úgy képzelendő, hogy a valódi és kerülékben mozgó bolygó, a képzelt bolygóval ugyanazon

(25-dik idom.)



időpontban a nagyobbik tengelyen megyen keresztül. Hogy ezen nevezetes mozgást annál jobban meg lehessen érteni, legyen $DA=2a$ (25-dik idom) a bolygó pályájának nagyobbik tengelye, F azon gyupont, melyben a nap áll, következőleg $FA=a(1-e)$ a napközel naptóli távola, és $FD=a(1+e)$ a naptávol naptóli távola; ha most $FB=OA=a$ sugárral kört írunk le, akkor ez a meghosszabbított tengelyt B-ben fogja metszeni, s most az előrebocsátottak így értendők: midőn a valódi bolygó A ponton megy keresztül, a képzelt bolygó B-ben fordúl elő, és midőn egy fél keringés bevégezte után, a valódi bolygó D ponton megy keresztül, a képzelt bolygó E-ben fordúl elő; a valódi bolygó tehát fél pályáját ugyanazon időben hagyja hátra, mely alatt a képzelt bolygó az emlitett körnek fél kerületét irja le, csak azzal s különbséggel, hogy a képzelt bolygó egyenletesen, a valódi bolygó pedig változó sebességekkel hagyja hátra pályáját.

Azon féltét alatt tehát, hogy mi FB vonaltól számítjuk mind a két bolygónak szögleti távolait, akkor a képzelt bolygó B-től távola mindig egyenlő lesz, a fenebbi q) alatti egyenlet első nt tagjával, és vezérsugara ezen bolygónak mindig egyenletesen mozog; ezen vezérsugár azonban, a valódi bolygó vezérsugarával oly szögöt képez, mely szög $(2esinnt)$ kifejezés által van adva; feltévén t. i. hogy bizonyos t idő alatt, a képzelt bolygó B-től M-ig, a valódi bolygó pedig A-től P-ig ment, akkor a két FM és FP vezérsugarak közötti szög, azaz PFM szög $=2esinnt$ lesz, mely szög a csillagászoknál, középponti egyenletnek (équation du centre) mondatik; itt azonnal látjuk, hogy mivel $sin 0=0$, és $sin 180^0=0$, ezen középponti egyenlet elenyészik, midőn a valódi bolygó A és D-ben fordúl elö; miből következik, hogy mind a két bolygó ugyanazon idő alatt hagyja hátra pályáját, csak az nevezetes ezen keringésnél, hogy pályájoknak első felében a valódi bolygó előre halad, a képzelt bolygót maga után hagyván, pályájának második felében azonban megint a képzelt bolygó halad előre, a valódi bolygót maga után hagyván.

A csillagászoknál az FMB szög $=nt$ közép, az AFP szög pedig valódi rendhíjának szokott neveztetni. Ha V a napéjegyen-pont, és Ω a bolygó pályájának felmenő csomója, lesz $V\Omega$ az említett csomónak hosszusága, mely tehát $VF\Omega$ szög által méretik meg. Hasonlóképen a VBM ív vagy MFV szög a bolygó közép hosszával lesz egyenlő, s így a PF és FV vonalok által befogott szög, a bolygó valódi hosszuságának tekintendő.

Az előrebocsátottakból könnyü belátni, hogy a valódi bolygó helyzetének a meghatározására, csak annak közép rendhíja $=nt$ szükséges, mely mennyiség mindig könnyen megtalálható, minthogy ahhoz nem kívántatik egyéb, mint azon pillanatnak az észlelése, melyben a bolygó a napközel pontján megy keresztül, mert ha T alatt a bolygó keringése idejét értjük, és azon pillanattól kezdve, melyben a bolygó a napközel pontban fordúl elő, mozgása $\frac{1}{36}T$-ig tart, akkor egy egész keringésnek 360°felelvén meg, $\frac{1}{36}T$ időnek szükségképen $\frac{360}{36}=10^0$-nyi szög felelend meg, s ez egyszersmind nt-nek a keresett értéke, melyet a q) és p) alatti egyenletekben helyettesítvén, a bolygó mind valódi rendhíja, mind vezér sugara, tehát helyzete is pályájában meg lesz határozva.

Ha T a bolygó egész keringési ideje, lesz szükségképen $nT=2\pi$, és ha ide n helyébe a fen kitett értéket helyettesítjük, ezt fogjuk kapni:

$$\frac{T\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}=2\pi, \quad \text{avagy} \quad T\sqrt{\mu}=2\pi a\sqrt{a},$$

mely egyenletet négyzetre emelvén, lesz:

$$\mu T^2=4\pi^2 a^3, \text{ miből : } T^2=\frac{4\pi^2 a^3}{\mu},$$

mely nevezetes kifejezés már az előbbiekből ismeretes előttünk, minthogy, mint látjuk, a Kepler harmadik szabályát tartalmazza magában; egyszersmind pedig az előrebocsátott elméletnek az összhangzását ebből világosan lehet látni.

20.) Nem lesz érdektelen, az előbbiekben megállapított általános képleteket egy számszerinti példára alkalmazni, minthogy csak úgy lehetend világosan látni, miként használandók ezen képletek.

Vegyük föl ugyanis, hogy valamely nehéz test, melynek tömege azonban földünk tömegénél kissebb, $\frac{1}{6}$ mértföldnyi avagy 4000 lábnyi sebességgel mozog a föld körül, mozgása 50000 mértföldnyi távolságban a földtől kezdődik úgy, hogy a mozgás iránya, a kezdő pont vezérsugarával épszögöt képezzen; akkor áll:

$$V=\frac{1}{6}, \quad r=50000, \quad \text{és} \quad \Theta=90^0,$$

és e következő kérdés támad: mily nemü görbe vonalt irand le az a föld körül, és minő méretei lesznek a leirt pályájának?

Itt azonnal látjuk, hogy a kérdéses pálya méreteinek a meghatározására, mindenekelőtt a (b) állandó és az μ számnak értéke kieszközlendő. A μ számot illetőleg tudjuk, hogy az nem egyéb, mint a föld vonzó ereje egységnyi távolban, középpontjától számítva; s mivel itt a távolság egysége a mértföld, és a föld felületén ható nehézségi erő $g=31$ láb $=0{,}0013$ mértföld (a mértföldet 24000 lábnyinak vevén föl), egy mértföldnyi távolban a föld középpontjától számítva, a nehézségi avagy vonzó erönek mértékét, e következö arányból fogjuk megtalálni.

$$g : \mu = 1^2 : 860^2, \text{ miből } \mu = 860^2 . g$$

ha t. i. a föld összes vonzó erejét, annak középpontjában központosítva képzeljük. Ha az utolsó kifejezésben g helyett a fenebbi érték tétetik, lesz:

$$\mu = 961{,}48.$$

Ez meglevén, b állandónak értéke ezen egyenletből következik:

$$b = \frac{2\mu}{r} - V^2,$$

melyben a jelen esetre nézve $V = \frac{1}{6}$, tehát $V^2 = \frac{1}{36} = 0{,}028$, $\frac{2\mu}{r}$ pedig $= \frac{1922{,}96}{50000} = 0{,}0384$ teendő, mi által b-re nézve ezt kapjuk:

$$b = 0{,}0384 - 0{,}028 = 0{,}0104.$$

Ezen adatok segítségével azonnal nyerjük a kérdéses pálya nagyobbik fél tengelyét, mely $A = \frac{\mu}{b}$ levén, e következő értékre vezet:

$$A = \frac{961{,}48}{0{,}0104} = 92450,$$

azaz, a kérdéses test oly kerüléket irand le a föld körül, melynek fél nagyobbik tengelye 92450 mértföldnyi, mozgása pedig a földközelben kezdődik. Külpontisága ezen pályának nyilván $92450 - 50000 = 42450$ mértföldnyi, az e arányszámot tehát ezen egyenletből kapjuk: $92450 . e = 42450$, honnan $e = 0{,}459$, miből látni való, hogy a leírt kerülék nagy külpontisággal bír, mi csak a felvett nagy kezdö sebességnek tulajdonitandó. A megtalált kerülék kisebbik fél tengelye $b = a\sqrt{1-e^2}$ képlet szerint 81356 mértföldnyinek találtatik.

Ha azt akarnók, hogy a kérdéses test a föld körül kört írjon le, akkor a kezdő sebessége tetemesen változni fog; ez esetben t. i. áll: $A=r$, tehát $r=\frac{\mu}{b}$, miből $b=\frac{\mu}{r}$, mely értéket a fenebbi egyenletbe tévén, lesz:

$$\frac{\mu}{r}=\frac{2\mu}{r}-V^2, \text{ honnan } V^2=\frac{\mu}{r}, \text{ tehát } V=\sqrt{\frac{\mu}{r}},$$

s ebben a képletben a fenebbi értékeket helyettesitvén, kapjuk:

$$V=\sqrt{\frac{961,48}{92450}}=0,102,$$

azaz, a kezdő sebességnek csak $\frac{1}{10}$ mértföldnyinek, avagy 2400 lábnyinak kell lenni. Mindezekből látjuk, hogy a körpálya előidézésére, csak egyetlen egy sebesség alkalmas, holott egy kerülék létrehozására sok különféle sebesség alkalmazható; így könnyü meggyőződni, hogy $\frac{1}{10}$ és $\frac{1}{6}$ mértföld között bármely érték sebesség gyanánt fölvehető, s ezen sebességek mindegyike kerüléket adand.

Vegyük fel tehát még, hogy a test kezdő sebessége $\frac{1}{8}$ mértföldnyi, mely érték nyilván $\frac{1}{10}$ és $\frac{1}{6}$ között fekszik; akkor az előbbi eljárás szerint lesz:

$$V^2=\frac{1}{64}=0,0156, \text{ továbbá: } \frac{2\mu}{r}=0,0384,$$

következőleg $b=0;0228$, s ennél fogva a pálya nagyobbik fél tengelye:

$$A=\frac{\mu}{b}=\frac{9614800}{228}=42170,$$

azaz, a pálya nagyobbik fél tengelye 42170 mértföldnyi lesz, de a test mozgása már nem a földközelben, hanem a földtávolban kezdődik, mit az adatokból könnyen be lehet látni; s így ezen pályának a külpontisága lesz: $=50000-42170=7830$ mértföldnyi, e arányszámnak az értéke tehát lesz: $e=0,18$, miből láthatni, hogy ezen kerülék már kisebb külpontisággal bír, tehát jobban közeledik a körhöz.

Az eddig előterjesztett elvek annak belátására szolgálnak, miért hogy e világ egyetemben, különösen pedig a napi rendszerben, egyetlen egy test sem létezik, mely más görbe vonalt írna le a nap körül mint kerüléket, és egyedül csak kerüléket, minek világos oka abban keresendő, hogy sokféle és különféle kezdő sebesség alkalmas kerülék létre-hozására, míg valamely test körbeni mozgására, csak egyetlen egy meghatározott sebesség alkalmazható, melylyel ha a test bírna is mozgásának kezdetében, az még sem lehetne maradandó, minthogy e világ egyetemben müködő különféle vonzó erő által változást szenvedne, mihelyt pedig egy ilyféle változás áll be, azonnal a körpálya kerüléki pályára megy át; vajjon pedig a létre-jött kerüléki pálya nagyobb vagy kisebb külpontisággal bír e, az a sebesség változásának nagyságától fog függni, mely változás ha tetemes, a kerüléki pálya is nagyobb külpontiságu lesz; ha pedig kevésbé tetemes, akkor a pálya külpontisága is kisebbnek fog mutatkozni. Így földünk pályájának külpontiságára nézve tudjuk, hogy az $e=0{,}01678$ szám által van képviselve, azaz, a föld pályájának külpontisága fél nagyobbik tengelyének azon része, mely rész 0,01678 törtszám által képviseltetik, ezen külpontiság tehát csekély, miből szabad következtetnünk, hogy a föld pályájábani kezdő sebessége, nem sokat különbözik azon sebességtől, melynél fogva az kört írt volna le a nap körül. Egyébiránt ezen külpontiságot nem oly nagyon csekélynek kell tekinteni, minthogy a föld pályájának fél nagyobbik tengelye 20682329 mértföldnyi levén, a fen emlitett külpontiság 330917 mértföldnyire rug, mi csakugyan tetemes távolságnak tekintendő; mind a mellett azonban a földpálya nem sokat különbözik a körtől, mit abból is lehet látni, hogy a nap látszólagos nagysága egy keringés alatt nem sokat változik, mint azt a két tengely közötti viszonyból is lehet látni, mert a föld pályájának kisebbik tengelye úgy áll a nagyobbik tengelyhez, mint 7000 : 7001-hez. A nap látszólagos nagyságát illetőleg pedig, közvetlen mérések azt mutatták, hogy a nap midőn a legkisebb távolságra van mitőlünk (mi deczemberben szokott be állni), 0,5432 foknyi látszólagos átmérővel el van látva; midőn pedig az a lehető legnagyobb távolságra van mitőlünk, (mi junius közepe táján szokott beállni), átmérőjének látszólagos nagysága 0,52527 foknyinak találtatott, s így látjuk, hogy az ezen két szám közötti különbség sem nagy.

TARTALOM.

BEVEZETÉS.

ELSŐ FEJEZET.

Okszerütlen függvények egészelése.

Okszerü való tört függvények szétbontása részlet-törteikre.

Egészelés szétbontás útján.

Részletes egészelés és az úgynevezett lenyomási képletek származtatása.

Másod és felsőbb reedü, de első foku külzeléki egyenletek egészelése.

Három változóval bíró külzeléki függvények egészelése.

Részlet-külzeléki egyenletek egészelése.

F. sz. Lap

A másod rendü részlet-külzeléki egyenletek egészelése.

Együttes külzeléki egyenletek egészelése.

Egészleti képletek gyüjteménye.

ÖTÖDIK FEJEZET.

A változtatási hánylat alapelvei.

A függvények legnagyobb és legkisebb értékei.

HATODIK FEJEZET.

Alkalmazás a Mechanikára.

Sajtóhibák.

16. lap alulról 3-ik sor $b=\sqrt{\gamma}$ helyett olvasd $b=\sqrt{-\gamma}$.

19. l. felülről 11. s. $\frac{1}{}log(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})$ h. o. $\frac{1}{\gamma}log(\sqrt{\alpha}+x\sqrt{\gamma})$.

29. lap fel, 12. sor $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^3$ helyett olvasd $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$.

33. l. fel. 6. sor $\frac{nr-1}{p}$ helyett olv. $\frac{nr}{p}-1$

37. l. al. 2. s. $\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x-a)^m f'(x)}-\frac{A}{(x-a)^m}+\ldots\ldots$

hely. olv. $\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x-a)^m f'(x)}=\frac{A}{(x-a)^m}+\ldots\ldots$

124. l. fel. 1. s. külzelék egészelése h. o. külzelék egészlete

127. l. fel. 6. s. $x=\frac{1}{\sqrt{k}}\,log\,(y\sqrt{k}+\sqrt{C+ky^2})+C$ helyett

olvasd $x=\frac{1}{\sqrt{k}}\,log\,(y\sqrt{k}+\sqrt{C+ky^2})+B$.

ugyanaz lap 9. s. $(y\sqrt{k}+\sqrt{C+ky^2x})$ h. o. $(y\sqrt{k}+\sqrt{C+ky^2})$

ugyanaz lap 13. s. $B'\sqrt{k}e^{x\sqrt{k}}$ hely. olv. $B'e^{x\sqrt{k}}$

128. l. al. 10. s. A helyett olvasd A'

143. l. fel. 10. s. egészletében dx szorzó hiányzik.

168. l. al. 13. s. $r(\varphi+sin\psi)$ hely. olv. $r(\varphi+sin\varphi)$

176. l. al. 6. s. $\frac{n-1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi=\frac{a\pi}{2}$ hely. o. $\frac{n-1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx cos^{n-2}x$

ugyanaz lapon 4. s. $-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d=\varphi\frac{a\pi}{2}$ h. o. $-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi=\frac{a\pi}{2}$.

179. l. fel. 4. s. határozható, káll hely. o. határozhatók, áll

ugyanaz lapon al. 8. s. hosszával hely. o. sugarával

191. l. fel. 8. s. falületet helyébe olv. felületet

194. l. al. 15. s. $\frac{4}{8}\pi a^3$ hely. o. $\frac{4}{3}\pi a^3$

196. l. fel. 6. s. 12,78 helyett olv. 11,78

211. l. al. 10. s. közönségos hely. o. közönséges

240. l. al. 4. s. Ce^{-x} hely. o. Ce^{-x}

241. l. fel. 4. s. $Q=-\frac{ax}{1-x^2}$ hely. o. $Q=-\frac{a}{1-x^2}$

267. l. fel. 7. s. $\sqrt{x^2+y^3}$ hely. o. $\sqrt{x^2+y^2}$

ugyanaz lap al. 6. s. $\frac{dy}{dx}-xy$ hely. o. $\frac{dy}{dx}=xy$

283. l. al. 9. s. $a+\sqrt[3]{1+p^3}$ hely. o. $+a\sqrt[3]{1+p^3}$

295. l. al. 7. s. lesz az 1) alatti egyenletből lesz pedig, hely. olv. az 1) alatti egyenletből pedig lesz:

296. l. al. 13. s. $\pm$ helyett csak $+$ olvasandó.

299. l. al. 7. s. uu hely. o. nu.

300. l. al. 13. s. $(1-au)\sqrt{2}$ hely. o. $(1+au)\sqrt{2}$.

305. l. fel. 2. s. $n=k+r$ hely. o. $n=k-r\sqrt{-1}$

306. l. fel. 4. s. $\frac{dn}{u}$ hely. o. $\frac{du}{u}$.

319. l. fel. 5. s. $k'^{a'x}$ hely. o. $k'e^{a'x}$

ugyanaz lapon fel. 9. s. $k'e^{ax}$ hely. o. $k'e^{a'x}$.

321. l. fel. 7. s. $C'''ea_3{}^x$ hely. o. $C'''e^{a_3x}$

330. l. al. 5. s. "hogy $x=a$ értékre a nézve a„ helyett olvasd hogy $x=a$ értékre nézve a

337. l. al. 9. s. összehasonlításábö hely. o. összehasonlításából

338. l. fel. 1. s. nxz hely. o. nxz^2

339. l. al. 8. s. $R=\frac{y^2}{z}$ hely. o. $R=-\frac{y^2}{z}$,

362. l. al. 10. s. $z=Mq+Nq$ hely. o. $z=Mp+Nq$

367. l. al. 10. s. bal része hely. o. jobb része.

384. l. al. 5. s. $C'e^{at}$ hely. o. $C'e^{a't}$

386. l. fel. 9. s. $C'''e^{-4}$ hely. o. $C'''e^{-4t}$

419. l. al. 16. s. $\int M'dy$ hely. o. $\int M'\delta y$

420. l. fel. 13. s. δdU hely. o. $\delta dU'$

430. l. al. 7. s. $\int \frac{dxd\delta x + yd\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ hely. o. $\int \frac{dxd\delta x + dyd\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$

430. l. al. 6. s. $\int \left(\frac{dx}{ds}\right) d\delta y$ hely. olv. $\int \left(\frac{dy}{ds}\right) d\delta y.$

E munkának első kötetére nézve még e következő lényeges hibák találtattak meg :

46. lap felülről 14-dik sor $aloga$ helyett olvasd $a^v loga$

31. lap alulról 3-dik sor

$$dy = \frac{\frac{1}{2}dx(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x^2})\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} - \frac{\frac{1}{2}dx(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

helyett olvasd

$$dy = \frac{\frac{1}{2}dx(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} - \frac{\frac{1}{2}dx(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

57. l. fel. 7. s. $\frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ hely. o. $+\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

ugyanaz lap fel. 11. s. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ helyett olvasd

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

és ugyanazon sorban $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ helyett o. $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

74. lap felülről 7-dik sor $f(3)=4$ helyett olvasd $f(3)=7$

75-dik lap felülről 12-dik sor $-f''(0)=2C$ helyett olvasd $f''(o)=2C$

69. lap felülről 7-dik sor $\frac{d \cdot f(x+h)}{dh} = \alpha M h^{\alpha-1} \beta N h^{\beta-1} +$ h. o.

$$\frac{df(x+h)}{dh} = \alpha M h^{\alpha-1} \cdot + \beta N h^{\beta-1} + \dots$$